문제에서 지수함수끼리의 만남이 점 A라 했으니 두 그래프의 교점을 구해보면

$$2^x + \frac{k}{2} = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 2$$

양 변에 2^x을 곱해 이차방정식을 정리해주면

$$A\left(\log_2 \frac{k}{2}, k\right)$$

임을 어렵지 않게 구할 수 있습니다.

이건 첫 번째 레슨 : 고1과정 기억하기(자취의 방정식)

고1때 x좌표와 y좌표가 모두 한 문자로 표현이 되어있다면 어떻게 했는가?

ex) 점 $A(m, m-1)$에 대하여~

이 문장을 보았을 때 대다수의 학생들은 점 A의 자취의 방정식이 $y = x - 1$이다 라고 생각했을 것이다. 하지만 $y = x - 1$이라는 식이 어떻게 구해졌는가?

우선 점 A가 한 문자에 관해 표현이 되어있기 때문에 점 A의 자취를 구해야겠다는 생각과 함께 식 세팅에 들어가면

$$x = m,\ y = m - 1$$

이므로 $y = x - 1$이라는 식이 나왔다.

다시 문제로 돌아와서 현재 A의 좌표가 $(\log_2 \frac{k}{2}, k)$로 설정되어 있다.

즉, 한 문자에 대해 x좌표와 y좌표가 설정되어 있기 때문에

$$x = \log_2 k,\ y = k$$

이므로 점 A의 자취는 곡선 $y = 2^{x+1}$위의 점임을 알 수 있다.

지수/로그함수 그래프 문제에서 지수/로그함수가 2개 이상 등장한다면 항상 둘 사이에 무슨 관계가 있는지 파악해야 한다.

점 A는 $y = 2^{x+1}$위에 있고 점 B는 $y = 2^{x-2} - 3$위에 있기 때문에 두 그래프는 x축방향으로 $+3$만큼, y축 방향으로 -3만큼 평행이동된 관계라는 것을 알 수 있다. 즉, 문제에서 주어진 기울기가 -1인 직선은 점 A가 x축방향으로 $+3$만큼, y축 방향으로 -3만큼 평행이동하여 점 B가 되었다는 것을 알려주는 힌트이다. (수학은 아름답다.)

이를 통해 점 A의 x좌표와 점 B의 x좌표의 차가 3임을 아주 쉽게 알 수 있다.

이건 두 번째 레슨 : 눈치코치로 찍기

점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-2}-3$위의 점 $B(\alpha, 2^{\alpha-2}-3)$을 지난다고 가정하면, 두 점은 모두 기울기가 -1인 직선 위에 있으므로

$$\alpha+2^{\alpha-2}-3=\log_2\frac{k}{2}+k=\text{(어떤 상수)}$$

가 성립합니다. (기울기가 -1인 직선 위 모든 점의 x좌표$+y$좌표의 합은 일정하다.)
이때 눈치코치가 빠른 친구는 (지수/로그로 된 식)=(지수/로그로 된 식)은 인간의 힘으로 풀 수 없기에(찍어서 나오는 것 제외) 꼭 답이 있다는 믿음을 갖고 위 방정식에 약간의 변형을 주면

$$\alpha-2+2^{\alpha-2}-1=\log_2 k+k-1$$

정도의 식변형이 가능해지는데, 이는 방정식

$$\log_2 x+x-1=\text{(어떤 상수)}$$

의 교점, 즉 $y=\log_2 x$, $y=1-x+$(어떤 상수)의 교점이 유일하므로(증가와 감소의 만남)

$$\alpha-2=\log_2 k$$

로 유일한 값을 갖게 되면서 점 A와 점 B의 x좌표 차이가 3임을 알 수 있게 됩니다.

따라서 $\overline{AB}=3\sqrt{2}$이고 원점과 직선 $x+y=\log_2\frac{k}{2}+k$ 사이의 거리가 $\frac{32}{3\sqrt{2}}$이므로 $\log_2 k+k=\frac{35}{3}$임을 알게 되면 문제는 끝이 납니다.