W

2027학년도 6월 워너비 모의고사 해설지

WONNIE

2027학년도 6월 고3 워너비 모의고사 해설

수학 영역

27학년도 고3 6월 학력평가 대비 워너비 모의고사 문제지로 인사드리게 된 원이입니다!

이번 6월 모의고사가 어떻게 나올지 모르니, 신선한 느낌을 주고자 작년 트렌드와 다르게 문항을 구성해봤습니다.

이번에는 3월 워너비보다는 어렵고, 5월 워너비와는 견줄만큼 어렵게 출제했습니다. 다만, 5월에서는 계산 위주의 고난도 문제가 다수 포진되어 있었다면, 이번에는 추론을 위주로 난이도를 높여보고자 했습니다. 특이사항이 있다면 공통에서 3점 문제는 3월 워너비, 5월 워너비에서 한 문제 정도는 탈 3점으로 만들었으나 이번 배포모에서는 전부 3점답게 출제했습니다.

공통 수1은 절대적 난이도는 어렵고, 체감 난이도가 많이 높았습니다.

10번까지는 매우 쉽게 출제하고자 기출 소재 그대로 출제하였습니다. 12번에 귀납적 정의가 나왔지만 볼륨이 큰 편이라 부담감이 상당히 컸을 거 같습니다. 다만 14번치곤 무난한 도형 문제로 한숨 돌리게 하도록 난이도를 조절했습니다. 20번으로 지수/로그 그래프 문제를 강등시켰고, 여태 출제한 워너비 모의고사 중 가장 쉽게 출제했습니다. 단, 22번은 역대 워너비 모의고사 중 가장 어렵게 출제하였고, 삼각함수가 출제 테마였던 점에서 많은 학생들이 푸는데 압박을 크게 느꼈을 거 같습니다.

공통 수2는 15번을 제외한다면 무난했습니다.

11번은 작년 기조를 따라 속도/가속도 합답형을 반영하였고, 9번, 21번 모두 기출에서 볼 수 있는 흔한 유형이므로 예상 정답률은 상당히 높을 것으로 예측됩니다. 단, 13번은 살짝 생소하게 느껴졌을 거 같고, 15번은 261121이랑 꼴이 비슷하다는 같은 느낌을 받으셨을 겁니다. 고1 수학과의 연계가 꽤나 짙고 숫자가 더러워 주관식으로 나왔으면 정답률이 매우 낮았겠지만 객관식으로 배치하여 찍기가 가능하도록 설계하여 정답률을 높이도록 했습니다.

확통 및 미적분은 절대적 난이도 및 체감 난이도는 많이 어려웠을 거 같습니다. 주요 문항 리뷰에서 따로 언급하도록 하겠습니다.

27학년도 수능을 응시할 현역, N수생 모두 성불하시길 기원합니다. 수이팅!

- 필적 문구는 '내 인생에 용기가 되어준 한마디 – 정호승'에서 가져왔습니다.

〈난이도 및 기준표〉

★☆☆☆☆: 공통 4점 초반 수준이며, 교과서 문항과 큰 괴리가 없는 난이도입니다.

★★☆☆☆: 공통 4점 중반 수준의 문제. 계산 혹은 발상 중 하나는 무거운 느낌이 들 수 있습니다.

★★★☆☆: 준킬러 수준의 문제입니다. 2등급을 변별하는 난이도로, 1등급들도 심리적 부담을 받는 문제입니다.

★★★★☆: 킬러 수준 중 쉬운 축에 속하는 문제입니다. 1등급도 충분히 틀릴 수 있는 문항입니다.

★★★★★: 킬러 수준 중 어려운 축에 속하는 문제입니다.

<주요 문항 간단 리뷰>

11번: 합답형이지만, 기출보다 살짝 무겁습니다.
12번: 흔한 역추적 문제로, 경우가 적어 쉬웠습니다.
13번: 접하는 상황을 항상 유의합시다. 보기보다 매우 단순합니다.
14번: 도형 문제지만, 상황은 단조롭게 출제하였습니다.
15번: 26학년도 수능 21번을 반영했습니다. (가) 조건은 매우 단순하나, (나) 조건을 해석하는 방식에서 고1 수학이 딥하게 들어갔습니다.
20번: 확대/축소를 첨가하여 삼각형의 꼴이 어떻게 생겼는지 조금만 관찰하면 매우 쉽게 풀 수 있습니다.
21번: 전형적인 미분가능성 문제로, 과하지 않은 계산으로 객관식에서의 중압감을 여기서 해소하고자 했습니다.
22번: 제약 조건이 많고 발문이 길어서 상당히 비호로 느껴질 수 있는 최고난도 문제입니다. 해당 문제를 어떻게 해석해야 할지 이번 기회를 통해 한 수 배워갑시다.
확28번: 흔한 소재로 구성하였습니다. 고려해야 할 경우의 수가 많아 실수가 유발되기 쉬운 문항으로 제대로 계산하지 않는다면 의문사 하기 좋은 문항입니다.
확29번: 문제 길이 자체가 길고, 조건을 어떻게 해석하냐가 문제를 푸는데에 있어 가장 중요한 분기점입니다. 두 조건이 독립관계임을 어떻게 문제 풀이를 사용되는지 한 번 생각해보셨으면 좋겠습니다.
확30번: 절댓값들의 합이 일정하다는게 무슨 아이디어일지 생각만 하면 쉬운 문항입니다. 그러나 무작정 나열하면 틀리기 쉬운 문항이였습니다.
미28번: 초월함수의 미분법과 합성함수의 극한을 결합한 문항입니다. (나) 조건의 극한 수렴 조건을 해석할 때 고1 수학의 이차방정식 성질을 쓰지 못하면 막히기 쉬운 문제입니다.
미29번: 급수의 수렴성 개념을 정확하게 알고 있는지 묻고자 출제하였습니다. 단순 계산을 넘어서, 여러분이 급수에 대한 이해가 제대로 되었는지 확인해 볼 수 있는 기회가 되면 좋겠습니다.
미30번: 요즘 흔하게 나온 항등식 문제처럼 보이지만, 부등식 해석이 관건인 문제였습니다. 아직까지 수능에 잘 활용되지 않은 소재를 케이스 분류에 활용한 많이 어려운 문제입니다.

1. ☆☆☆☆☆

$2^{\log_2 9}=9$이므로 $\dfrac{2^{\log_2 9}}{3}=\dfrac{9}{3}=3$

2. ☆☆☆☆☆

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $f'(x)=3x^2+2x-6$이므로
$f'(2)=12+4-6=10$

3. ☆☆☆☆☆

$\sum_{k=1}^{3}(a_{k+1}-a_k)=a_4-a_1=a_4-2=5$이므로 $a_4=7$

4. ☆☆☆☆☆

극한값이 상수 b로 수렴해야 한다. 분모가 0으로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴해야 한다. 따라서 $a=3$이다. 극한값을 계산하면

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}=\frac{1}{6}$$

이므로 $b=\dfrac{1}{6}$이다. 따라서 $a+b=\dfrac{19}{6}$임을 얻는다.

5. ☆☆☆☆☆

좌변은 $x=1$을 대입했을 때 0이므로 우변에 $x=1$을 대입했을 때도 0이어야 한다. 따라서

$$2-4+a=0 \to a=2$$

임을 얻는다. 양변을 미분하면 $f(x)=6x^2-8x$이므로
$f(a)=f(2)=24-16=8$임을 얻는다.

6. ☆☆☆☆☆

각변환에 의해 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta=\dfrac{3}{5}$이다. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 이용하면 $\sin^2\theta=\dfrac{16}{25}$이다. 각 θ는 코사인의 값이 양수이므로 제4사분면에 위치한다. 따라서 $\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$임을 얻는다.

따라서 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{4}{3}$임을 얻는다.

7. ☆☆☆☆☆

함수 $f(x)$가 연속이므로 $a-3=\dfrac{4}{a} \to a^2-3a=4$이다. (단, $a\neq0$) 4를 좌변으로 넘겨 인수분해를 하면
$(a+1)(a-4)=0$이므로 $a=-1$ 또는 $a=4$이다. 허나, 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 분수함수 $\dfrac{4}{x}$는 함수의 구조상 $x>0$에서만 정의되어야 한다. 따라서 $a=4$임을 얻는다.

8. ☆☆☆☆☆

$n^2-9n+18=(n-3)(n-6)$이므로 $f(3)=f(5)=f(7)=1$이다.

$f(2)=f(8)=2$이고, $f(4)=0, f(6)=1$이므로

$\sum_{n=2}^{8}f(n)=8$임을 얻는다.

9. ★☆☆☆☆

원점을 지난다 했으므로 $f(0)=0$이다. 따라서 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 $f(x)=ax$이다. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)-x^2}{ax}$의 값이 0이려면 분모의 최고차수가 분자의 최고차수가 커야 한다. 따라서 $g(0)=b$라 하면 $g(x)=x^2+b$라 둘 수 있다.

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-f(x)}{(x-1)(x+1)}=0$$

이 되려면 분자의 인수의 개수가 분모의 인수의 개수보다 많아야 하므로 $g(x)-f(x)=(x-1)^2$이다.

$$g(x)-f(x)=x^2-ax+b=x^2-2x+1$$

이므로 $a=2, b=1$이다. 따라서 $f(2)\times g(3)=4\times10=40$임을 얻는다.

10. ★☆☆☆☆

괄호 안의 수열의 합이 상수항이 없는 이차식이므로 괄호 안의 수열은 등차수열이다. 따라서 $a_n + b_n = 2n + 5$이고 공차가 같으므로 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차는 모두 1이다.

$a_2 - b_5 = a_2 - b_2 - 3 = 1$이므로 $a_2 - b_2 = 4$이다. $a_2 + b_2 = 9$이므로 $a_2 = \frac{13}{2}$, $b_2 = \frac{5}{2}$이다. $a_3 = \frac{13}{2} + 1 = \frac{15}{2}$, $b_4 = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2}$이므로 $a_3 \times b_4 = \frac{135}{4}$임을 얻는다.

11. ★☆☆☆☆

속도 $v(t)$를 전개하면 $v(t) = t^2 - (x(2)+2)t + 2x(2)$이므로 $x(2) = k$라 치환하고 적분하면 위치 $x(t)$는

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{(k+2)t^2}{2} + 2kx + c \ (c\text{는 적분상수})$$

이다. $x(2) = \frac{8}{3} - 2(k+2) + 4k + c = k$여야 하므로 $c = -k + \frac{4}{3}$이다.

ㄱ. $v(2) = 0$은 대입하여 확인할 수 있다. (참)

ㄴ. 운동 방향이 바뀌지 않으려면 $x(2) = 2$인 경우뿐이다. 따라서 $k = 2$이고

$$x(4) = \frac{64}{3} - 8(k+2) + 8k + c = \frac{64}{3} - 16 - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

임을 얻는다. (참)

ㄷ. 운동 방향이 한 점에서만 바뀌려면 ㄴ에서 확인할 수 있듯이 $x(2) \neq 2$이므로 $t = 2$에서만 위치가 바뀐다. 따라서 고1 수학의 이차함수 개념을 생각하면 $x(2) \leq 0$임을 얻을 수 있다. 따라서 $k \leq 0$이므로 $c = -k + \frac{4}{3} \geq \frac{4}{3}$임을 얻는다. (참)

12. ★★☆☆☆

(1) $a_3 > a_4$인 경우

$a_5 = 2a_4$이고 $a_3 = a_5$을 충족시키려면 $a_4 = \frac{1}{2}a_3$이다. $a_2 \leq a_3$일 때만 가능하며 이때 $a_4 = 3(a_3 - a_2)$이므로 정리하면 $a_3 = \frac{6}{5}a_2$이다. $a_1 \leq a_2$일 때만 가능하며 $a_3 = 3(a_2 - a_1)$에 대입하면 $3a_2 = 5a_1$에서 가능한 a_1은 $3, 6$임을 얻는다.

(2) $a_3 \leq a_4$인 경우

$a_5 = 3(a_4 - a_3)$이고 $a_3 = a_5$을 충족시키려면 $a_4 = \frac{4}{3}a_3$이어야 한다. $a_2 \leq a_3$일 때만 가능하고 이때 $a_4 = 3(a_3 - a_2)$이다. 두 식을 연립하면 $a_3 = \frac{9}{5}a_2$임을 얻는다. $a_1 \leq a_2$일 때만 가능하고 $a_3 = 3(a_2 - a_1)$이므로 이를 정리하면 $2a_2 = 5a_1$임을 얻는다. 따라서 가능한 a_1은 $2, 4$임을 얻는다.

이를 모두 더하면 $2 + 4 + 3 + 6 = 15$임을 얻는다.

13. ★★☆☆☆

(나) 조건부터 살펴보자. 함수 $h(x)$를

$$h(x) = \int_a^x \big(g(t) - (t+2)\big)dt$$

라 할 때, $h(a) = 0$이 확정된다. 함수 $h(x)$를 미분하면

$$h'(x) = g(x) - (x+2)$$

임을 얻는다. 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$와 직선 $y = x + 2$ 중 큰 것을 채택하는 구조이므로 $f(x) < x + 2$인 경우 $h'(x) = 0$이고 $f(x) \geq x + 2$인 경우 $g(x) \geq 0$이다. x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 1이려면 $f(a) \geq a + 2$여야 한다. (가) 조건과 결합하면 $f(a) = a + 2$임을 얻을 수 있다. 그런데 함수 $f(x)$가 직선 $y = x + 2$을 통과하여 지나가는 경우 좌측 혹은 우측에서 함수 $h(x)$가 상수함수인 구간이 나타난다. 접해야 하므로 $f'(a) = 1$이어야 한다. $f(-2) = 0$이므로 $f(x) - (x+2) = (x+2)(x-a)^2 = (x+2)(x-2)^2$이다. 따라서 $f(4) = 30$임을 얻는다.

14. ★★★☆☆

점 D에서 점 E를 잇는 선분 DE를 작도하고, 점 A와 점 D를 잇는 선분 AD를 작도하자. 선분 CD가 원 O_1의 지름이므로 원주각 성질에 의해 각 DEC가 직각이다. 선분 AE의 길이와 선분 CE의 길이가 같으므로 삼각형 AED와 삼각형 CDE는 합동인 삼각형이다. 따라서 선분 AD의 길이와 선분 CD의 길이는 같다. 선분 AD의 길이가 6이므로 원 O_1의 반지름은 3이다. 따라서 삼각형 CDE에서 피타고라스의 정리를 이용하면 $\overline{\mathrm{DE}}=2\sqrt{5}$임을 얻는다. 먼저 원 O_2의 반지름을 구해보자.

삼각형 ABC에서 코사인 법칙을 적용해보자.

$\sin(\angle\mathrm{ECD})=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$이므로 $\cos(\angle\mathrm{ECD})=\dfrac{2}{3}$이다. 이를 이용하면

$$7^2=8^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-16\overline{\mathrm{BC}}\cos(\angle\mathrm{ECD}) \rightarrow \overline{\mathrm{BC}}^2-\frac{32}{3}\overline{\mathrm{BC}}+15=0$$

이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=9$ 또는 $\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{5}{3}$이다. 선분 CD의 길이가 6이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=9$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{BD}}=3$이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙을 사용하면 $7^2=6^2+3^2-36\cos(\angle\mathrm{ADB})$이므로 $\cos(\angle\mathrm{ADB})=-\dfrac{1}{9}$이다. 따라서 $\sin(\angle\mathrm{ADB})=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$이다.

$\sin(\angle\mathrm{ECD})=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$이므로 $\sin(\angle\mathrm{ADP})=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$이다. 따라서 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin(\angle\mathrm{ADP})}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{ADB})}=\frac{63}{4\sqrt{5}}$$

에서 $\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{63}{4\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{21}{4}$임을 얻는다.

15. ★★★★☆

함수 $g(x)$가 연속이 되도록 하는 실수 t에 대하여

$$-f(t)=f(t)-f(0) \rightarrow f(t)=\frac{f(0)}{2}$$

임을 얻는다. 이 방정식을 만족시키는 실수 t의 개수가 2이므로 한 근에서는 접하며, 한 근에서는 뚫고 만나는 형태임을 알 수 있다.

두 근의 합이 0이므로 각각의 근을 $-a, a$(a는 상수)라 하자. 함수 $f(x)$는

$$f(x)-\frac{f(0)}{2}=(x+a)^2(x-a)$$

이므로 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x-2a^3$이다. 이차항의 계수가 정수이므로 a는 정수임을 얻고 출발하자.

또한 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} -x^3-ax^2+a^2x+2a^3 & (x<t) \\ x(x^2+ax-a^2) & (x\ge t)\end{cases}$$

이므로 (나) 조건에서 실근의 개수가 2가 되도록 t를 조절해야 한다.

(1) $x<t$일 때의 $g(x)$

$g(x)=0$의 실근을 구하는 건 $f(x)=0$의 실근을 구하는 것과 같다. $f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(3x-a)(x+a)$이므로 $x=-a, \dfrac{a}{3}$에서 극값을 가지며 $f(-a)=-a^3, f\left(\dfrac{a}{3}\right)=-\dfrac{59}{27}a^3$이다.

a의 부호와 관계없이 극댓값과 극솟값 간 부호가 같으므로 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. 따라서 (2)의 상황과 종합하여 부호를 확정지어야 한다.

(2) $x\ge t$일 때의 $g(x)$

$g(x)=0$의 실근의 후보는 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{a(-1\pm\sqrt{5})}{2}$이다.

만약 $a>0$이라면 $f(x)=0$의 실근은 하나만 가지나 그 하나가 a보다 크다. 두 개가 형성되는 경우는 $t=0$에서 확정이므로 3개여야 한다는 조건에 따라 $t=0, -1, -2$여야 한다. -3에서 끊기려면 $\dfrac{a(-1-\sqrt{5})}{2}$이 -3이상 -2미만이어야 한다. 따라서

$$-3\le\frac{a(-1-\sqrt{5})}{2}<-2 \rightarrow 4<a(1+\sqrt{5})\le 6$$

이때 정수인 a는 존재하지 않으므로 탈락이다. 따라서 $a<0$

$a<0$일 때 $f(x)=0$의 실근이 a보다 왼쪽에 있다.

따라서 t가 a보다 오른쪽에 있으면 반드시 (1)에서의 근이 하나 생긴다. $f(p)=0\,(p<a)$라 할 때, $t\le p$라면 (1)에서 근을 가지지 않는다. 그런데 (2)를 자세히 보면 $a<\dfrac{a(-1+\sqrt{5})}{2}<0$이므로 $t\le p$일 때 오른쪽 부분의 근의 개수가 3개나 추가되므로 2개가 될 수 없다. $t>p$가 되어 (1)에서 근을 갖는 경우

$0<t\le\dfrac{a(-1-\sqrt{5})}{2}$ 사이에 있어야 근이 2개가 되어 충족시킨다. 두 개가 형성되는 경우는 $t=1$부터 가능하니 3개여야 한다는 조건에 따라 $t=1, 2, 3$에서만 가능하므로 $3\le\dfrac{a(-1-\sqrt{5})}{2}<4$이다. 이때 정수인 a는 $a=-2$뿐이므로

$f(x)=x^3-2x^2-4x+16 \quad \therefore f(3)=13$임을 얻는다.

16. ☆☆☆☆☆

$a_2 \times a_6=(a_4)^2=16$이므로 공비 조건에 의해 $a_4=4$이다. 따라서 공비를 r이라 하면 $r^3=4$이므로 $a_{10}=r^9=64$이다.

17. ☆☆☆☆☆

$F(x)=2x^3+2x+3$이므로 $F(2)=23$임을 얻는다.

18. ☆☆☆☆☆

$x>4$일 때 $\log_2(x-4)=\log_4(x-4)^2$이므로 $(x-4)^2=x+2$이다. 따라서 $x^2-9x+14=(x-2)(x-7)=0$에서 $x=7$임을 얻는다.

19. ☆☆☆☆☆

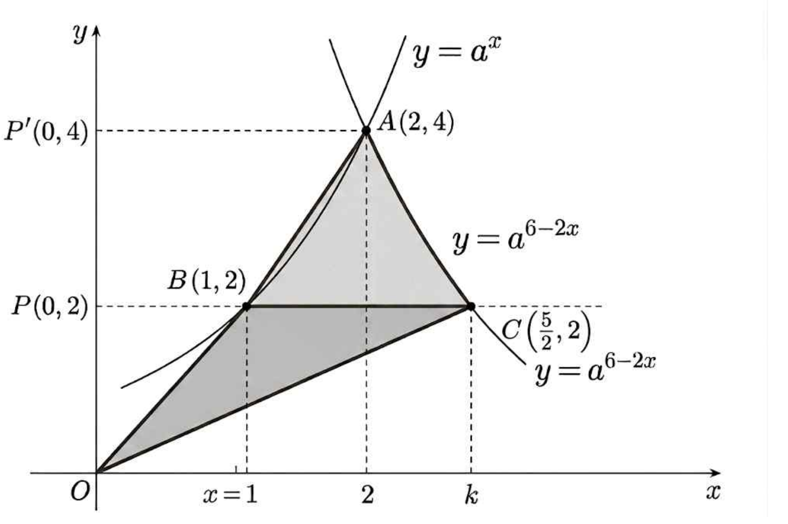
함수 $f(x)$를 $f(x)=x(ax+b)$이다. $x=3$에서 극값을 가지므로 $g'(3)=0$이다. 따라서

$$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)=2x^2(ax+b)+x^2(2ax+b)$$

$g'(3)=9(6a+2b+6a+b)=0$에서 $b=-4a$임을 얻는다.
$g(3)=9f(3)=9$이므로 $f(3)=1$이다. 따라서
$f(3)=-3a=1$에서 $a=-\dfrac{1}{3}$임을 얻는다. 따라서
$f(5)-g(5)=-24f(5)=40$임을 얻는다.

20. ★★☆☆☆

해당 문제의 상황은 다음 그림과 같다.



점 B의 좌표와 점 C의 좌표가 다음 그림과 같아야 하므로 $a=2, k=\dfrac{5}{2}$이다. 따라서 $a^{2k}=2^5=32$임을 얻는다.

21. ★★☆☆☆

$x \neq a$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\frac{x|x-a+f(x)|}{|x-a|}$$

이다. 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 정의되는게 우선이다. 따라서 분자가 0으로 수렴해야 한다. 따라서 $f(a)=0$이다. (나) 조건에 의해 $g(a)=-3$이므로 극한값이 -3으로 수렴해야 한다. 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-a)(x^2+bx+c)$라 하면

$$\lim_{x\to a}\frac{x|(x-a)(x^2+bx+c+1)|}{|x-a|}=\lim_{x\to a}x|(x^2+bx+c+1)|=-3$$

이다. 또한, $x=2$에서 미분이 가능하지 않으려면 첨점이 생기는 경우뿐이다. $g(a)$의 값이 0이 아니므로 $a \neq 2$이다. 앞에서 정리했듯이 $g(x)=x|x^2+bx+c+1|$이므로 $x=2$에서만 미분가능하지 않으려면 절댓값 안의 함수가 원점을 지나야 한다. 이를 종합하면 $b=-2, c=-1$임을 얻는다. 따라서 $a|(a^2-2a)|=-3$에서 $a<0$이므로 절댓값은 벗길 때 부호의 변화가 없다. 따라서 $a^3-2a^2+3=0$이고 해는 $a=-1$이다.

따라서 $f(a+4)=4(9-6-1)=8$임을 얻는다.

22. ★★★★★

구체적인 박스 조건부터 확인해보자. $\frac{\pi}{3} \le x < \frac{\pi}{2}$에서 방정식 $-2\cos 3x = 1$의 해를 구하기 위해 정리하면 $\cos 3x = -\frac{1}{2}$이다. 따라서 해당 방정식의 해는 $x = \frac{4}{9}\pi$이다. 서로 다른 점의 개수가 3이고 그 점들의 x좌표의 합이 $\frac{14}{9}\pi$이므로 나머지 두 점의 x좌표의 합은 $\frac{10}{9}\pi$임을 얻을 수 있다. 삼각함수는 언제나 대칭성이 제1순위이므로 대칭성을 이용하여 나머지 두 점의 x좌표의 평균은 $\frac{5}{9}\pi$임을 얻을 수 있다. 따라서 $\left|\cos\left((2n-1)\frac{5}{9}\pi\right)\right| = 1$임을 얻고 모든 후보는 $(2n-1)\frac{5}{9}\pi = k\pi$ (k는 자연수)임을 얻는다. $k=5$일 때 약분되므로 $2n-1=9$에서 $n=5$임을 얻을 수 있다. 나머지 경우는 n의 값이 10을 초과하므로 불가능하다. 이제 $g(x)=1$의 실근을 구체적으로 찾아 M의 범위를 찾아보자. $\cos 9x = -\frac{1}{2}$의 두 실근은 $\frac{14}{27}\pi$, $\frac{16}{27}\pi$이고 M을 초과한 범위에서 가장 작은 실근은 $\frac{20}{27}\pi$이다. 따라서 $\frac{16}{27}\pi \le M < \frac{20}{27}\pi$임을 얻는다.

함수 $f(x)$의 최댓값이 2가 되려면 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{3}, M\right]$에서 $|\sin(ax+\alpha)| \le \frac{1}{2}$이어야 한다. 사인함수의 절댓값이 $\frac{1}{2}$ 이하로 유지되는 구간의 최대 길이는 $\frac{\pi}{3}$이므로 $\left(M - \frac{\pi}{3}\right) \le \frac{\pi}{3a}$이어야 한다. 앞에서 $M \ge \frac{16}{27}\pi$라 했으므로 대입하면 $\frac{7}{27}\pi \le \frac{\pi}{3a}$임을 얻는다. 따라서 이를 충족시키는 자연수 a의 값은 1뿐이다.

$a=1$일 때 부등식 $f(x) \le 2$을 만족하는 연속하는 x의 구간의 길이의 최댓값은 $\frac{\pi}{3}$이다. 따라서 $M - \frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{3}$에서 $M \le \frac{2}{3}\pi$이다. 따라서 종합하면 $\frac{16}{27}\pi \le M \le \frac{2}{3}\pi$이다. 또한 $x=M$일 때 $f(M)=2$이므로 $M+\alpha = \frac{\pi}{6}+p\pi$ (p는 정수)이다. 문제의 $0<\alpha<\pi$ 조건을 만족하려면 $p=1$이 되어야 하므로 정리하면 $\alpha = \frac{7}{6}\pi - M$이다. 따라서 $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{31}{54}\pi$이다.
$\frac{1}{2}+\frac{31}{54}=\frac{29}{27}$이므로 $p+q=27+29=56$임을 얻는다.

확23. ☆☆☆☆☆

6개의 문자 a, a, b, b, c, c중에서 세 문자 a, b, c가 각각 2개씩 있으므로 이 6개의 문자를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$이다.

확24. ☆☆☆☆☆

두 사건이 서로 배반 사건이므로
$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{3}{4}$이 성립한다.
$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) + \frac{1}{4}$에서 $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) - \frac{1}{4}$를 얻는다. 즉 $2\mathrm{P}(A) - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$이므로 $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$이다.

확25. ☆☆☆☆☆

전체 경우의 수는 ${}_{10}C_5 = 252$가지이다. 초콜릿의 수가 0개일 때, 사탕은 최소 1개가 있어야만 하므로 가능한 경우의 수는 ${}_3C_0 \times ({}_3C_1 \times {}_4C_4 + {}_3C_2 \times {}_4C_3 + {}_3C_3 \times {}_4C_2) = 21$가지이다.
초콜릿의 수가 1개일 때, 사탕은 최소 2개가 있어야만 하므로 가능한 경우의 수는
${}_3C_1 \times ({}_3C_2 \times {}_4C_2 + {}_3C_3 \times {}_4C_1) = 66$가지이다. 초콜릿의 수가 2개일 때, 사탕은 반드시 3개여야만 하므로 가능한 경우의 수는 ${}_3C_2 \times {}_3C_3 \times {}_4C_0 = 3$가지이다. 따라서 가능한 모든 경우의 수는 $21+66+3=90$가지이므로 구하고자 하는 확률은 $\frac{90}{252} = \frac{5}{14}$임을 얻는다.

확26. ☆☆☆☆☆

A, B가 같은 변에 앉아야 하므로 A, B가 앉을 변을 고르는 방법은 총 4가지이다. 이때, 각 변마다 좌석이 2가지가 있으므로 A, B를 배치하는 경우의 수는 $2! = 2$이다. 따라서 A, B를 배치하는 경우의 수는 $4 \times 2 = 8$가지이다. 아무런 조건 없이 남은 6개의 자리중 2개의 자리를 구하는 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$가지이다. 이때, 남은 3개의 변에는 각각 좌석이 2개씩 있으므로 운이 나쁘면 한 변 위에 빈 좌석이 2개가 있을 수 있으므로 이를 빼줘야 한다. 즉, 남은 변의 개수인 3만 빼주면 된다. 따라서 빈 좌석 2개가 서로 다른 변위에 있는 경우의 수는 $15-3=12$가지이다. 나머지 학생을 배치하는 방법은 $4!$이고, 정사각형 탁자이므로

회전해서 같은 배치는 총 4번씩 있다. 따라서 구하고자 하는

경우의 수는 $\dfrac{12\times 24\times 4!}{4!}=576$임을 얻는다.

확27. ★★☆☆☆

$f(n)$을 구해보자. 빵이 n개 있을 때, 그 중 k개의 빵을 사는 방법은 ${}_nC_k$이고, 그때마다 쿠키를 k^2개씩 받으니 가능한 모든 방법에 대해 쿠키 개수를 더하면 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}k^2{}_nC_k$이다.

$k^2=k(k-1)+k$이므로 $f(n)=\sum_{k=1}^{n}k\times{}_nC_k+\sum_{k=1}^{n}k(k-1)_nC_k$를 얻는다.

$i)$ $\sum_{k=1}^{n}k\times{}_nC_k$

$k\times{}_nC_k=k\times\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$이고, 임의의 자연수 r에 대해 $r!=r(r-1)!$이므로

$k\times\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}=\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=n\times\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=n\times{}_{n-1}C_{k-1}$

를 얻는다. 따라서

$\sum_{k=1}^{n}k\times{}_nC_k=n\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}C_{k-1}=n\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}C_k=n\times 2^{n-1}$

$ii)$ $\sum_{k=1}^{n}k(k-1)_nC_k$

$k\times{}_nC_k=k\times\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$이고, 임의의 자연수 r에 대해 $r!=r(r-1)(r-2)!$이므로

$$k(k-1)\times\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}$$
$$=n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}=n(n-1)_{n-2}C_{k-2}$$

를 얻는다. 또한, $k=1$일 때, $k(k-1)=0$이므로 첫 항이 0이 된다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{n}k(k-1)_nC_k=n(n-1)\sum_{k=2}^{n}{}_{n-2}C_{k-2}=n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}{}_{n-2}C_k$$
$$=n(n-1)2^{n-2}$$

i, ii에 의해 $f(n)=n(n+1)2^{n-2}$이므로

$\dfrac{2^n}{f(n)}=\dfrac{4}{n(n+1)}=4\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10}\dfrac{2^n}{f(n)}=4\sum_{n=1}^{10}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=4\left(1-\dfrac{1}{11}\right)=\dfrac{40}{11}$임을 얻는다.

확28. ★★★☆☆

한 번의 시행에선 홀수 자리만 뒤집거나, 짝수 자리만 뒤집게 된다. 즉, 가능한 뒤집힘을 홀수 자리와 짝수 자리로 정리하면 다음과 같다.

뒤집히는 동전	가능한 (a, b)	개수
1	$(1,2)$	1
1, 3	$(1,3)$, $(1,4)$	2
1, 3, 5	$(1,5)$, $(1,6)$	2
3	$(3,4)$	1
3, 5	$(3,5)$, $(3,6)$	2
5	$(5,6)$	1

뒤집히는 동전	가능한 (a, b)	개수
2	$(2,3)$	1
2, 4	$(2,4)$, $(2,5)$	2
2, 4, 6	$(2,6)$	1
4	$(4,5)$	1
4, 6	$(4,6)$	1

특정 순서쌍이 나올 확률은 $\dfrac{1}{{}_6C_2}=\dfrac{1}{15}$이고, 3번의 시행 이후 모두 같은 면이 놓여질 사건을 A, 동전이 모두 앞면인 사건을 B라고 하면 구하고자 하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다. 모두 앞면이 되기 위해서는 처음에 뒷면이던 4, 5, 6번만 홀수 번 뒤집혀야 하므로 홀수 자리에선 5번, 짝수 자리에선 4, 6번만 최종적으로 뒤집힌 상태가 되어야한다. 반대로 모두 뒷면이 되려면 처음에 앞면이던 1, 2, 3번만 홀수 번 뒤집혀야 한다. 따라서 홀수 자리에선 1, 3번만, 짝수 자리에선 2번만 뒤집혀야 한다. 따라서 모든 경우에서 홀수 자리만 뒤집히거나, 짝수 자리만 뒤집혀서는 조건을 만족할 수 없다.

I) 모두 앞면이 될 때

i) 3번의 시행 중 홀수 자리 시행이 1번, 짝수 자리 시행이 2번일 때

홀수 자리 시행 1번만으로 5번이 뒤집히는 경우는 1가지이고, 짝수 자리 시행 2번으로 4, 6번이 뒤집히려면 2번만 뒤집히는 경우와 2, 4, 6번이 모두 뒤집히는 경우가 각각 1번씩 나와야된다. 따라서 이 경우는 $3!=6$가지

ii) 3번의 시행 중 홀수 자리 시행이 2번, 짝수 자리 시행이 2번일 때

짝수 자리 시행 1번만으로 4, 6이 뒤집히는 경우는 1가지이고, 홀수 자리 시행 2번으로 5번만 남으려면 1, 3번이 뒤집히는 경우와 1, 3, 5번이 뒤집히는 경우가 각각 1번씩 나오거나 3번이 뒤집히는 경우와 3, 5번이 뒤집히는 경우가 각각 1번씩 나와야 한다. 첫 번째 경우는 가능한 경우의 수가 각각 2가지 씩이고, 2번째 경우는 가능한 경우의 수가 차례대로 2가지, 1가지이다. 따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $3!\times(2\times2+2\times1)=36$가지

i, ii에 의해 구하고자 하는 경우의 수는 $6+36=42$가지이고, 모두 뒷면일 확률은 $42\times\left(\frac{1}{15}\right)^3$이다.

II) 모두 뒷면이 될 때

i) 3번의 시행 중 홀수 자리 시행이 1번, 짝수 자리 시행이 2번일 때

홀수 자리 시행 1번만으로 1, 3이 뒤집히는 경우는 2가지이고, 짝수 시행 2번으로 2번으로 2번만 남으려면 2, 4번과 4번이 뒤집히는 경우가 각각 1번씩 나오거나 2, 4, 6번이 뒤집히는 경우와 4, 6번이 뒤집히는 경우가 각각 1번씩 나와야 한다. 첫 번째 경우는 가능한 경우의 수가 각각 2가지이고, 두 번째 경우는 가능한 경우의 수가 각각 1가지씩이다. 따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $3!\times2\times(2\times1+1\times1)=36$가지

ii) 3번의 시행 중 홀수 자리 시행이 2번, 짝수 자리 시행이 2번일 때

짝수 자리 시행 1번만으로 2번이 뒤집히는 경우는 1가지이고, 홀수 자리 시행 2번으로 1, 3번만 남으려면 1번이 뒤집히는 경우와 3번이 뒤집히는 경우가 각각 1번씩 나오거나, 1, 3, 5번과 5번이 뒤집히는 경우가 각각 1번씩 나오면 된다. 첫 번째 경우는 가능한 경우의 수가 각각 1가지씩이고, 두 번째 경우는 가능한 경우의 수가 차례대로 2가지, 1가지 씩이다. 따라거 구하고자 하는 경우의 수는 $3!\times(1\times1+2\times1)=18$가지

i, ii에 의해 구하고자 하는 경우의 수는 $36+18=54$가지이고, 모두 뒷면일 확률은 $54\times\left(\frac{1}{15}\right)^3$이다.

I, II에 의해 $\mathrm{P}(A)=(42+54)\times\left(\frac{1}{15}\right)^3$이고, 사건 $A\cap B$는 I에 해당되기 때문에 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{42\times\left(\frac{1}{15}\right)^3}{96\times\left(\frac{1}{15}\right)^3}=\dfrac{7}{16}$임을 얻는다.

확29. ★★★★☆

꺼낸 세 숫자를 작은 순서대로 $a<b<c$라 하자. 이때 B 상자에서 꺼낸 숫자는 a, b, c 중 하나이다. B 상자에서 a가 나오면 $n=1$, b가 나오면 $n=2$, c가 나오면 $n=3$이다. 세 숫자를 하나 정하면, B 상자에서 나온 숫자가 가장 작은 수, 두 번째로 작은 수, 가장 큰 수인 경우가 각각 하나씩 생기므로 $n=1, 2, 3$인 확률은 같다. 따라서

$$\mathrm{P}(n=1)=\mathrm{P}(n=2)=\mathrm{P}(n=3)=\frac{1}{3}$$

이다.

동전을 던졌을 때의 결과는 독립이고, 각 시행에서 앞면과 뒷면이 나올 확률이 각각 $\frac{1}{2}$이므로 꺼낸 공이 흰 공과 검은 공일 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이다. 이제 꺼낸 세 공 중 흰 공의 개수를 Q라 하자.

I) $Q=1$
흰 공이 1개일 확률은 세 공 중 흰 공이 될 공을 1개 고르고, 나머지 2개의 공은 검은 공이면 되므로

$$\mathrm{P}(Q=1)={}_3C_1\times{}_2C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$$

II) $Q=2$
흰 공이 2개일 확률은 세 공 중 흰 공이 될 공을 2개 고르고, 나머지 1개의 공은 검은 공이면 되므로

$$\mathrm{P}(Q=2)={}_3C_2\times{}_1C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$$

III) $Q=3$
흰 공이 3개일 확률은 세 공 모두 흰색이면 되므로

$$\mathrm{P}(Q=3)={}_3C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

구하고자 하는 것은 $Q=n$일 확률이므로 $n=i$이고, $Q=i$일 확률을 모두 더해야 된다. 이때, n은 꺼낸 숫자의 크기에 의해 결정되고, Q는 공의 숫자에 의해 결정되므로 두 조건은 독립적으로 계산할 수 있다. 따라서

$$\mathrm{P}(Q=n)=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{P}(n=i)\mathrm{P}(Q=i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{24}$$

이다. 따라서 $p=24$, $q=7$이므로 $p+q=31$을 얻는다.

확30. ★★★★☆

조건 (나)에서 가능한 $\left(f(1), f(6)\right)$의 순서쌍은 $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$이다. 또한 조건 (가)에 있는 $f(k+1)-f(k)$를 d_k로 정의하자. $(k=1, \cdots, 5)$

I) $(f(1), f(6))=(1,6)$
처음 값이 1, 마지막 값이 6이므로 전체 증가량은 5이다. 그런데, 조건 (가)에서 전체 변화량의 절댓값도 5이므로 $f(x)$는 단조 증가 함수이다. 따라서 $d_1+d_2+d_3+d_4+d_5=5$이고, 모든 d_i에 대해 $d_i \geq 0$이다. 즉, 구하고자 하는 경우의 수는
${}_5H_5={}_9C_4=126$이다.

II) $(f(1), f(6))=(2,5)$
처음 값이 2, 마지막 값이 5이므로 전체 증가량은 3이다. 그런데, 조건 (가)에서 전체 변화량의 절댓값은 5이다. 따라서 증가한 양의 총합은 4, 감소한 양의 총합은 1이다. 즉, d_i중 하나는 -1이고, 나머지 4개의 d_i의 합은 4이다. $d_i=-1$을 만족시키는 i를 고르는 경우의 수는 5가지이다. 또한 나머지 4개의 d_i의 합은 4이므로 $y_1+y_2+y_3+y_4=4$이고, 모든 $y_i \geq 0$인 해의 개수와 같다. 즉 구하고자 하는 경우의 수는
$5\times{}_4H_4=5\times{}_7C_3=35$

III) $(f(1), f(6))=(3,4)$
처음 값이 3, 마지막 값이 4이므로 전체 증가량은 1이다. 그런데, 조건 (가)에서 전체 변화량의 절댓값은 5이다. 따라서 증가한 양의 총합은 3, 감소한 양의 총합은 2이다. 즉, d_i중 2개가 -1이고, 나머지 3개의 d_i의 합이 3이거나, d_i중 하나가 -2이고, 나머지 4개의 d_i의 합이 3이다.

i) 하나의 d_i에 대하여 $d_i=-2$
$d_i=-2$를 만족시키는 i를 고르는 경우의 수는 5가지이다. 또한 나머지 4개의 d_i의 합은 3이므로 $y_1+y_2+y_3+y_4=3$이고, 모든 $y_i \geq 0$인 해의 개수와 같다. 즉 구하고자 하는 경우의 수는 $5\times{}_4H_3=5\times{}_6C_3=100$이다.

ii) 두 d_i, d_j에 대하여 $d_i=d_j=-1$
$d_i=d_j=-1$을 만족시키는 두 순서쌍 (i,j)를 고르는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$가지이다. 또한 나머지 3개의 d_i의 합은 3이므로 $y_1+y_2+y_3=3$이고, 모든 $y_i \geq 0$인 해의 개수와 같다. 즉 구하고자 하는 경우의 수는 ${}_5C_2\times{}_3H_3={}_5C_2\times{}_5C_2=100$

i, ii에 의해 구하고자 하는 경우의 수는 $100+100=200$이다.

따라서 I, II, III에 의해 구하고자 하는 경우의 수는
$126+175+200=501$임을 얻는다.

미23. ☆☆☆☆☆

$$\lim_{x\to0+}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{2x^2}=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

미24. ☆☆☆☆☆

$\frac{dx}{dt}=-\frac{2}{(t+3)^2}$이고 $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t+3}$이므로 $t=1$일 때
$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}\div\left(-\frac{2}{16}\right)=-2$임을 얻는다.

미25. ☆☆☆☆☆

$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times3^{an}-2}{3^{2n}}$의 값이 수렴하려면 $a=2$이고 이에 따라 $b=3$이다. 따라서 $a+b=5$임을 얻는다.

미26. ★☆☆☆☆

함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$는

$$g'(x)=\left(f'(x)-3\right)e^{f(x)}+\left(f(x)-3x\right)e^{f(x)}$$
$$=\left(f(x)+f'(x)-3x-3\right)e^{f(x)}$$

이다. $x=a$에서 극값을 가져야 하므로
$f(a)+f'(a)=3a+3$이고 극값이 0이므로 $f(a)=3a$여야 한다.
따라서 $f'(a)=3$이다. $f(k)=0$일 때 $g(k)=9$이므로
$k=-3$이다. 따라서 $f(x)-3x=(x-a)^2$에서
$9=(a+3)^2$이므로 $a=-6$임을 얻는다. 따라서
$f(-1)=25-3=22$임을 얻는다.

미27. ★★☆☆☆

점 A에서 접해야 한다. 점 A의 x좌표를 a_n이라 하면

$$\sin(\pi\times a_n)=t\times a_n$$

$$\pi\cos(\pi\times a_n)=t$$

이 성립한다. 두 식을 나누면 $\tan(\pi\times a_n)=\pi\times a_n$임을 얻는다.
삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}(a_n)^2t$이다.

n이 무한대로 가면 $a_n\approx\frac{1}{2}+2n$이다. 이때 $t\approx\frac{2}{1+4n}$으로 수렴한다. 따라서 $S_n\approx\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+2n\right)^2\times\frac{2}{1+4n}$이고

$\lim_{n\to\infty}(S_n-n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+4n}{4}-n\right)=\frac{1}{4}$임을 얻는다.

미28. ★★★★☆

$P(x)=x^2-ax-6$이라 두면, $f(x)=P(x)\tan\pi x$이다.
$f'(x)=P'(x)\tan\pi x+\pi P(x)\sec^2\pi x$이고, 자연수 m에 대해 $\tan\pi m=0$, $\sec^2\pi m=1$이므로 $f'(x)=\pi P(m)$이다.
따라서 $P(m)=0$이므로 $m^2-am-6=0$이고, $a=m-\dfrac{6}{m}>0$이므로 $m^2>6$이다. $a_n=\dfrac{1}{f(g(n))}$이라 하면, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{n}=\dfrac{1}{k\pi}$이다. 이때 수렴값이 0이 아니므로 적당한 n에 대해 $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{n}$은 $\dfrac{1}{k\pi}$에 수렴한다. 즉 $a_{n+1}-a_n=n\left(\dfrac{1}{k\pi}+\epsilon_n\right)$이고, $\lim\limits_{n\to\infty}\epsilon_n=0$이다.

$$a_n=a_1+\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)=a_1+\sum_{i=1}^{n-1}i\left(\frac{1}{k\pi}-\epsilon_i\right)=a_1+\frac{1}{k\pi}\sum_{i=1}^{n-1}i+\sum_{i=1}^{n-1}i\epsilon_i$$

이다. 이때 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}i=\dfrac{n(n-1)}{2}$이므로 양변을 n^2로 나눠주면, $\dfrac{a_n}{n^2}=\dfrac{a_1}{n^2}+\dfrac{(n-1)}{2nk\pi}+\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n-1}i\epsilon_i$로 쓸 수 있고, $\lim\limits_{n\to\infty}\epsilon_n=0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n-1}i\epsilon_i=0$이다. 따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2f(g(n))}=\dfrac{1}{2k\pi}$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2f(g(n))=2k\pi$를 얻는다.

이제 $g(n)+b=\dfrac{b}{n+1}$이므로 양변을 제곱하면

$(g(n)+b)^2=\dfrac{b^2}{(n+1)^2}$이다. 따라서 $\dfrac{f(g(n))}{(g(n)+b)^2}=\dfrac{(n+1)^2f(g(n))}{b^2}$이고, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2f(g(n))}{b^2}$이 0이 아닌 값으로 수렴함으로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(g(n))}{(g(n)+b)^2}$도 0이 아닌 값으로 수렴한다. 즉 $\lim\limits_{x\to-b}\dfrac{f(x)}{(x+b)^2}$가 0이 아닌 값으로 수렴해야 한다.

즉 $P(-b)=0$이고, $\tan(-b\pi)=0$이다. 따라서 b는 정수이고, $P(x)=0$의 근이 $x=m$또는 $x=-b$다. 근과 계수의 관계에 의해 $a=m-b$이고, $-mb=-6$이므로 $mb=6$이다. 이때 $a>0$이므로 $m>b$임을 알 수 있고, 자연수 m과 정수 b에 대해 $mb=6$인 순서쌍은 $(m,b)=(3,2),(6,1)$이다.

$$f(g(n))=(g(n)-m)(g(n)+b)\tan\pi g(n)$$
$$=\left(-\frac{(b+m)n+m}{n+1}\right)\left(\frac{b}{n+1}\right)\tan\left(-\frac{b\pi n}{n+1}\right)$$

이다. 이때 b는 정수이므로

$$\tan\left(-\frac{b\pi n}{n+1}\right)=\tan\left(-bpi+\frac{b\pi}{n+1}\right)=\tan\left(\frac{b\pi}{n+1}\right)$$

이다. 따라서 $f(g(n))=-\dfrac{b\{(b+m)n+m\}}{(n+1)^2}\tan\left(\dfrac{b\pi}{n+1}\right)$이고 양변에 n^2를 곱하면 $n^2f(g(n))=-\dfrac{bn^2\{(b+m)n+m\}}{(n+1)^2}\tan\left(\dfrac{b\pi}{n+1}\right)$이다.

$$\lim_{n\to\infty}n^2f(g(n))=\lim_{n\to\infty}-\frac{bn^2\{(b+m)n+m\}}{(n+1)^2}\tan\left(\frac{b\pi}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}-\frac{bn^2(b+m)}{(n+1)^2}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\tan\left(\frac{b\pi}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}=-\pi b^2(b+m)$$

이고 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2f(g(n))=2k\pi$이므로 $k=-\dfrac{b^2(b+m)}{2}$를 얻는다.

따라서 가능한 (m,b,k)는 $(3,2,-10)$이거나 $(6,1,-\frac{7}{2})$이다. 그러나 k가 정수이므로 $m=3$, $b=2$, $a=m-b=1$, $k=-10$이다. 따라서 구하고자 하는 값은 $a+b+k=-7$을 얻는다.

미29. ★★★☆☆

(가)에선 수렴하지 않는데, (나)에서 수렴하려면 $\lim_{n\to\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=0$이어야 한다. 따라서

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n+2\left(\frac{k}{3}\right)^{1-n}+\frac{a_1}{4n^2-1}\right)=0$에서 등비수열 $\{a_n\}$의

일반항은 $a_n=-2\left(\frac{k}{3}\right)^{1-n}=-\frac{2k}{3}\times\left(\frac{3}{k}\right)^n$임을 얻는다. 또한, (가) 조건에 의해 $0<|k|\le 3$이어야 한다.

$b_4=2\times\left(\frac{k}{3}\right)^{-1}+\frac{a_1}{15}$이고 $a_1=-2$이므로 $b_4=\frac{6}{k}-\frac{2}{15}$임을 얻을 수 있다. $3<\left|\frac{6}{k}-\frac{2}{15}\right|<4$에서 가능한 정수 k는 $k=-2$ 뿐임을 얻는다. 또한

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{2n}b_m=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{(2m-1)(2m+1)}\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m+1}\right)=-1$$

이므로 $\alpha=-1$임을 얻을 수 있다. 따라서

$$a_4+b_4+\alpha k=\frac{27}{4}-\frac{47}{15}+2=\frac{337}{60}$$

이므로 $p+q=397$임을 얻는다.

미30. ★★★★★

주어진 등식에서 $x=0$을 대입하게 되면 $\left(f(x)+1\right)^3+\left(g(x)-1\right)^3=0$이므로 $f(0)=-g(0)$이다.

첫 번째 부등식에서 0을 대입하게 되면, $\left(f(0)+1\right)^2\le 1$, $-2\le f(0)\le 0$이다. 그런데 앞에서 $f(0)=-g(0)$이였기 때문에 $0\le g(0)\le 2$를 얻는다.

이제 $g(0)=k$라 하자. g는 f의 역함수이므로 $f(k)=0$이고, 앞에서 $f(0)=-k$을 얻었다. $0<k<2$라고 가정을 하자.

$f(x)$가 미분가능 함수이므로 구간 $[0,b]$에서 평균값정리를 쓸 수 있다. 즉, $\frac{f(k)-f(0)}{k-0}=f'(c)$인 c가 $c\in(0,k)$에 존재한다. 그런데, $f(k)=0$, $f(0)=-k$이므로 $\frac{f(b)-f(0)}{b-0}=\frac{0-(-b)}{b}=1=f'(c)$이다. 따라서 $f'(c)=1$인 c가 $c\in(0,k)$에 존재한다. 이제 두 번째 부등식을 보자. 두 번째 부등식은 $1-|f'(x)-1|\le x(k-x)$라고 다시 쓸 수 있다.

여기서 $x=c$를 넣으면 $f'(c)=1$이므로 $1\le c(k-c)$를 얻는다.

이때, $c(b-c)\le\frac{k^2}{4}<1$이므로 이는 모순이다. 따라서 $g(0)=0$또는 $g(0)=2$이다.

이제 $g(0)=0$이라 해보자. 그러면 $f(0)=g(0)=0$을 얻는다.

첫 째 부등식을 정리하면 $\left(e^xf(x)+1\right)^2-x^4e^{2x}-1\le 0$이고, $h(x)=\left(e^xf(x)+1\right)^2-x^4e^{2x}-1$이라 하면, $h(x)\le 0$이다. 이때 $h(0)=0$이므로 $h(x)$는 $x=0$에서 최댓값을 가진다.

즉 $h'(0)=0$이고, $h''(0)\le 0$이다. $h(x)$를 미분하면 $h'(x)=2e^x\left(e^xf(x)+1\right)\left(f(x)+f'(x)\right)+2e^{2x}(2x^4-4x^3)$이고,

$x=0$을 대입하면 $h'(0)=2f'(0)=0$이고, $f'(0)=0$을 얻는다.

역함수의 미분법에 의해 $f'\left(g(0)\right)g'(0)=1$인데, $g(0)=0$이므로 좌변이 0이 나온다. 따라서 $g(0)\neq 0$이므로 $g(0)=k=2$이고,

$f(0)=-2$를 얻는다. 이때 $c=\frac{k}{2}=1$이므로 $f'(1)=1$이다.

$f(0)=-2$이므로 $h(0)=0$이므로 $h'(0)=0$이다. 위에서 구한 $h'(x)$에 $x=0$을 대입하면 $h'(0)=2\left(f(0)+1\right)\left(f(0)+f'(0)\right)=0$

이므로 $f'(0)=2$를 얻는다. 또한

$h''(x)=2e^{2x}\left(f(x)+f'(x)\right)^2+2e^x\left(e^xf(x)+1\right)\left(f(x)+2f'(x)+f''(x)\right)$
$+4e^{2x}(x^4+4x^3+3x^2)$

이고 $x=0$을 대입하면

$$h''(0)=2\left(f(0)+f'(0)\right)^2+2\left(f(0)+1\right)\left(f(0)+2f'(0)+f''(0)\right)$$
$$=-2\left(2+f''(0)\right)$$

이므로 $f''(0)\ge -2$를 얻는다. 이제 두 번째 부등식을 이용하면, $g(0)=2$이므로 $1-\left|f'(x)-1\right|\le x(2-x)$이다.

$f'(0)=2$이므로 $x=0$ 근처에서 두 번째 부등식은 $1-\left(f'(0)-1\right)=2-f'(x)\le x(2-x)$이다. $x<0$인 실수 x로 양변을 나누면 $\frac{2-f'(x)}{x}\ge 2-x$이다. 따라서

$\lim_{x\to 0-}\frac{2-f'(x)}{x}=-\lim_{x\to 0-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=-f''(0)\ge 2$이므로

$f''(0)\le -2$이다. 따라서 $f''(0)=-2$를 얻는다. 주어진 등식을 미분하면

$$3\left(f(x)+1\right)^2f'(x)+3\left(g(x)+1\right)^2g'(x)=8e^{2x}-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+4\sin x$$

이고, $x=0$을 대입하면 $3\left(f(0)+1\right)^2f'(0)+3\left(g(0)-1\right)^2g'(0)=\frac{15}{2}$

이다. 위에서 구한 값을 대입하면 $g'(0)=\frac{1}{2}$를 얻는다. 주어진 등식을 2번 미분하면

$$3\left\{2\left(f(x)+1\right)\left(f'(x)\right)^2+\left(f(x)+1\right)^2f''(x)\right\}+3\left\{2\left(g(x)-1\right)\left(g'(x)\right)+\left(g(x)-1\right)^2g''(x)\right\}$$

$$=16e^{2x}+\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}+4\cos x$$

이고, $x=0$을 대입하면

$$3\left\{2\left(f(0)+1\right)\left(f'(0)\right)^2+\left(f(0)+1\right)^2f''(0)\right\}+3\left\{2\left(g(0)-1\right)\left(g'(0)\right)^2+\left(g(0)-1\right)^2g''(0)\right\}=20$$

이다. 위에서 구한 값을 대입하면 $g''(0)=\frac{97}{6}$이다.

구하고자 하는 값은 $f'(1)+g''(0)=1+\frac{97}{6}=\frac{103}{6}$

이므로 $p+q=109$를 얻는다.