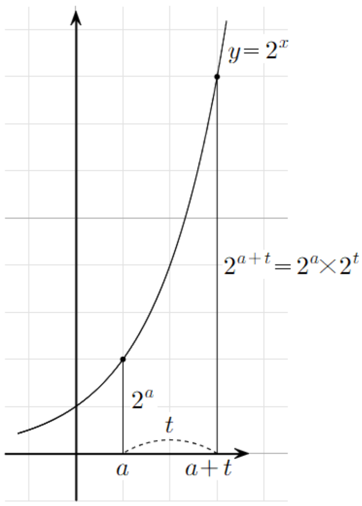
'y좌표의 확대·축소는 곧 x좌표의 평행이동'

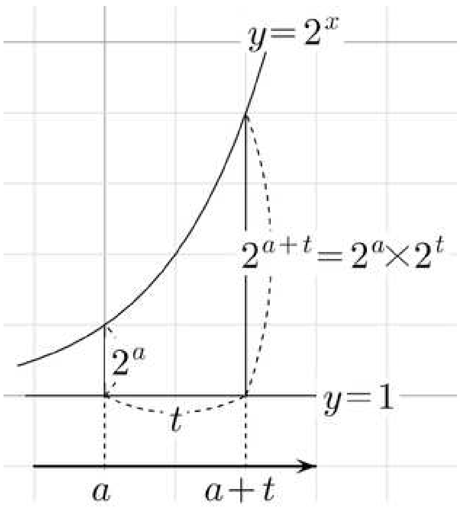


곡선 $y=2^x$에서 y좌표를 4배하면 곡선 $4y=2^x$와 같다.

이 식은 다음과 같이 정리해보면

$$y=\frac{1}{4}\times 2^x=2^{x-2}$$

이므로 곡선 $y=2^x$에서 y좌표를 4배한 것은 x축 방향으로 $+2$만큼 평행이동한 것과 동일하다. 즉, x축 방향으로 $+2$만큼 평행이동하면 y값은 2^{+2}배가 되고 x축 방향으로 $+t$만큼 평행이동하면 y값은 2^{+t}배가 됨을 알 수 있다.



'점근선으로부터의 거리비'

위에 개념을 사용할 때 주의해야 할 점은 지수함수가 y축 방향으로 평행이동이 되었을 때이다. y축 방향으로 평행이동 되었을 때는

'점근선으로부터의 거리비'

임을 꼭 주의하도록 하자.

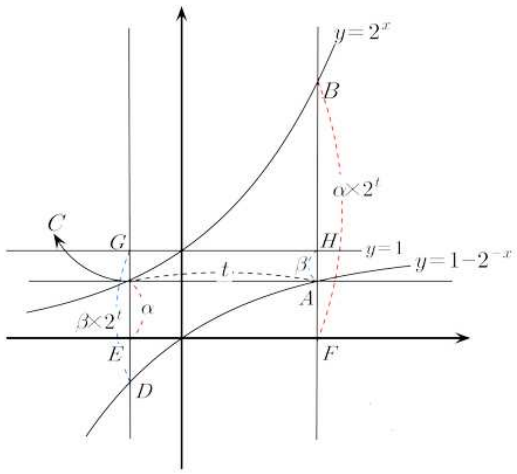
이건 첫 번째 레슨 : 점근선으로부터의 거리비

앞선 개념을 통해 지수함수의 출제 포인트는 지수함수 위에서 x좌표를 평행이동했을 때 y좌표의 확대•축소의 개념을 배웠다. 이 개념을 2025학년도 12번에 적용시켜보자.

$y=2^x$와 $y=1-2^{-x}$ 모두 밑의 크기가 2로 동일하므로 x좌표 변화량이 같으면 '점근선으로부터의 거리' 확대•축소 비율이 같다는 것을 알 수 있다. (이 문장이 바로 이해가 가지 않는 친구들은 아래 문장을 통해 이해해보도록 하자.)

$\overline{AC}$의 길이를 t라 하자. $y=2^x$에서 점 C에서 점 B로 확대가 일어날 때 확대되는 비율은 2^{+t}이고 $y=1-2^{-x}$에서 점 A에서 점 D로 확대가 일어날 때 확대되는 비율은 $2^{-(-t)}$임을 알 수 있다.

설명의 편의를 위해 선분 $\overline{CD}$와 x축이 만나는 점을 E, 선분 $\overline{CD}$와 $y=1$이 만나는 점을 G, 선분 $\overline{AB}$와 x축이 만나는 점을 F, 선분 $\overline{AB}$와 $y=1$이 만나는 점을 H라 하자.



$y=2^x$에서 점 C에서 점 B로 확대가 일어날 때 점근선으로부터의 거리를 구해보자.
$\overline{CE}=\alpha$라 하면 점 C에서 점 B로 확대가 일어날 때
점근선으로부터 거리의 확대 비율은 $\times 2^{+t}$이므로 $\overline{BF}=\alpha\times 2^t$이 된다.
우리가 구하고자 하는 $\overline{AB}$는 $\overline{BF}-\overline{CE}=\alpha\times2^t-\alpha=\alpha(2^t-1)$이다.

$y=1-2^{-x}$에서 점 A에서 점 D로 확대가 일어날 때 점근선으로부터의 거리를 구해보자.
$\overline{AH}=\beta$라 하면 위와 같은 방식으로 구해보면 $\overline{DG}=\beta\times2^t$이다.
$\overline{CD}=\beta(2^t-1)$이므로

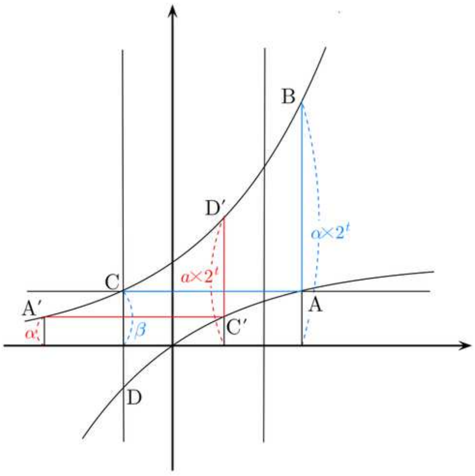
$$\overline{AB}=2\overline{CD}, \qquad \alpha(2^t-1)=2\times\beta(2^t-1)$$

이므로 $\alpha=2\beta$이고 $\alpha+\beta=1$이므로 $\alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=\frac{1}{3}$이 구해지며 풀이는 끝이 납니다.

이건 두 번째 레슨 : 두 함수 사이의 관계 파악하기

지수•로그함수의 그래프 문항에서 두 개 이상의 그래프가 등장한다면, **제시된 함수끼리 어떤 관계를 이루고 있는지에 주목하자.** 자세한 설명은 p.52를 참고하자.

다시 문제로 돌아와서 $y=2^x$와 $y=1-2^{-x}$는 서로 $(0,\frac{1}{2})$ 점대칭인 것을 알 수 있다. 두 그래프 중 $y=2^x$를 관찰하기가 더 쉽기 때문에 점 A와 점 D를 $(0,\frac{1}{2})$ 점대칭시키고 그때의 점을 각각 A', D'이라 하자.



$y=2^x$ 위에 점 A', C, D', B가 차례대로 있다. 네 점을 관찰했을 때 D'과 A'의 x좌표의 차와 B와 C의 x좌표의 차가 동일한 것을 쉽게 알 수 있다. (두 x좌표의 차의 크기를 t라 하자.)

앞에서 배운 개념을 떠올려보면 지수함수에서 x좌표의 차가 동일하다는 것은 y좌표의 확대•축소가 동일하다는 것을 의미한다.

점 A'의 y좌표를 α라 하면 점 D'의 y좌표는 $\alpha\times 2^t$이고
점 C의 y좌표를 β라 하면 점 B의 y좌표는 $\beta\times 2^t$이다.

선분 $\overline{CD}$의 길이는 D'의 y좌표와 A의 y좌표의 차와 동일하므로

$$\overline{CD}=\beta(2^t-1),\ \overline{AB}=\alpha(2^t-1)$$

이므로 $\alpha=2\beta$가 구해지며 풀이는 끝이 납니다.

이건 세 번째 레슨 : 평범한 생각

$\overline{AB}$와 $\overline{CD}$의 길이를 구하기 위해서 x좌표를 미지수로 설정하자.

두 점 A, B의 x좌표를 a라 하면
$A(a, 1-2^{-a}), B(a, 2^a)$이므로 $\overline{AB} = 2^a - (1-2^{-a}) = 2^a + 2^{-a} - 1$

두 점 C, D의 x좌표를 c라 하면
$C(c, 2^c), D(c, 1-2^{-c})$이므로 $\overline{CD} = 2^c - (1-2^{-c}) = 2^c + 2^{-c} - 1$

이때 두 점 A, C의 y좌표가 같으므로
$2^c = 1-2^{-a}$ 즉, $\overline{CD} = (1-2^{-a}) + \dfrac{1}{1-2^{-a}} - 1 = -2^{-a} + \dfrac{2^a}{2^{a-1}}$

주어진 조건에 의하여 $\overline{AB} = 2\overline{CD}$이므로
$2^a + 2^{-a} - 1 = -2^{-a+1} + \dfrac{2^{a+1}}{2^a - 1}$

여기서 $2^a = t$로 놓으면 $t + \dfrac{1}{t} - 1 = -\dfrac{2}{t} + \dfrac{2t}{t-1}$
양변에 $t(t-1)$을 곱하여 정리하면
$t^3 - 4t^2 + 4t - 3 = 0$, $(t-3)(t^2 - t + 1) = 0$
t는 실수이므로 $t = 3$
즉, $2^a = 3$이므로 $a = \log_2 3$
이때
$2^c = 1 - 2^{-1} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$
이므로
$c = \log_2 \dfrac{2}{3} = 1 - \log_2 3$
따라서 조건을 만족시키는 사각형$ABCD$의 넓이는

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \times (a-c) \times (2^a - 1 + 2^{-c}) \\
&= \frac{1}{2} \times (2\log_2 3 - 1) \times \left(3 - 1 + \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{7}{4}(2\log_2 3 - 1) \\
&= \frac{7}{2}\log_2 3 - \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

x좌표를 세팅하는 순간 삼차방정식이 나오면서 풀이가 어려워진다.

여기서 교점의 정보에는 x좌표 뿐만 아니라 y**좌표가 같다**는 정보를 포함하므로 점 A와 C의 y좌표를 α라 하자. 점 C와 D의 x좌표는 $\log_2\alpha$이고 점 A와 B의 x좌표는 $-\log_2(1-\alpha)$이다. $2\overline{CD}=\overline{AB}$이므로

$$2\left(\alpha-1+\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{1-\alpha}-\alpha$$

이를 통분하여 정리하면 $\alpha=\frac{2}{3}$임을 어렵지않게 알아낼 수 있다.

+ $\alpha=\frac{2}{3}$임을 구해도 풀이를 끝내지 못하는 학생들을 위해 . . .

$\alpha=\frac{2}{3}$이라는 값은 A좌표와 C좌표의 y**좌표의 값이** $\frac{2}{3}$**라는 정보**입니다.
그래프가 구해져 있고 그래프 위의 한 점에서 x값 혹은 y값 둘 중 한 정보만 있으면 그 점의 나머지 값을 알 수 있습니다. . .
점 A는 $y=1-2^{-x}$위의 점이므로 점 A의 x좌표는 $\frac{2}{3}=1-2^{-x}$, $x=\log_2 3$
점 C는 $y=2^x$위의 점이므로 점 C의 x좌표는 $\frac{2}{3}=2^x$, $x=1-\log_2 3$

점 A와 B의 x좌표가 같고, 점 C와 D의 x좌표가 같기 때문에 풀이는 끝이 납니다.