수학 영역

5지선다형

1. $2^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{32}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

$2^{\frac{1}{3}} \times (2^5)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}$

2. 곡선 $y=x^3+2x-1$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$y' = 3x^2+2 \xrightarrow{x=1} y'=5$

3. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{d}{dx}f(x)=3x^2-5$이고 $f(0)=1$일 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

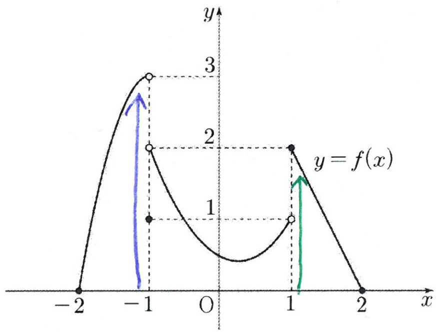
$f'(x) = 3x^2-5$

$f(x) = x^3-5x+C$

$\boxed{x=0}$ $1=C$

$\therefore f(x) = x^3-5x+1$

4. 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



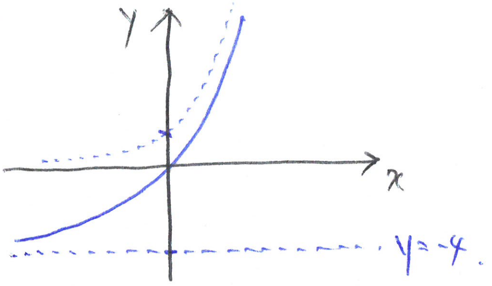
$\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(-1-0)=3,\quad f(1+0)=2$

5. 원점을 지나는 곡선 $y=2^{x-a}+b$의 점근선이 직선 $y=-4$일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2



$\Rightarrow$ $y=2^{x-a}-4$

$(0,0)$ $0=2^{-a}-4$

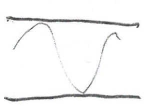
$\therefore a=-2$

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin bx+1$의 주기가 3π이고 최댓값과 최솟값의 차가 6일 때, $a+b$의 값은? [3점]

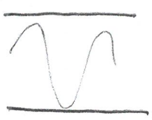
① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

✓ 주기 $\frac{2\pi}{b}=3\pi$ $\rightarrow$ $b=\frac{2}{3}$

✓ $y=a\sin bx$



$y=a\sin bx+1$



$\rightarrow$ $a+1-(-a+1)=6$

$\therefore a=3$

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_a^x f(t)dt=x^2-3ax+2$$

를 만족시킨다. $f(0)>0$일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

✓ $x=a$ $\rightarrow$ $0=a^2-3a^2+2$

$a=\cancel{1}, -1$

✓ 미분.

$f(x)=2x-3a$

$f(0)=-3a>0$ $\rightarrow$ $a<0$

$\Rightarrow$ $f(x)=2x+3$

$f(2)=7.$

8. 첫째항이 음수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 \times a_5 = 36, \quad a_3 + 2a_4 = 2$$

를 만족시킬 때, a_2의 값은? [3점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

$a \times ar^4 = 36 \rightarrow ar^2 = \cancel{6}, -6$

$(a<0)$

$ar^2 + 2ar^3 = 2$

$\rightarrow -6 - 12r = 2 \quad \therefore r = -\frac{2}{3}$

$a \times \frac{4}{9} = -6 \quad \therefore a = -\frac{27}{2}$

$\Rightarrow a_2 = -\frac{27}{2} \times -\frac{2}{3} = 9$

9. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = (x^2 + x)f(x)$$

라 하자. $\lim_{h \to 0} \frac{g(1+h) - 4}{h} = 9$일 때, $f(1) \times f'(1)$의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{9}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 9

$g(1) = 4, \quad g'(1) = 9$

$\boxed{x=1}$ $g(1) = 2f(1) \quad \therefore f(1) = 2$

$g'(x) = (2x+1)f(x) + (x^2+x) \cdot f'(x)$

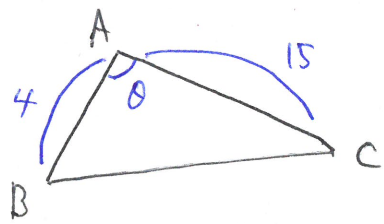
$\boxed{x=1}$ $g'(1) = 3f(1) + 2f'(1)$

$9 = 6 + 2f'(1) \quad \therefore f'(1) = \frac{3}{2}$

10. 각 A가 예각인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는? [4점]

(가) $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 15$
(나) 삼각형 ABC의 넓이는 24이다.

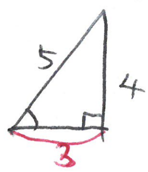
① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{65}{8}$ ③ $\frac{35}{4}$ ④ $\frac{75}{8}$ ⑤ 10



$r = \frac{65}{8}$

$\triangle$넓이 $= \frac{1}{2} \times 4 \times 15 \times \sin\theta = 24$

$\sin\theta = \frac{4}{5}$



$\cos\theta = \frac{3}{5}$

$\rightarrow \overline{BC}^2 = 16 + 225 - 2 \times 4 \times 15 \times \cos\theta$

$\overline{BC} = 13$

$\Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = \frac{13}{\frac{4}{5}} = \frac{65}{4} = 2r$

$\int v(t)\,dt = t^3 - \frac{11}{2}t^2 + 8t + C$ $(C = 0)$

$\boxed{위치}$ $\Rightarrow x(t) = t^3 - \frac{11}{2}t^2 + 8t$

11. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 값의 합은? [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 3 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$
> 이다.
>
> (나) $a_3 = a_1 + 4$ $a_1 = a$

① $-\frac{2}{3}$ ② -1 ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{3}$ ✓ ⑤ -2

$\boxed{a<0}$

i) $a \to -2a \to -2a-3$ (a_2, a_3)

$(a_2 > 0)$

(나) $-2a - 3 = a + 4$ $\therefore a = -\frac{7}{3}$

ii) $\boxed{a \geq 0}$

$a \to a - 3$ (a_2) $\xrightarrow{a<3} -2a+6$ —①

$a \to a - 3$ (a_2) $\xrightarrow{a \geq 3} a-6$ —②

① (나) $-2a + 6 = a + 4$

$\therefore a = \frac{2}{3}$

② (나) $\cancel{a - 6 = a + 4}$

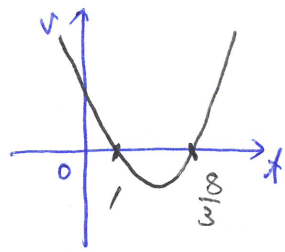
12. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 - 11t + 8 = (t-1)(3t-8)$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> 〈보 기〉
>
> ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.
>
> ㄴ. 점 P의 가속도가 1이 되는 순간 점 P의 위치는 2이다.
>
> ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 6이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ✓ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄱ. $v(1) = 0$.

ㄴ. $v'(t) = a(t) = 6t - 11 = 1$

$\hookrightarrow t = 2$

$x(2) = 8 - 22 + 16 = 2$

~~ㄷ.~~ $\int_0^1 v(t)\,dt = \frac{7}{2}$

$\int_1^2 v(t)\,dt = -\frac{3}{2}$

$\to$ 움직인 거리 $= \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5$

$\sqrt{2x+1}-1=0 \rightarrow x=0$

13. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(28)$의 값은? [4점]

> (가) $0 \le x \le 12$인 모든 실수 x에 대하여
>
> $(\sqrt{2x+1}-1)\times f(x)=ax$
>
> 이다. (단, a는 상수이다.)
>
> (나) 모든 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$에서 x의 값이 k에서 $k+12$까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{1}{2}$이다.

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

$f(x)=\dfrac{ax}{\sqrt{2x+1}-1}$

$x\neq0$ 이면

$\rightarrow$ 연속 $f(0)=\lim_{x\to0}\dfrac{ax}{\sqrt{2x+1}-1}=a$

$\rightarrow$ (나) $k=0$

$\dfrac{f(12)-f(0)}{12}=\dfrac{1}{2}$ $(f(12)=3a)$

$\dfrac{3a-a}{12}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore a=3$

$f(4)=\dfrac{12}{\sqrt{9}-1}=6$

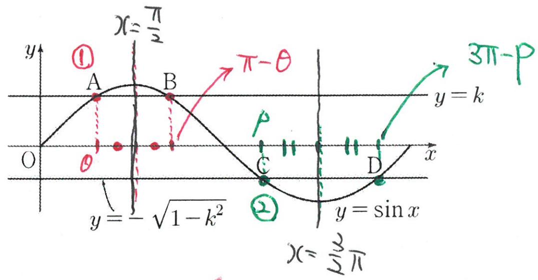
$\rightarrow$ (나) $k=4$ $\dfrac{f(16)-f(4)}{12}=\dfrac{1}{2}$

$f(16)=12$

또, (나) $k=16$ $\dfrac{f(28)-f(16)}{12}=\dfrac{1}{2}$

$f(28)=18$

14. 그림과 같이 곡선 $y=\sin x(0\le x\le 2\pi)$가 직선 $y=k$와 만나는 두 점을 A, B라 하고, 직선 $y=-\sqrt{1-k^2}$과 만나는 두 점을 C, D라 하자. $\overline{CD}-\overline{AB}=\frac{2}{9}\pi$일 때, 선분 AB의 길이는? (단, k는 $0<k<1$인 상수이다.) [4점]



① $\frac{13}{36}\pi$ ② $\frac{3}{8}\pi$ ③ $\frac{7}{18}\pi$ ④ $\frac{29}{72}\pi$ ⑤ $\frac{5}{12}\pi$

① $\sin\theta=k$, $\overline{AB}=\pi-2\theta$

② $\sin p=-\sqrt{1-k^2}$, $\overline{CD}=3\pi-2p$

$\rightarrow \sin p=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{\cos^2\theta}$

$\sin p=-\cos\theta=\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)$

3사분면각 1사분면각 (예각)

$\Rightarrow p=\frac{3}{2}\pi-\theta$

$\overline{CD}-\overline{AB}=3\pi-2p-(\pi-2\theta)=\frac{2}{9}\pi$

연립, $\theta=\frac{11}{36}\pi$, $p=\frac{43}{36}\pi$

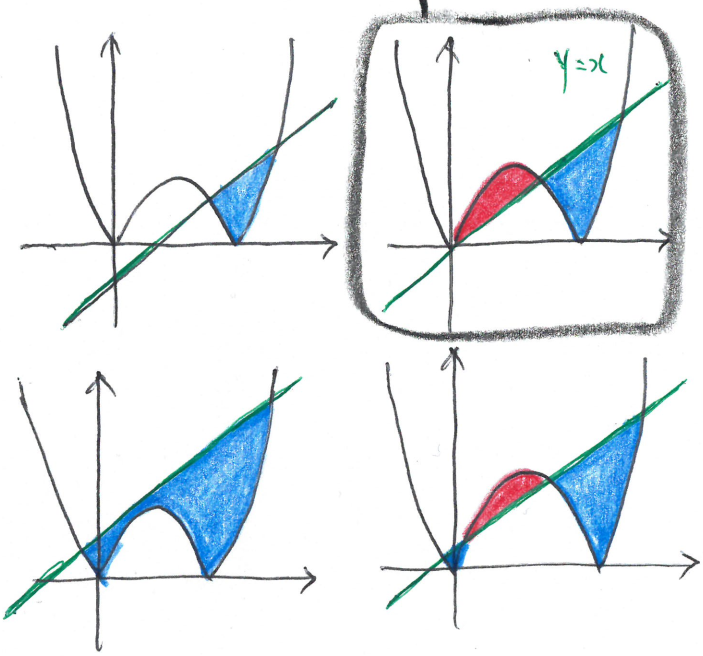
$\therefore \overline{AB}=\pi-2\theta=\frac{7}{18}\pi$

15. $p>1$인 상수 p에 대하여 함수 $f(x)=x^2-px$가 있다. 실수 $t(t>-p)$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=x+t$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. 열린구간 $(-p, \infty)$에서 정의된 함수

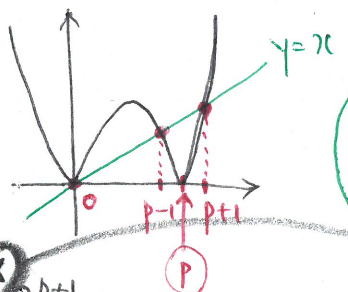
$$g(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\{|f(x)|-(x+t)\}dx$$

의 $\boxed{\text{최댓값이 } \frac{1}{2}}$일 때, p의 값은? [4점]

① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4



⇒



$t=0$ 일때, 최댓값 $\frac{1}{2}$

$$g(0)=\int_0^{p+1}(|f(x)|-x)\,dx$$

$$=\int_0^p(-f(x))dx+\int_p^{p+1}f(x)\,dx-\int_0^{p+1}x\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(p^3-3p^2-3p-1)=\frac{1}{2}\qquad \boxed{p=4}$$

단답형

16. 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}\pi$인 부채꼴의 넓이는 $a\pi$이다. a의 값을 구하시오. [3점]

$r=8,\ \theta=\frac{3}{4}\pi$

$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times 64\times\frac{3}{4}\pi=24\pi.$

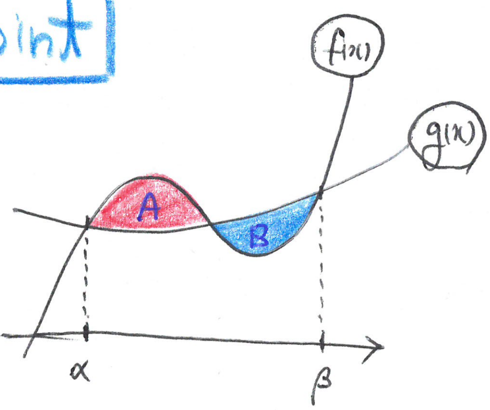
17. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{7}a_{2k}=\sum_{k=1}^{7}(k^2-a_{2k-1})$일 때, $\sum_{k=1}^{14}a_k$의 값을 구하시오. [3점]

$$\sum_{k=1}^{7}a_{2k}=\sum_{k=1}^{7}k^2-\sum_{k=1}^{7}a_{2k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{14}a_k=\frac{7\times 8\times 15}{6}$$

$$=140$$

★ point



$$\int_\alpha^\beta|f(x)-g(x)|\,dx=A+B$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)-g(x)\,dx=A-B$$

★ first, 진수조건.

$x-4>0$, $x-6>0$.

$\boxed{x>6}$

18. 방정식

$$\log_2(x-4)=\log_{\frac{1}{2}}(x-6)+3$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$$\log_2(x-4)=\log_2(x-6)^{-1}+\log_2 8$$

$$\rightarrow \quad x-4=\frac{8}{x-6}$$

$$x^2-10x+16=0$$

$$(x-2)(x-8)=0, \quad \therefore x=\cancel{2}, 8$$

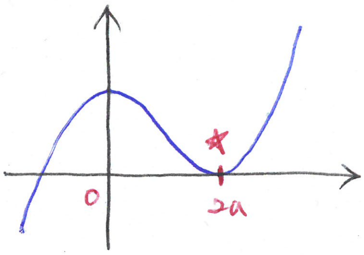
19. x에 대한 방정식 $x^3-3ax^2+40a^2=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 1일 때, 양수 a의 값을 구하시오. [3점]

$y=x^3-3ax^2+40a^2$ 이 "$x>0$" 에서

x절편 1개

$$\rightarrow \quad y'=3x^2-6ax$$

$$=3x(x-2a)=0 \quad \therefore x=0, 2a$$



$\boxed{x=2a}$

$$0=8a^3-12a^3+40a^2$$

$$4a^2(a-10)=0 \quad \boxed{\therefore a=10}$$

20. 첫째항이 8인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases} -2a_n & (a_n \le 0) \\ a_n & (a_n>0) \end{cases}$$

이다.

(나) $b_3+b_5=2b_4+6$, $b_4+b_6=2b_5$

★조건

등차중항, b_4, b_5, b_6 이 모두 수열 $\cancel{\{a_n\}}$ or $\{-2a_n\}$

★조건.

⇒ 첫항 8이고 공차는 "음수"

★조건에 따라서 a_4 부터 음수값.

(if) a_3 도 음수이면,

★조건 $\quad -2a_3-2a_5=\cancel{-4a_4+6}$

$=-2(a_3+a_5)$

$=\cancel{-4a_4}$

모순 X

★조건 $\quad b_3+b_5=2b_4+6$

$a_3 \quad -2a_5 \quad -2a_4$

$$\rightarrow \quad 8+2d-16-2d=-32-12d+6$$

$$\therefore d=-3$$

$$\rightarrow \quad \sum_{k=1}^{10} b_n=\sum_{k=1}^{3} a_k+\sum_{k=4}^{10} -2a_k$$

$$=\boxed{155}$$

 ⇒ NEXT

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 양수 p와 실수 $k(k\neq 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<p) \\ kf(x-p) & (x\geq p) \end{cases}$$

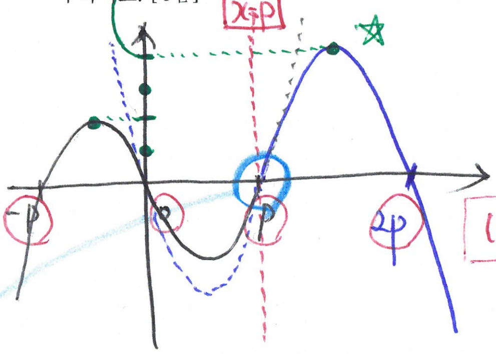
$f(p)=kf(0)$
$=0$

가 다음 조건을 만족시킨다.

"연속"

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) x에 대한 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 $2p$이다.

함수 $g(x)$의 극값 중 가장 큰 값이 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]



(나)조건 만족

$f(x) = x(x+p)(x-p) \rightarrow f'(p) = 2p^2$

$x=p$에서의 좌미분계수

$kf(x-p) = kx(x-p)(x-2p) \rightarrow kf'(0) = -kp^2$

$\therefore k = -2$

$x=p$에서의 우미분계수

$\Rightarrow f'(x)=0 \quad x = \frac{p}{\sqrt{3}}, -\frac{p}{\sqrt{3}}$

$f\left(-\frac{p}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{p^3}{3\sqrt{3}} + \frac{p^3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

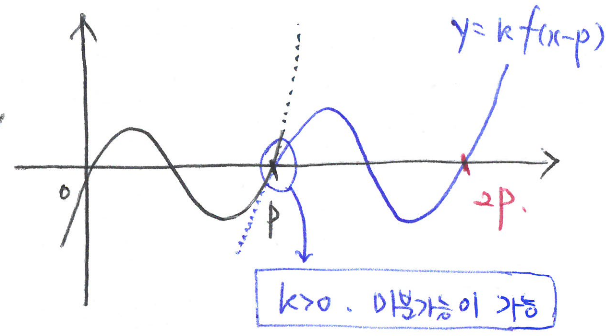
$\therefore p = \frac{3}{2}$

$f(x) = x^3 - \frac{9}{4}x \rightarrow f(4) = 55$

22. 다음 조건을 만족시키는 곡선 $y=2^{x+1}+k$ 위의 서로 다른 두 점 A, B와 곡선 $y=\log_2(x-k)+1$ 위의 점 C가 존재하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 S라 하자.

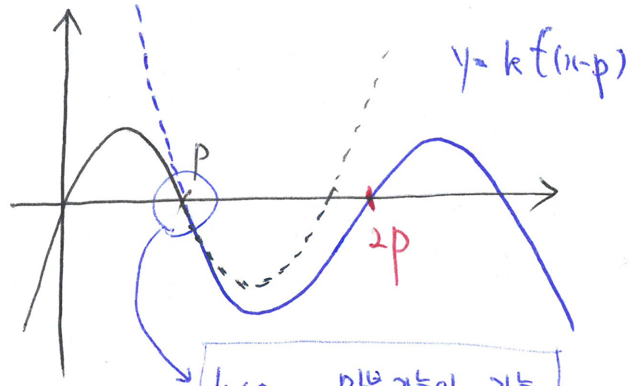
(가) 직선 AB의 기울기는 1이다.
(나) 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정삼각형이다.

$2^{-S+\frac{2}{3}}$의 값을 구하시오. [4점]



k>0, 미분가능이 가능

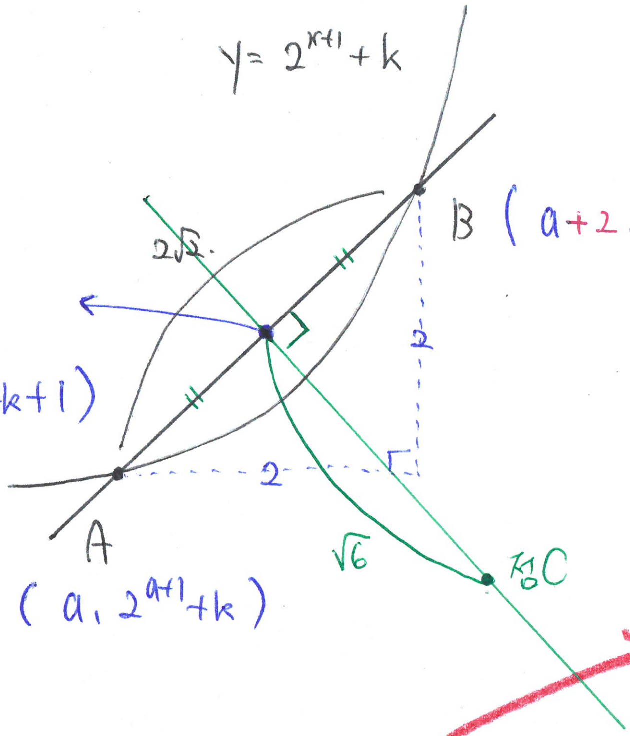
(나) 조건이 만족 X



k<0, 미분가능이 가능.

역시, (나) 조건 만족 X.

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.



$B\ (a+2,\ 2^{a+1}+k+2)$

$\quad\ \ \| $

$2^{a+3}+k \qquad \therefore a=-\log_2 3$

✓ $\overline{AB}$의 중점

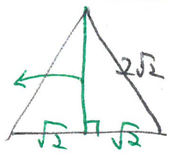
$(a+1,\ 2^{a+1}+k+1)$

☆

✓ $y=2^x+k+1$ 위의점.

✓ $y=\log_2(x-k)+1$ 위의점.

정△ ☆ $\sqrt{6}$



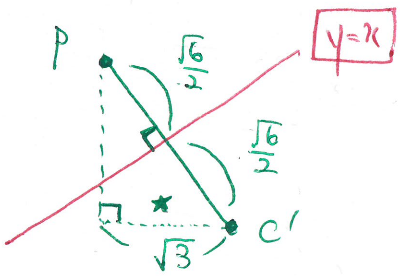
y축으로

한칸(−1) 내리면,

⇒ $y=2^x+k$, $y=\log_2(x-k)$ ☆역함수 $y=x$축 대칭 관계

$\overline{AB}$ 중점 ↓⊖1 $\qquad$ 점C ↓⊖1

$P\ (a+1,\ 2^{a+1}+k)$ $\qquad$ $C'\ (2^{a+1}+k,\ a+1)$



$$\left|a+1-(2^{a+1}+k)\right|=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow k=-2^{a+1}+a+1+\sqrt{3},\ -2^{a+1}+a+1-\sqrt{3}$$

⇒ $S=-2^{a+2}+2a+2=\frac{2}{3}-2\log_2 3 \quad (\because a=-\log_2 3)$

$2^{-S+\frac{2}{3}}=2^{2\log_2 3}=9$