

수학 영역(확률과 통계)

제 2 교시

1

5지선다형

23. 7개의 문자 a, a, a, b, b, b, c 를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

- ① 70 ② 105 ③ 140 ④ 175 ⑤ 210

$$\frac{7!}{3!3!}$$

24. 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이고

$$P(A \cup B) = \frac{5}{8}, \quad P(A) = \frac{3}{8}$$

일 때, $P(B^C)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (\text{배반})$$

$$\frac{5}{8} = \frac{3}{8} + P(B)$$

$$\rightarrow P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

25. $(2x^2+1)^4\left(x-\frac{1}{2x}\right)$ 의 전개식에서 x^5 의 계수는? [3점]

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

i) ~~42~~ × 12

$$4C_2 (2x^2)^2 \cdot 1^2 \times x = \underline{24x^5}$$

ii) ~~62~~ × (-1)2

$$4C_3 (2x^2)^3 \cdot 1^1 \times -\frac{1}{2x} = \underline{-16x^5}$$

26. 다음 조건을 만족시키는 6 이하의 자연수 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 의 모든 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 의 개수는? [3점]

(가) $a_5 - a_1 = 4$ 이고,

$2 \leq k \leq 4$ 인 모든 자연수 k 에 대하여 $a_1 \leq a_k \leq a_5$ 이다.

(나) $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5$ 의 값은 짝수이다.

- ① 163 ② 178 ③ 193 ④ 208 ⑤ 223

a_5 a_1 a_2, a_3, a_4

i) 5 1 → 1과 5사이 수 중

가능한 경우 1개

$$5^3 - 3^3$$

모두 홀수

a_5 a_1

ii) 6 2 → a_2, a_3, a_4 조건 없다.

$$5^3$$

$$\Rightarrow \underline{i) + ii) = 98 + 125}$$

27. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수는? [3점]

- (가) $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5)$
 (나) 1과 3은 함수 f 의 치역의 원소이다.

- ① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

✓ $a < b$ 이면 $f(a) \leq f(b)$ 아다.

→ 중복조합으로 계산.

→ 1과 3은 무조건 한발씩 있어야.

따라서. $4H3 = 6C3$.

✓ 전체 경우의 수 $5!$

$$\Rightarrow \frac{i) + ii)}{\text{전체}} = \frac{12 + (1+2+2+1)}{5!} = \frac{18}{120} = \frac{3}{20}$$

28. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 모든 일대일 대응 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

- (가) $f(1) < f(3)$, $f(2) < f(4)$
 (나) 함수 f 의 역함수 f^{-1} 에 대하여 $|f(1) - f(5)| \geq f^{-1}(1)$ 이다.

- ① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{11}{60}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{13}{60}$

★ $f(1) = 1$ or $f(2) = 1$

i) $f(1) = 1$ ($f^{-1}(1) = 1$)

$$|1 - f(5)| \geq 1$$

$f(5)$ 1보다 작지
 4보다 작지 x 3보다 작지.

$$\begin{cases} 1 - f(5) \geq 1 \rightarrow f(5) \leq 0 \quad \times \\ 1 - f(5) \leq -1 \rightarrow f(5) \geq 2. \end{cases}$$

ii) $f(2) = 1$ ($f^{-1}(1) = 2$)

$$|f(1) - f(5)| \geq 2$$

$$f(1) - f(5) \geq 2 \rightarrow f(1) \geq f(5) + 2$$

$f(3) = 5$ $f(4) = 3$ $\begin{matrix} 4 & 2 \\ \times & 3 \end{matrix}$ 1보다 작지.

$$f(1) - f(5) \leq -2 \rightarrow f(1) \leq f(5) - 2$$

$f(3) = 3$ $f(4) = 5$ or $f(3) = 5$ $f(4) = 3$ $\begin{matrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{matrix}$

$2 > 2$

$f(3) = 4$, $f(4) = 2$

$1 > 2$

단답형

29. 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7개의 의자가 있다.

이 7개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오.

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

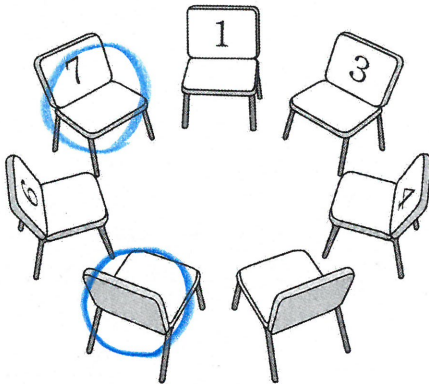
(가) 6이 적힌 의자와 이웃한 2개의 의자에 적힌

두 수의 합은 9이다.

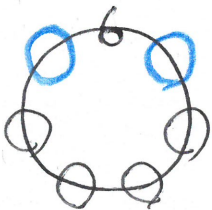
(나) 7이 적힌 의자와 이웃하지 않은 4개의 의자에 적힌

네 수의 곱은 12의 배수이다.

68

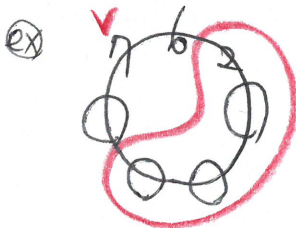


1)



2/7

2가지



들름 174 선택

1 (3) (4) 5

무조건 포함

$2C_1 \times 3!$

3가지 배려

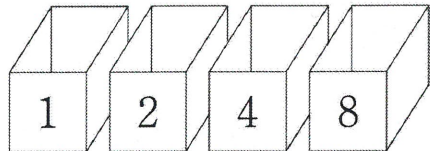
$$\Rightarrow 2 \times 2 \times 6 = \underline{\underline{24}}$$

30. 8개의 공과 숫자 1, 2, 4, 8이 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 있다. 숫자 1, 2, 4, 8이 하나씩 적혀 있는 4개의 빈 상자에 8개의 공과 4장의 카드를 남김없이 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공이나 카드를 넣지 않는 상자가 있을 수 있다.) [4점]

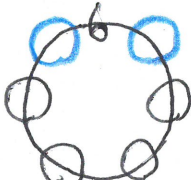
(가) 1이 적힌 상자에 들어 있는 카드의 개수는 1이고

8이 적힌 상자에 들어 있는 카드의 개수는 2 이상이다.

(나) $n(n=2, 4, 8)$ 이 적힌 상자에는 n 의 배수가 적힌 카드가 들어 있거나 공이 n 개 이상 들어 있다.



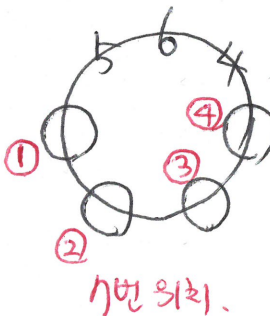
ii)



4/5

2가지

ex



① 6 4 9 9

이미 만족

②

③

2냥 3!

④ 6 5 9 9

2 포함

$$\Rightarrow 2 \times (6 \times 3 + 4)$$

$$= \underline{\underline{44}}$$

$$2가지 \times \underline{\underline{2!}}$$

4가지 배려

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.



들쭉에 보내는 카드가 없다.
(= 공을 넣어야 한다)

공 8개 전부 넣지 못한다.

카드 8은 무조건

★ 8번 상자에 넣는다.



①



카드 배치

남은 공 배치

$$3 \times 4H_2$$

무조건 공 배치.



②



카드 배치

남은 공 배치

$$2 \times 2 \times 4H_2$$

무조건 배치.

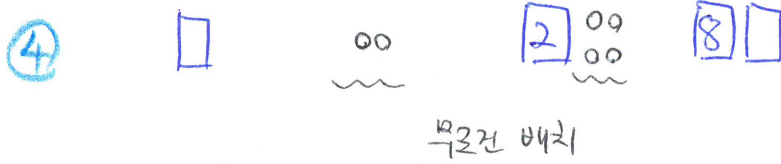
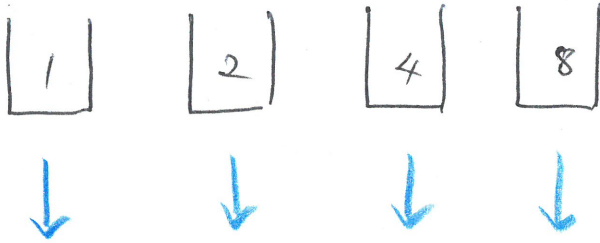
카드 배치

남은 공 배치

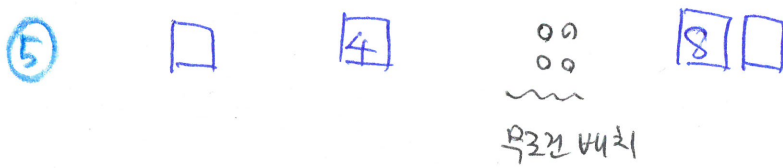
$$2 \times 4H_4$$



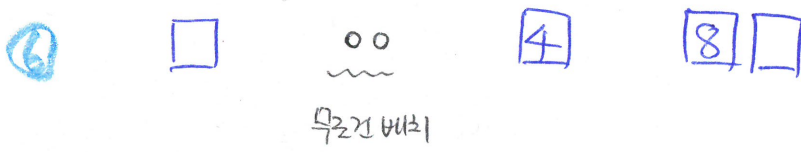
무조건 배치



카드 배치 남은 공 배치
2 x 4H2



카드 배치 남은 공 배치
2 x 4H4



카드 배치 남은 공 배치
2 x 4H6

$$\Rightarrow \text{총 개리수} = \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} + \textcircled{5} + \textcircled{6} = \boxed{398}$$

30 40 70 20 70 168

수학 영역(미적분)

제 2 교시

1

5지선다형

23. 함수 $f(x)=4\ln x$ 에 대하여 $f''(2)$ 의 값은? [2점]

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$$f'(x) = \frac{4}{x} = 4x^{-1}$$

$$f''(x) = -4x^{-2} = \frac{-4}{x^2}$$

24. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ 이 수렴할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 3^{n+1}}{a_n + 3^{n-1}}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

분자, 분자 $(\div 3^n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{3^n} + 3}{\frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}} = \frac{0+3}{0+\frac{1}{3}}$$

25. 실수 $t (0 < t < \frac{\pi}{2})$ 에 대하여 곡선 $y = \sin 2x$ 위의

점 $P(t, \sin 2t)$ 를 지나고 직선 OP 에 수직인 직선이 x 축과 만나는

점을 Q 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{OQ}{t}$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [3점]

- ① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

$$\begin{aligned} \checkmark \text{ 직선 OP 기울기} &= \frac{\sin 2t}{t} \\ \text{수직인 직선 기울기} &= -\frac{t}{\sin 2t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y - \sin 2t = -\frac{t}{\sin 2t} (x - t)$$

$$\text{x절편 } Q \left(\frac{\sin^2 2t}{t} + t, 0 \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 2t}{t} + t}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2t}{t} \right)^2 + 1$$

$$= 2^2 + 1 = \boxed{5}$$

26. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을

$$a_n = f(n)$$

이라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때,

$\frac{a_2}{a_1}$ 의 값은? [3점]

$$(가) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_n} - 2n) = 2$$

(나) 모든 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{a_n + 1}$ 의 값은 자연수이다.

- ① $\frac{11}{6}$ ② 2 ③ $\frac{13}{6}$ ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

$$\checkmark \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 4n^2}{\sqrt{a_n} + 2n} = 2$$

$$\rightarrow a_n = 4n^2 + pn + q$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pn + q}{\sqrt{4n^2 + pn + q} + 2n} = 2$$

$$\frac{p}{\sqrt{4} + 2} = 2 \quad \therefore p = 8$$

$$\rightarrow "a_{n+1}" \text{ 찾기}$$

$$a_n = 4n^2 + 8n + 3$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{35}{15} = \boxed{\frac{7}{3}}$$

27. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$$x = 2e^t - 3e^{-t}, \quad y = 2e^t + 6e^{-t}$$

을 C 라 하자. 상수 k 에 대하여 t 에 대한 방정식 $2e^t + 6e^{-t} = k$ 는 서로 다른 두 실근 t_1, t_2 를 갖는다. 곡선 C 에서 $t = t_1$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 $-\frac{1}{5}$ 이고, $t = t_2$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 m 이다. $k+m$ 의 값은?

- ① $\frac{75}{11}$ ② $\frac{79}{11}$ ③ $\frac{83}{11}$ ④ $\frac{87}{11}$ ⑤ $\frac{91}{11}$

$$\checkmark \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2e^t - 6e^{-t}}{2e^t + 3e^{-t}}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{2e^{t_1} - 6e^{-t_1}}{2e^{t_1} + 3e^{-t_1}} = -\frac{1}{5} \rightarrow e^{t_1} = \frac{3}{2}$$

$$t = t_1 \text{ 일 때, } 2e^{t_1} + 6e^{-t_1} = k$$

$$k = 2 \times \frac{3}{2} + 6 \times \frac{2}{3} = 7$$

$$\rightarrow 2e^t + 6e^{-t} = 7$$

$$\textcircled{x e^t} \quad 2(e^t)^2 - 7e^t + 6 = 0 \quad \left(\begin{smallmatrix} 2 & -7 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \end{smallmatrix} \right)$$

$$\therefore e^t = \frac{3}{2}, \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \quad e^{t_2} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 3}{4 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{11} = m$$

$$\Rightarrow k+m = 7 + \frac{2}{11} = \frac{79}{11}$$

28. 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 과 수열 $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n 에 대하여

$$(b_n - a_n)(b_n - |a_n|) = 0 \rightarrow b_n = a_n \text{ or } |a_n|$$

이다.

(나) $\sum_{n=k}^{\infty} (a_{2n+1} + b_{2n+1}) = 0$ 을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 2이다.

$\checkmark$ $b_1 - b_3 = 3a_3 + 5$ 일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 값은? [4점]

- ① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

$$(나) \quad (a_5 + b_5) + (a_7 + b_7) + (a_9 + b_9) + \dots = 0$$

$$b_n = |a_n| = -a_n \quad (n \text{은 } 5 \text{ 이상의 홀수})$$

$$b_3 = a_3 \rightarrow b_1 - a_3 = 3a_3 + 5$$

$$b_1 = 4a_3 + 5$$

$$\Rightarrow b_1 = a_1 + 5$$

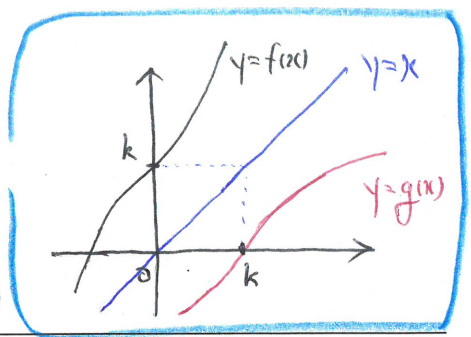
$$b_1 \text{과 } a_1 \text{이 다르다!!} \quad b_1 = |a_1| = -a_1$$

$$\therefore a_1 = -\frac{5}{2}$$

$$4\text{째 } \{a_n\} \quad -\frac{5}{2} \quad \frac{5}{4} \quad -\frac{5}{8} \quad \frac{5}{16} \quad -\frac{5}{32} \dots$$

$$4\text{째 } \{b_n\} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{5}{4} \quad -\frac{5}{8} \quad \frac{5}{16} \quad \frac{5}{32} \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{5}{2} + \frac{5}{4} - \frac{5}{8} + \frac{5}{16} - \frac{5}{32} + \dots = \frac{15}{4}$$



단답형

$$\star \cos x = \frac{3}{5} \rightarrow \sin x = \frac{4}{5}$$

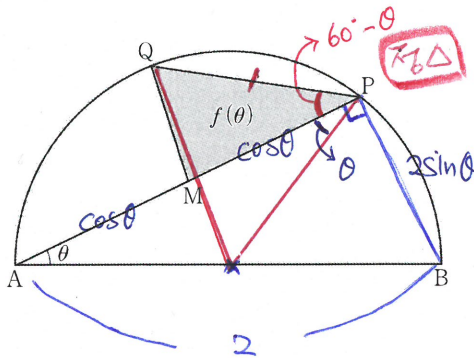
29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다.

호 AB 위에 점 P를 $\angle BAP = \theta (0 < \theta < \frac{\pi}{3})$ 가 되도록 잡고,

호 AP 위에 점 Q를 $\overline{PQ} = 1$ 이 되도록 잡는다. 선분 AP의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 PQM의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하자. $\overline{AP} = \frac{6}{5}$ 이

되도록 하는 θ 의 값을 a 라 할 때, $f'(a) = p + q\sqrt{3}$ 이다.

$100 \times |p+q|$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]



$$\therefore f(\theta) = \frac{1}{2} \times 1 \times \cos \theta \times \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right)$$

$$\rightarrow f'(\theta) = -\frac{1}{2} \sin \theta \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) - \frac{1}{2} \cos \theta \cos \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \theta - \cos \frac{\pi}{3} \sin \theta$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \theta + \sin \frac{\pi}{3} \sin \theta$$

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{2} \sin \alpha \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) - \frac{1}{2} \cos \alpha \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$$

$$\Rightarrow f'(\alpha) = -\frac{2}{5} \left(\frac{3\sqrt{3}}{10} - \frac{2}{5} \right) - \frac{3}{10} \left(\frac{3}{10} + \frac{4\sqrt{3}}{10} \right)$$

$$= \frac{7}{100} - \frac{6}{25} \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 100 |p+q| = 17$$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 역함수 $g(x)$ 를 갖는다. 함수 $h(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x)h(x) = x \ln(1+3|g(x)|)$$

이고 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가) $g(k)=0$ 인 상수 k 에 대하여

함수 $h(x)-|g(x)|$ 는 $x=k$ 에서 미분가능하다.

(나) $4g'(f(1))=3f(1)-4$

(가) $f(x)$, $g(x)$, $|g(x)|$ 연속.

$\Rightarrow y=h(x)$ 도 $x=k$ 에서 연속.

$$\lim_{x \rightarrow k+} h(x) = \lim_{x \rightarrow k+} \frac{x \cdot \ln(1+3g(x))}{g(x)} = \frac{k \times 3g'(k)}{g'(k)} = 3k \quad \begin{matrix} x > k, \\ g(x) > 0 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow k-} h(x) = \lim_{x \rightarrow k-} \frac{x \cdot \ln(1-3g(x))}{g(x)} = \frac{k \times -3g'(k)}{g'(k)} = -3k \quad \begin{matrix} x < k, \\ g(x) < 0 \end{matrix}$$

$$\therefore k=0 \rightarrow h(0)=0$$

$\Rightarrow$ NEXT.

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

✓ $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) - |g(x)|$ 는 $x=0$ 에서 미분 가능!!

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - |g(x)| - (h(0) - |g(0)|)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - g(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + 3g(x))}{g(x)} - \frac{g(x)}{x} = 3 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - |g(x)| - (h(0) - |g(0)|)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) + g(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1 - 3g(x))}{g(x)} + \frac{g(x)}{x} = -3 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{x} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 좌미분과 우미분 계수가 같으므로, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 3$.

* $g'(0) = 3 \xleftrightarrow{\text{역함수}} f'(0) = \frac{1}{3}$

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$g(f(x)) = x$ 이므로 $g'(f(x)) \times f'(x) = 1 \rightarrow g'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)}$

$\Rightarrow 4g'(f(1)) = 3f(1) - 4$

$\frac{4}{f'(1)} = 3f(1) - 4$

$\frac{4}{2a + \frac{10}{3}} = 3\left(a + \frac{4}{3}\right) - 4$

$\therefore a = \frac{1}{3}, -2$

$f(x) = x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$

$f(13) = 31$

$a = -2$ 이면, $f'(x) = 3x^2 - 4x + \frac{1}{3}$
 $D = 2 - 1 > 0$ $\star$ 상사
 일대일 대응이 $\times$