고토히토리 X 하예은 모의고사 해설지

공통과목 정답

1	①	2	②	3	①	4	③	5	⑤
6	③	7	⑤	8	②	9	③	10	④
11	④	12	③	13	②	14	⑤	15	④
16	7	17	18	18	24	19	28	20	36
21	57	22	217						

확률과 통계 정답

23	⑤	24	③	25	②	26	③	27	④
28	③	29	73	30	96				

미적분 정답

23	⑤	24	①	25	④	26	③	27	②
28	⑤	29	40	30	25				

1. [정답] ①

[출제의도]

[해설]

$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$

따라서 $2^1=2$

2. [정답] ②

[출제의도]

[해설]

구하는 극한식은 $f'(1)$

$f'(x)=3x^2+3$이므로 $f'(1)=3+3=6$

3. [정답] ①

[출제의도]

[해설]

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{25}{12}\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}(\sin\theta+\cos\theta)^2$$

$$=1+\frac{24}{25}=\frac{49}{25}$$

제3사분면이므로 $\sin\theta+\cos\theta<0$

따라서 $-\frac{7}{5}$

4. [정답] ③

[출제의도]

[해설]

$x=1$에서 연속.

좌극한: $\lim_{x\to1^-}(3x-2)=1$

우극한/함숫값: $|1-3+a|=|a-2|$

$|a-2|=1\to a=3$또는$a=1$

모든 a의합$=4$

5. [정답] ⑤

[출제의도]

[해설]

주어진 함수는 $f(x)=(x^2+2x)(x^2-x-1)$입니다.

곱의 미분법을 적용하면 다음과 같습니다.

$f'(x)=(2x+2)(x^2-x-1)+(x^2+2x)(2x-1)$

x=2를 대입하여 계산합니다.

$f'(2)=30$

6. [정답] ③

[출제의도]

[해설]

공비$r,a_1>0$

$a_1r^2(1-r)=36\ldots(1)$

$a_1r^4(1-r)=144\ldots(2)$

(2)를(1)로나눔$\to r^2=4.a_1>0$이므로$r=-2$

대입하면$a_1\times4\times3=36\to a_1=3$

$a_7=3\times(-2)^6=192$

7. [정답] ⑤

[출제의도]

AB 중점 x좌표가 0이므로 점 B는 $(-2,0)$

접선 기울기 $f'(2)=\dfrac{-32-0}{2-(-2)}=-8$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에 $f(1)=-19, f(2)=-32$ 연립.

$f(x)=x^3-20x$ 도출.

$f'(x)=3x^2-20 \rightarrow f'(3)=27-20=7$

8. [정답] ②

[출제의도]

[해설]

밑을 3으로 해석.

$\log_b a=3 \rightarrow a=b^3$

$\log_3(b^3)+2\log_3 b=5\log_3 b=5$ → b=3, a=27

a+b=30

9. [정답] ③

[출제의도]

[해설]

두 정적분 더하면 기함수 소거됨.

$2\int_0^3 bx^2dx=18b=18\sqrt{3}$

$\rightarrow b=\sqrt{3}\int_{\sqrt{3}}^3(ax^3+\sqrt{3}x^2)dx$

$=18a+6\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

$18a=3\sqrt{3} \rightarrow a=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$f(\sqrt{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(3\sqrt{3})+\sqrt{3}(3)=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$

10. [정답] ④

[출제의도]

[해설]

시그마 전개 및 분리.

$\sum_{n=1}^{9}n^2a_{n+1}-\sum_{n=1}^{9}n^2a_n$

$=81a_{10}-\sum_{n=1}^{9}(2n-1)a_n=23$

$81\times3-2\sum_{n=1}^{9}na_n+40=23$

$2\sum_{n=1}^{9}na_n=260 \rightarrow 130$

11. [정답] ④

[출제의도]

[해설]

만나는 시각: $x_1=x_2 \rightarrow t^3-4t^2-t+4=0 \Leftrightarrow \ t=1,4$에서 만남.

속도:$v_1=3(t-1)(t-3), v_2=-4t+10$

P 이동: $\int_1^3-(v_1)dt+\int_3^4(v_1)dt=4+4=8$

Q 이동: $int_1^{2.5}(v_2)dt+\int_{2.5}^4-(v_2)dt=4.5+4.5=9$

이동거리 합 = 8+9=17

12. [정답] ③

[출제의도]

[해설지]

$\overline{AB}=6$. 넓이 2등분 조건:

$\dfrac{1}{2}\times4\times AQ\sin A=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}\times6b\sin A)$ → $\overline{AQ}=\dfrac{3}{4}b$

반지름비 = 현의 비: $\dfrac{\overline{PQ}^2}{\overline{PC}^2}=\dfrac{7}{8}$

코사인법칙$(\cos A=\dfrac{3}{b}$적용$)$: $\overline{PQ}^2=\dfrac{9}{16}b^2-2, \overline{PC}^2=b^2-8$

비율 대입하여 풀면 b=4

$\overline{BQ}^2=6^2+3^2-2\times6\times3\times\dfrac{3}{4}=18 \rightarrow \overline{BQ}=3\sqrt{2}$

13. [정답] ②

[출제의도]

[해설]

13번 문항 해설정답: ②

해설:

두 함수 $y=tx+1$과$y=x^2-kx-2$의 교점의 x좌표는 $x^2-kx-2=tx+1$에서$x^2-(t+k)x-3=0$의 두 근이다.

두 근을 α,β라 하면 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=t+k,\alpha\beta=-3$이다.

두 점 사이의 거리 AB는 다음과 같다.

$$AB=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(t\beta+1-(t\alpha+1))^2}$$
$$=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}AB$$
$$=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(t+k)^2+12}$$

조건 (가)에 의해 $\lim_{t\to 0}AB=\sqrt{1}\sqrt{k^2+12}=4$이므로

$k^2+12=16$

이 된다.

k>0이므로 $k=2$이다.

이를 조건 (나)의 극한식에 대입한다.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{AB-t^2}{kt}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{(1+t^2)((t+2)^2+12)}-t^2}{2t}$$

전개하여 묶으면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^4+4t^3+17t^2+4t+16}-t^2}{2t}$$ 이다.

분자와 분모에 켤레식을 곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^4+4t^3+17t^2+4t+16-t^4}{2t(\sqrt{t^4+4t^3+17t^2+4t+16}+t^2)}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^3+17t^2+4t+16}{2t(\sqrt{t^4+\ldots}+t^2)}$$

최고차항인 t^{3}의 계수비로 수렴하므로 $\frac{4}{2(1+1)}=1$이다.

14. [정답] ⑤

[출제의도]

[해설]

선분 AB의 중점 $M(b+1,b)$이라 하자.

선분 AB의 중점 M은 직선 y=x-1 위에 있다.

또한 점 A, B를 지나는 직선 l의 기울기가 -1이므로,

직선 l은 직선 y=x-1과 수직이다.

따라서 점 A와 점 B는 직선 y=x-1에 대하여 완벽하게 대칭이다.

점 B가 곡선 $y=\log_a(x-1)-1$ 위의 점이므로,

이를 직선 y=x-1에 대하여 대칭이동시킨 점 A가 지나는 자취를 구해보자.

$x\to y+1,y\to x-1$을 대입하면 $x-1=\log_a(y+1-1)-1$이 된다.

정리하면 $x=\log_a y$이므로,

점 A는 반드시 곡선 $y=a^x$ 위에 존재해야 한다.

그런데 문제의 조건에서 점 A는 곡선 $y=a^{2x}-12$ 위의 점이기도 하다.

따라서 점 A에서는 두 곡선이 교차해야 하므로 $a^x=a^{2x}-12$가 성립한다.

$$(a^x)^2-a^x-12=0$$
$$(a^x-4)(a^x+3)=0$$

$a>1$이므로 $a^x>0$이다. 따라서 $a^x=4$이다.

즉, 점 A의 y좌표는 4이다.

점 A의 좌표를 $(x_A,4)$라 하자.

직선 l은 기울기가 -1이고 점 M(b+1, b)를 지나므로 직선의 방정식은 $x+y=2b+1$이다.

점 A가 직선 l 위에 있으므로 $x_A+4=2b+1$에서 $x_A=2b-3$이다. 즉, A(2b-3, 4)이다.

점 B는 점 A를 y=x-1에 대칭시킨 점이므로

B(4+1, 2b-3-1), 즉 B(5, 2b-4)이다.

조건에서 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작으므로 2b-3 < 5에서 b < 4이다.

선분 AB의 길이는

$$AB=\sqrt{(5-(2b-3))^2+(2b-4-4)^2}$$ 이다.
$$=\sqrt{2(8-2b)^2}=\sqrt{2}(8-2b)$$

원점에서 직선 $x+y-(2b+1)=0$까지의 거리는

$d = \frac{|-(2b+1)|}{\sqrt{2}} = \frac{2b+1}{\sqrt{2}}$ 이다. (단, b>0)

삼각형 OAB의 넓이가 10이므로

$\frac{1}{2} \times AB \times d = 10$

$\frac{1}{2} \times \sqrt{2}(8-2b) \times \frac{2b+1}{\sqrt{2}} = 10$

$(4-b)(2b+1) = 10$

$-2b^2 + 7b + 4 = 10$

$2b^2 - 7b + 6 = 0$

$(2b-3)(b-2) = 0$이므로 $b = \frac{3}{2}$또는$b = 2$이다.

경우 1) $b = \frac{3}{2}$일 때

$x_A = 2b - 3 = 0$이므로 A(0, 4)이다.

점 A가 $y = a^x$ 위의 점이므로 $a^0 = 4$가되어$1 = 4$라는 모순이 발생한다.

경우 2)$b = 2$일 때

$x_A = 2(2) - 3 = 1$이므로 A(1, 4)이다.

점 A가 $y = a^x$ 위의 점이므로 $a^1 = 4$가 되어 a=4이다.

(a>1 조건 만족)

따라서 a=4, b=2이므로 a+b = 6이다.

15. [정답] ④

[출제의도]

[해설]

조건 (가)의 양변을 미분하면 $f(x) + xg(x) = 6x^3 + 4x^2 + 2ax$

조건 (나)의 $f(x) = x^2 g'(x)$를 대입하여 양변을 x로 나누면

$xg'(x) + g(x) = 6x^2 + 4x + 2a$

좌변은 $\{xg(x)\}'$이므로 적분하면

$xg(x) = 2x^3 + 2x^2 + 2ax \rightarrow g(x) = 2x^2 + 2x + 2a$

g(1)=6이므로 2+2+2a=6 → a=1

$g'(x) = 4x + 2$이므로$f(x) = x^2(4x+2) = 4x^3 + 2x^2$

따라서 f(2)=4(8)+2(4)=40

16. [정답] 7
[출제의도]
[해설]
진수 조건에 의해 x>1

$\log_2(x-1)-\frac{1}{2}\log_2(x+2)=1$

양변에 2를 곱하면 $2\log_2(x-1)-\log_2(x+2)=2$

$\log_2\frac{(x-1)^2}{x+2}=2 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{x+2}=4$

$x^2-2x+1=4x+8 \rightarrow x^2-6x-7=0$

(x-7)(x+1)=0이며 x>1이므로 x=7

17. [정답] 18
.주어진 식은 $xf(x)=F(x)+2x^3+2x^2$이다.

양변을 미분하면 $f(x)+xf'(x)=f(x)+6x^2+4x$

$xf'(x)=6x^2+4x \rightarrow f'(x)=6x+4$

적분하면 $f(x)=3x^2+4x+C$이고, $f(0)=1$이므로 C=1. 즉 $f(x)=3x^2+4x+1$

$F(x)=\int f(x)dx=x^3+2x^2+x$(상수항은 원식에 x=0 대입시 0)

따라서 $F(2)=8+8+2=18$

18. [정답] 39
[출제의도]
[해설]

$\sum_{n=2}^{8} g(n)=10$과 $\sum_{n=6}^{12} g(n)=10$

조건을 만족하려면 이차함수 f(x)의 부호 변화가 특정되어야 한다.

두 합이 10이 되기 위한 유일한 근의 배치는 f(2)=0, f(12)=0일 때이다.

따라서 $f(x)=a(x-2)(x-12)$이며 $f(1)=-11$을 대입하면 a(-1)(-11)=-11 → a=-1

$f(x)=-(x-2)(x-12)$이므로 $|f(15)|=|-(13)(3)|=39$

19. [정답] 28
[출제의도]
[해설]

방정식 $f(x)=3a-8$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 상수함수와 접해야 한다.

접점의 x좌표를 α라 하면, 해당 점에서 미분계수는 0이고 함숫값은 3a-8이다.

$f'(\alpha)=3\alpha^2-6\alpha+a=0$ ... (1)
$f(\alpha)=\alpha^3-3\alpha^2+a\alpha=3a-8$ ... (2)
계산시

$(\alpha-1)^2(\alpha-4)=0$이다.

$\alpha=1$이면 a=3이 되어 $f'(x)=3(x-1)^2 \geq 0$이므로 극값이 존재하지 않아 모순이다.

따라서 $\alpha=4$이고, 대입하면 $a=-3(16)+6(4)=-24$이다.

$f(x)=x^3-3x^2-24x$이므로

$a-f(2)=-24-(-52)=28$

20.
[정답] 36
[출제의도]
[해설]
조건 (나)에 의해 수열은 이전 항에 k를 곱하거나 2를 더해 생성된다.
$a_1+a_2=k, a_3+a_4=2k, a_5=a_6=8$을 만족하는 역추적 경로를 조사한다.
$a_3, a_4 \in \frac{8}{k,} 6$의 조합 중 자연수 k가 도출되는 경우는 $k=4$뿐이다.
이때 가능한 초기항 쌍은
$(a_1=0, a_2=4)$또는$(a_1=4, a_2=0)$이다.
첫 번째 경우 $\sum_{n=1}^{3} na_n = 0+8+6=14$
두 번째 경우 $\sum_{n=1}^{3} na_n = 4+0+18=22$
모든 값의 합은 $14+22=36$

21.
[정답] 57
[출제의도]
[해설]
$k \le 0$이면 극한안에 값이 항상 0이상이므로 최솟값 음수조건에 모순이다.
따라서 $k>0$이다.

함수 g(x)가 실수 전체에서 연속이므로 x=0에서 연속이어야 한다.
$g(0^-)=0$이므로 $g(0^+)=f(0)=0$이다.
주어진 극한으로 정의된 함수를 $h(x)$라 하자.
$h(x)=\lim_{t\to x}\frac{|g(t)-g(-k)|}{|t|-k}$
먼저 $x<0$ 구간에서 h(x)를 구한다.
$g(x)=x^3-3k^2x$이고, $g(-k)=-k^3+3k^3=2k^3$이다.
$h(x)=\frac{|x^3-3k^2x-2k^3|}{-x-k}=\frac{|(x+k)^2(x-2k)|}{-(x+k)}$
$k>0$이고 $x<0$이므로 $x-2k<0$이다.

$h(x)=\frac{-(x+k)^2(x-2k)}{-(x+k)}=(x+k)(x-2k)=x^2-kx-2k^2$
x=0에서의 좌미분계수를 구하면 $h(0^-)=-2k^2$이고
$h'(0^-)=-k$이다.
다음으로 $x \geqq 0$ 구간에서 $h(x)$를 구한다.
$h(x)=\frac{|f(x)-2k^3|}{x-k}$
$h(x)$가 $x=k$에서 미분가능하려면, 분자의 절댓값 안의 함수가 x=k에서 부드럽게 연결되어야 하므로 $(x-k)^2$을 인수로 가져야 한다.
$f(x)-2k^3=a(x-k)^2(x-m)$으로 둘 수 있다.
f(0) = 0이므로 $a(-k)^2(-m)=-2k^3$에서 $am=2k$이다.
$x \geqq 0$ 구간에서 h(x)가 미분가능하려면 절댓값 기호가 벗겨질 때 꺾임이 없어야 하므로 $m \leqq 0$이어야 한다.
$am=2k>0$이고 $m \le 0$이므로 필연적으로 $a<0$이다.
따라서 $x \ge 0$일 때
$x-m \ge 0$이므로 $|a(x-m)|=-a(x-m)$이 된다.

$h(x)=\frac{(x-k)^2|-a(x-m)|}{x-k}=-a(x-k)(x-m)$

$h(x)=-ax^2+a(k+m)x-akm$

이제 x=0에서의 우미분계수와 좌미분계수가 같아야 미분가능하다.

$h'(0^+)=a(k+m)=ak+am$

앞서 구한 am = 2k를 대입하면 $h'(0^+)=ak+2k=(a+2)k$ 이다.

좌미분계수와 같아야 하므로 $a=-3$ $m=-\frac{2}{3}k$이다.

따라서 $x \geq 0$ 구간의 h(x)는 다음과 같다.

$h(x)=3(x-k)(x+\frac{2}{3}k)=3x^2-kx-2k^2$

이 이차함수는 대칭축이 $x=\frac{k}{6}$일 때 최솟값을 갖는다.

주어진 조건에서 최솟값이 $-\frac{75}{4}$이므로:

$-\frac{25}{12}k^2=-\frac{75}{4}$

양변을 정리하면 $k=3$이다.

결론적으로 f(x)의 식을 완성하면 다음과 같다.

$f(x)-54=-3(x-3)^2(x+2)$

구하고자 하는 f(3)의 값은 식에 x=3을 대입하여 f(3)-54 = 0 즉, f(3) = 54를 얻는다.

최종적으로 구하는 값은 다음과 같다.

k+f(3) = 3+54 = 57

22. [정답] 217

[출제의도]

[해설]

$(1)a<k$ 일 때, (가)를 만족시킬 조건

두 함수 $f(x)=a+\sin 6x$와$g(x)=k\cos ax$ 가 있다.

$f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

조건 (가)에서$f(\alpha_1)=f(\alpha_n)$을 만족하는 α_n의 최솟값이

$\alpha_1+\frac{\pi}{3}$ 이 되려면 , $g(x)$ 역시 주기성을 공유하여

$g(\alpha_1)=g(\alpha_1+\frac{\pi}{3})$이 성립해야 한다.

또한 $g(x)$가 대칭성을 띠어

불필요한 교점이 발생하지 않아야 하므로,

$a=6(2m-1)$(단,m은자연수)꼴이다.

$(2)a<k$일 때, 가능한 a의 값구간 $[0,\frac{\pi}{3}]$에서

$f(x)$와 $g(x)$의 교점의 개수를 구해 보면 ,

$k>a$로 인해 $g(x)$의 한 주기당 교점이 2개씩 발생하므로

한 주기 내 총 교점의 개수는 $2(2m-1)=4m-2$ 개다.

조건 (나)에서 $f(\alpha_{13})>f(\alpha_{12})$ 이고

$f(\alpha_{13})>f(\alpha_{14})$이므로,

α_{13}은 $f(\alpha_n)$의 값이 극대가 되는 교점이어야 한다.

$[0,\frac{\pi}{3}]$ 구간에서 첫 번째 극대 교점의 순번은 m 번째이며, 이후 각 주기마다 $4m-2$개의 교점이 추가되므로,

j번째 주기(단, j는 0 이상인 정수)에서의 극대 교점 순번은 $m+j(4m-2)$가 된다.

따라서 $m+j(4m-2)=13$을 만족해야 하며,

이를 m에 대해 정리하면 $2m=1+\frac{25}{(4j+1)}$ 이다. 이를 만족하는 자연수 j와 m의 쌍을 찾으면 다음과 같다.

$j=0$ 일 때, $m=13$ 이므로 $a=6(25)=150$

$j=1$ 일 때, $m=3$ 이므로 $a=6(5)=30$

$j=6$ 일 때, m = 1 이므로 $a=6(1)=6$

그러므로 a < k 일 때 가능한 a의 값은 6, 30, 150이다.

(3) $a=k$ 일 때, (가)를 만족시킬 조건$a=k$ 인 경우에도 조건 (가)의 주기성 및 대칭성 조건에 의해 $a=6(2m-1)$ 이다.

다만 $k=a$ 이므로 g(x)의 최댓값은 a가 되며, f(x)의 함숫값이 a 이하인 구간에서만 두 그래프가 만난다.

(4) $a=k$ 일 때, 가능한 a의 값구간 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$에 해당하는 '계곡' 구간에서 교점이 2m - 1 개 발생하고 ,
주기의 경계인 $x=0$ (극대점)에서 교점이 1개 발생하므로

한 주기인 $[0,\frac{\pi}{3}]$ 당 발생하는

전체 교점의 개수는 $(2m-1)+1=2m$ 개다.

한 주기에 교점이 2m 개씩 나타나므로,
수열 $f(\alpha_n)$ 이 최댓값을 찍는 교점은 주기가 시작될 때마다 발생한다.
따라서 교점의 순번은 $1+p(2m)$ (단, p는 0 이상인 정수) 꼴이 된다. 조건 (나)를 만족하려면 13번째 항에서 극대를 가져야 하므로 $1+p(2m)=13$ 에서 p(2m) = 12 가 성립해야 한다.
12의 약수 중 짝수인 2m의 값은 2, 4, 6, 12 이다.
$2m=2$일 때, $m=1$ 이므로 $a=6(1)=6$
$2m=4$ 일 때, $m=2$ 이므로 $a=6(3)=18$
$2m=6$ 일 때, $m=3$ 이므로 $a=6(5)=302m=12$ 일 때, m = 6 이므로 $a=6(11)=66$
그러므로 $a=k$ 일 때 가능한 a의 값은 $6,18,30,66$이다.

(5) k의 최솟값과 두 번째로 작은 값 도출

종합하면, 주어진 k에 대해 조건을 만족하는 a의 집합은 다음과 같이 결정된다.
$a<k$ 조건
집합 A_밑에서 k보다 작은 값: {6, 30, 150}
a = k 조건
집합 A_같음에서 k와 같은 값: {6, 18, 30, 66}
이 두 경우를 합쳐 a의 개수가 3개가 되는 k를 찾는다.
k = 66 인 경우: A_밑에서 6, 30이 선택되고,
A_같음에서 66이 선택되어 {6, 30, 66} 으로 총 3개이다.
(조건 만족)

67 이상 150 이하인 경우: A_밑에서 6, 30만 선택되고 150은 제외되며,
A_같음에서는 해당하는 값이 없어 총 2개이다.
k = 151 이상인 경우: A_밑에서 6, 30, 150이 모두 선택되어 총 3개이다.
(조건 만족)
따라서 a의 개수가 3이도록 하는 k의 최솟값은 66 이고, 두 번째로 작은 값은 151 이다.

확률과 통계

23. [정답] ⑤
[출제의도]
$\frac{5!}{2!}=\frac{120}{2}=60$

24. [정답] ③
[출제의도]
[해설]
사건 A와 B의 여사건이 서로 배반사건이므로 $A\cap B^c=\varnothing$, 즉 $A\subset B$이다.
따라서$A\cap B=A$가 성립한다.
조건부 확률을 계산하면:
$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$$
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}P(A)$$
주어진 식에 대입한다.
$$1+\frac{3}{2}P(A)=\frac{5}{4}\rightarrow\frac{3}{2}P(A)=\frac{1}{4}\rightarrow P(A)=\frac{1}{6}$$
구하는 값은 $P(A\cap B)=P(A)=\frac{1}{6}$

25. [정답] ②
[출제의도]
[해설]
6명이 원탁에 앉는 전체 경우의 수는 (6-1)! = 120이다.
A가 먼저 자리에 앉는다고 고정(1가지)하면, 남은 5개의 자리 중 A의 양옆 2자리를 제외한 3자리에 B와 C가 앉아야 이웃하지 않는다.
B, C가 빈 3자리에 앉는 경우의 수: ${}_3P_2=6$
나머지 3명이 남은 3자리에 앉는 경우의 수: 3! = 6
조건을 만족하는 경우의 수는 $1\times6\times6=36$이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$이다.

26.[정답] 4
[출제의도]
[해설]
95% 신뢰구간 $(a\leq m\leq b)$의 길이를 이용한다.
$$b-a=2\times2\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=\sigma$$
99% 신뢰구간 $(b\leq m\leq a+16)$의 길이를 이용한다.
$$(a+16)-b=2\times2.5\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}=\sigma$$
두 번째 식에서 $a-b+16=\sigma$이고,
첫 번째 식에서 $a-b=-\sigma$이므로 이를 대입한다.
$-\sigma+16=\sigma\rightarrow2\sigma=16\rightarrow\sigma=8$

27. [정답] ④
[출제의도]
[해설]
조건 (가)에서 $a+b, b+c, c+a$ 중 짝수가 1개이려면
세 수 a, b, c 중 2개는 홀수, 1개는 짝수이거나 2개는 짝수, 1개는 홀수여야 한다.
즉, 세 수의 홀짝성이 모두 같으면 안 된다.
전체 순서쌍은 $a+b+c\leq12$ (자연수)를 만족해야 한다.
$a'=a-1, b'=b-1, c'=c-1$로 치환하면 음이 아닌 정수해의 합과 같다.
전체 경우의 수: ${}_3H_0+\dots+{}_3H_9={}_4H_9={}_{12}C_9=220$
(1) 세 수가 모두 짝수인 경우 (2x, 2y, 2z):
$2(x+y+z)\leq12\rightarrow x+y+z\leq6$.
경우의 수는 ${}_4H_3={}_6C_3=20$
(2) 세 수가 모두 홀수인 경우 (2x-1, 2y-1, 2z-1):
$2(x+y+z)-3\leq12\rightarrow x+y+z\leq7$.
경우의 수는 ${}_4H_4={}_7C_4=35$
따라서 조건을 만족하는 개수는 220 - 20 - 35 = 165이다.

28. [정답]
[출제의도]
[해설]
초기 8개 공의 합은 36(짝수)이므로 첫 시행에서는 2개를 꺼낸다. 합이 9인 쌍이 존재하지 않을(여사건) 확률을 경로별로 구한다.
(1) 첫 시행 합이 짝수인 경로: (홀, 홀) 또는 (짝, 짝)

확률: $\frac{{}_4C_2 + {}_4C_2}{{}_8C_2} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$

남은 공의 합이 짝수이므로 두 번째도 2개를 꺼낸다 (총 4개 남음). 남은 4개가 합이 9인 쌍이 없는 4개의 단일 공(16가지 조합)이 되도록 꺼내는 조건부 확률은 {4} over {15}이다.

기여분 $= \frac{3}{7} \times \frac{4}{15} = \frac{4}{35}$

(2) 첫 시행 합이 홀수인 경로: (홀, 짝)

확률: $\frac{{}_4C_1 \times {}_4C_1}{{}_8C_2} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$

남은 공의 합이 홀수이므로 두 번째는 3개를 꺼낸다 (총 3개 남음). 남은 3개가 단일 공(32가지 조합)이 되도록 꺼내는 조건부 확률은 $\frac{11}{20}$이다.

기여분 $= \frac{4}{7} \times \frac{11}{20} = \frac{11}{35}$

총 여사건 확률 $= \frac{4}{35} + \frac{11}{35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$

구하는 확률은 $1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$이다.

29. [정답] 360
[출제의도]
[해설]
세 상자의 최솟값을 $m_1 < m_2 < m_3$이라 하면 확률변수 X = m_3이다. 숫자 1은 반드시 어느 한 상자의 최솟값이 되므로 $m_1 = 1$로 고정된다.

전체분할의수$= \frac{{}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3}{3!} = 280$

$X \le x$이려면 모든 상자의 최솟값이 x 이하가 되어야 하므로, $1, 2, \ldots, x$의 원소들이 3개의 상자에 적어도 하나씩 들어가야 한다.

$X = 3 : 1, 2, 3$이

각 상자에 분배. $N(X=3) = \frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{3!} = 15$

$X \leq 4 : 1, 2, 3, 4$를 (2, 1, 1)로 분배.
$N(X \le 4) = 180 \rightarrow N(X=4) = 180 - 15 = 165$
X <= 5: 동일 원리로
$N(X \le 5) = 240 \rightarrow N(X=5) = 240 - 180 = 60$
X=7: 한 상자가 {7, 8, 9}로 묶여야 하므로 N(X=7) = {
$\frac{{}_6C_3 \times {}_3C_3}{2!} = 10$
X=6: 나머지 분할.
$N(X=6) = 280 - (15 + 165 + 60 + 10) = 30$
기댓값을 계산하면 다음과 같다.

$E(X) = \frac{3 \times 15 + 4 \times 165 + 5 \times 60 + 6 \times 30 + 7 \times 10}{280} = \frac{1255}{280} =$

따라서 p=56, q=251이며, p+q = 307이다.

30. [정답] 96
[출제의도]
[해설]
((가)에 의해 두 집합 $A = f(1), f(2), f(3)$와 $B = f(4), f(5), f(6)$의 원소의 합이 각각 8이어야 한다.
합이 8인 3개 자연수의
중복조합은 $(6,1,1), (5,2,1), (4,3,1), (4,2,2), (3,3,2)$로 5가지이다.

조건 (다) f(1) <= f(2) <= f(3)에 의해 집합 A를 구성하는 경우의 수는 각 조합당 1가지이므로 총 5가지이다.
집합 B는 순서 제한이 없으므로 같은 것이 있는 순열을 적용하면 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 21가지이다.
전체 함수 개수: $5 \times 21 = 105$
조건 (나)를 위반하여 치역의 원소가 2개 이하인 경우는 A와 B가 동일한 2개의 숫자로만 이루어진 조합을 선택할 때뿐이다.
가능한 조합은 A와 B가 모두 (6,1,1)이거나, 모두 (4,2,2)이거나, 모두 (3,3,2)인 3가지 경우이다.
각 경우마다 A는 1가지, B는 3가지이므로 $1 \times 3 = 3$가지씩 발생한다.
제외할 경우의 수 = 3 + 3 + 3 = 9
따라서 조건을 만족하는 함수의 개수는 105 - 9 = 96이다.