수학 영역

KSM

5지선다형

1. $2^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{32}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

2. 곡선 $y = x^3 + 2x - 1$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$y' = 3x^2 + 2$

$1 \to 5$

3. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{d}{dx}f(x) = 3x^2 - 5$이고 $f(0) = 1$일 때, $f(1)$의 값은? [3점]

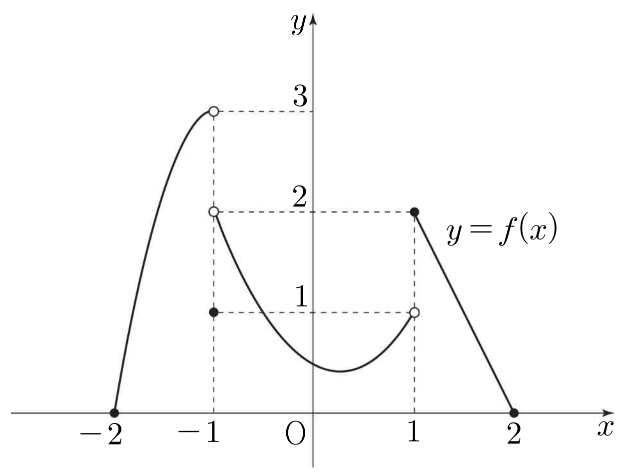
① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$f'(x) = 3x^2 - 5$

$f(x) = x^3 - 5x + 1$

$f(1) = -3$

4. 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$3+2$

5. 원점을 지나는 곡선 $y=2^{x-a}+b$의 점근선이 직선 $y=-4$일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

$b=-4$

$y=2^{x-a}+4$ $(0,0)$

$0=2^{-a}+4$, $a=-2$

$\therefore a+b=-6$

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin bx+1$의 주기가 3π이고 최댓값과 최솟값의 차가 6일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

$\frac{2\pi}{b}=3\pi$, $b=\frac{2}{3}$

$(a+1)-(-a+1)=6$

$a=3$, $a+b=\frac{11}{3}$

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_a^x f(t)dt=x^2-3ax+2$$

를 만족시킨다. $f(0)>0$일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$x=a \rightarrow$ $0=a^2-3a^2+2$, $a=1,-1$

양변미분 $\Rightarrow$ $f(x)=2x-3a$

$f(0)=-3a>0$ $\therefore a=-1$

$f(2)=4-3a=7$

8. 첫째항이 음수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 \times a_5 = 36, \quad a_3 + 2a_4 = 2$$

를 만족시킬 때, a_2의 값은? [3점]

① 3　　② 6　　③ 9　　④ 12　　⑤ 15

$a_1<0 \to a_3<0$

$a_1 \times a_5 = a_3^2 = 36 \quad \therefore a_3 = -6$

$\Rightarrow -6 + 2a_4 = 2$

$a_4 = 4$

$a_2 a_4 = a_3^2$

$a_2 = 9$

9. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = (x^2+x)f(x)$$

라 하자. $\lim_{h \to 0} \frac{g(1+h)-4}{h} = 9$일 때, $f(1) \times f'(1)$의 값은? [4점]

① 3　　② $\frac{9}{2}$　　③ 6　　④ $\frac{15}{2}$　　⑤ 9

$g(1) = 4$

$g'(1) = 9$

$g(1) = 2f(1) = 4 \quad \therefore f(1) = 2$

$g'(x) = (2x+1)f(x) + (x^2+x)f'(x)$

$g'(1) = 3f(1) + 2f'(1)$

$= 6 + 2f'(1) = 9$

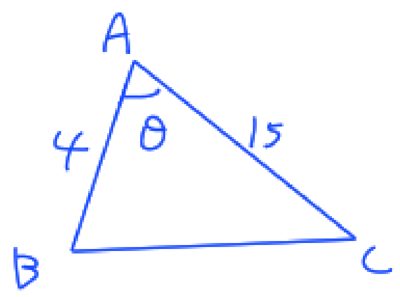
$\therefore f'(1) = \frac{3}{2}$

$f(1) \times f'(1) = 3$

10. 각 A가 예각인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는? [4점]

> (가) $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 15$
> (나) 삼각형 ABC의 넓이는 24이다.

① $\frac{15}{2}$　　② $\frac{65}{8}$　　③ $\frac{35}{4}$　　④ $\frac{75}{8}$　　⑤ 10



$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 15 \cdot \sin\theta = 24$

$\sin\theta = \frac{4}{5} \to \cos\theta = \frac{3}{5} \quad (\because 0 < \theta < 90^\circ)$

$\overline{BC}^2 = 15^2 + 4^2 - 2 \cdot 15 \cdot 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)$

$= 241 - 72 = 169$

$\overline{BC} = 13, \quad 2R = \frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = 13 \times \frac{5}{4} = \frac{65}{4}$

$\therefore R = \frac{65}{8}$

11. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 값의 합은? [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} -2a_n & (a_n<0) \\ a_n-3 & (a_n\geq 0) \end{cases}$$
> 이다.
>
> (나) $a_3=a_1+4$

① $-\dfrac{2}{3}$ ② -1 ③ $-\dfrac{4}{3}$ ④ $-\dfrac{5}{3}$ ⑤ -2

a_1 a_2 a_3

$\alpha<0$: $\alpha \to -2\alpha \to -2\alpha-3 \to -2\alpha-3=\alpha+4$, $\alpha=-\frac{7}{3}$

$\alpha\geq 0$: $\alpha \to \alpha-3$

$0\leq\alpha<3$: $-2\alpha+6 \to -2\alpha+6=\alpha+4$, $\alpha=\frac{2}{3}$

$\alpha\geq 3$: $\alpha-6 \to \alpha-6=\alpha+4$ (X)

$\therefore -\frac{7}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{5}{3}$

12. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-11t+8$$

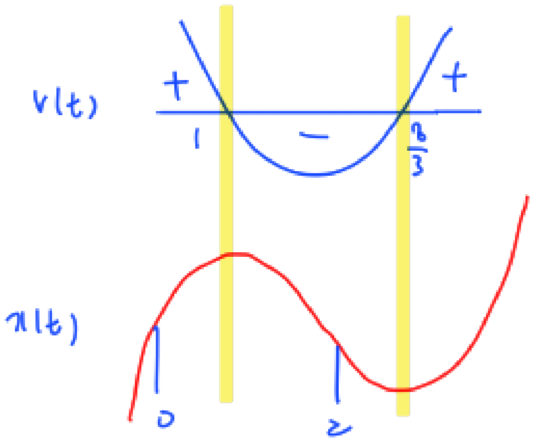
이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.
ㄴ. 점 P의 가속도가 1이 되는 순간 점 P의 위치는 2이다.
ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 6이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$v(t)=(3t-8)(t-1)$, $x(t)=t^3-\frac{11}{2}t^2+8t$



ㄱ. (+) → (−) (O)

ㄴ. $a(t)=6t-11=1$, $t=2 \to x(2)=8-22+16=2$

ㄷ. $x(0)=0$
$x(1)=\frac{7}{2}$ $\therefore \frac{7}{2}+\frac{3}{2}=5$
$x(2)=2$

13. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(28)$의 값은? [4점]

> (가) $0 \le x \le 12$인 모든 실수 x에 대하여
>
> $$(\sqrt{2x+1}-1)\times f(x)=ax$$
>
> 이다. (단, a는 상수이다.)
>
> (나) 모든 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$에서 x의 값이 k에서 $k+12$까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{1}{2}$이다.

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

$0<x\le 12$ $\quad f(x)=\dfrac{ax}{\sqrt{2x+1}-1}=\dfrac{a}{2}(\sqrt{2x+1}+1)$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=a=f(0)$

(나) $\dfrac{f(k+12)-f(k)}{(k+12)-k}=\dfrac{1}{2}$

$f(k+12)=f(k)+6$, $\quad f(12)=f(0)+6$

$3a=a+6$

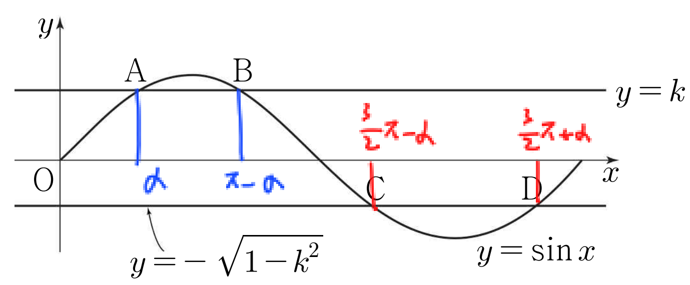
$\therefore a=3$

$f(28)=f(16)+6$

$=f(4)+12$

$=2a+12=18$

14. 그림과 같이 곡선 $y=\sin x\,(0\le x\le 2\pi)$가 직선 $y=k$와 만나는 두 점을 A, B라 하고, 직선 $y=-\sqrt{1-k^2}$과 만나는 두 점을 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2}{9}\pi$일 때, 선분 AB의 길이는? (단, k는 $0<k<1$인 상수이다.) [4점]



① $\frac{13}{36}\pi$ ② $\frac{3}{8}\pi$ ③ $\frac{7}{18}\pi$ ④ $\frac{29}{72}\pi$ ⑤ $\frac{5}{12}\pi$

$\sin\alpha=k \quad (0<\alpha<\frac{\pi}{2})$

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-k^2$

$\cos\alpha=\sqrt{1-k^2}=-\sin(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha)$

$\therefore \sin(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha)=-\sqrt{1-k^2}$

$C(\frac{3\pi}{2}-\alpha,\ -\sqrt{1-k^2})$

$\overline{CD}-\overline{AB}=2\alpha-(\pi-2\alpha)=4\alpha-\pi=\frac{2}{9}\pi$

$\therefore \alpha=\frac{11}{36}\pi$

$\overline{AB}=\pi-2\alpha=\frac{7}{18}\pi$

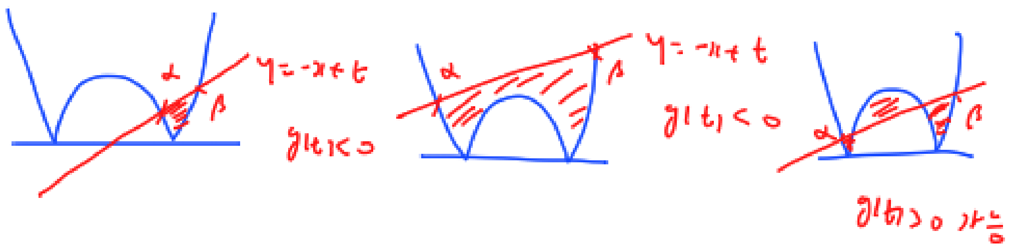
15. $p>1$인 상수 p에 대하여 함수 $f(x)=x^2-px$가 있다. 실수 $t\,(t>-p)$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=x+t$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. 열린구간 $(-p,\infty)$에서 정의된 함수

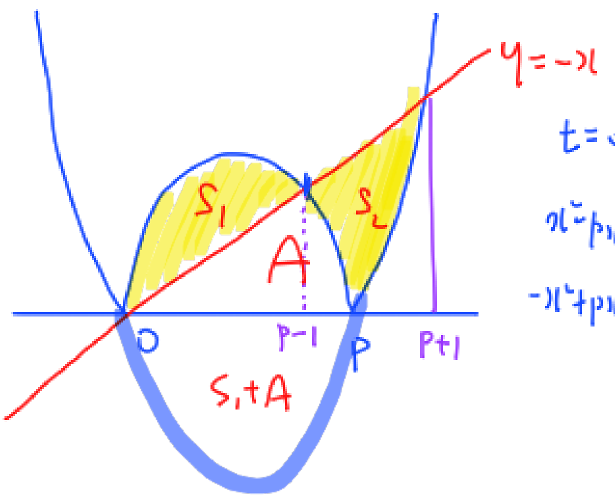
$$g(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\{|f(x)|-(x+t)\}dx$$

의 최댓값이 $\frac{1}{2}$일 때, p의 값은? [4점]

$x(x-p)$

① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4





$t=0,\ g(0)=\frac{1}{2}$

$x^2-px=x \to x=0,\ p+1$

$-x^2+px=x \to x=0,\ p-1$

$g(0)=\frac{1}{2}=S_1-S_2$

$=(S_1+A)-(S_2+A)$

$=2(S_1+A)-(S_1+S_2+2A)$

$=2\times\frac{1}{6}p^3-\frac{1}{6}(p+1)^3=\frac{1}{2}$

$2p^3-(p+1)^3=3$

$p^3-3p^2-3p-4=0$

$64-48-12-4=0$

$(p-4)(p^2+p+1)=0 \quad \therefore p=4$

단답형

16. 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}\pi$인 부채꼴의 넓이는 $a\pi$이다. a의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{24}$

$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\cdot 64\cdot\frac{3}{4}\pi=24\pi$

17. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{7}a_{2k}=\sum_{k=1}^{7}(k^2-a_{2k-1})$일 때, $\sum_{k=1}^{14}a_k$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{140}$

$\sum_{k=1}^{7}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{7}k^2=\frac{7\cdot 8\cdot 15}{6}=140$

$\parallel$

$\sum_{k=1}^{14}a_k$

18. 방정식

$$\log_2(x-4)=\log_{\frac{1}{2}}(x-6)+3$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{8}$

$x>6$, $\log_2(x-4)+\log_2(x-6)=3$

$\log_2(x^2-10x+24)=\log_2 8$

$x^2-10x+24=8$

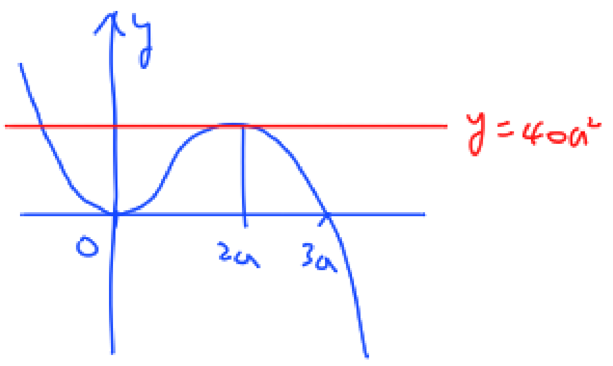
$x^2-10x+16=0$

$x=2, 8$ $\therefore x=8$ $(\because x>6)$

19. x에 대한 방정식 $x^3-3ax^2+40a^2=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 1일 때, 양수 a의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{10}$

$40a^2=-x^2(x-3a)$



$2a \Rightarrow 4a^3=40a^2$

$\therefore a=10$

20. 첫째항이 8인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{155}$

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$b_n=\begin{cases}-2a_n & (a_n \le 0) \\ a_n & (a_n>0)\end{cases}$$
>
> 이다.
>
> (나) $b_3+b_5=2b_4+6$, $b_4+b_6=2b_5$

$d \ge 0 \Rightarrow b_n=a_n$ (×)

$d<0$

	a_n	b_n
1	8	8
2		
3	$8+2d$	
4	$8+3d$	
5	$8+4d$	
6		

(나) b_3, b_4, b_5 : 등차 ×

b_4, b_5, b_6 : 등차

$\Downarrow$

$n=4$ 부호변화

$a_3=8+2d>0$

$a_4=8+3d \le 0$

$-4<d\le -\frac{8}{3}$

$b_3=8+2d$, $b_4=-6d-16$, $b_5=-8d-16$

$b_3+b_5=2b_4+6$

$-6d-8=-12d-26$, $d=-3$

$a_n=-3n+11$

$b_n=\begin{cases}-3n+11 & (1\le n\le 3) \\ 6n-22 & (n\ge 4)\end{cases}$

$\sum_{k=1}^{10} b_k=(8+5+2)+\frac{7(2+38)}{2}$

$=15+140=155$

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 양수 p와 실수 $k(k\neq 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<p) \\ kf(x-p) & (x\geq p)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) x에 대한 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 $2p$이다.

함수 $g(x)$의 극값 중 가장 큰 값이 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{55}$

(가) $f(p)=kf(0)=0$, $f'(p)=kf'(0)$

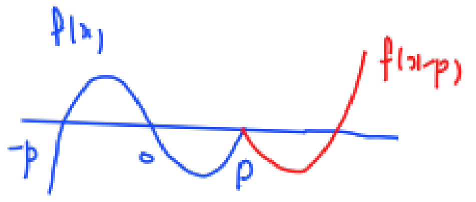
$f(x)=x(x-p)(x-a)$

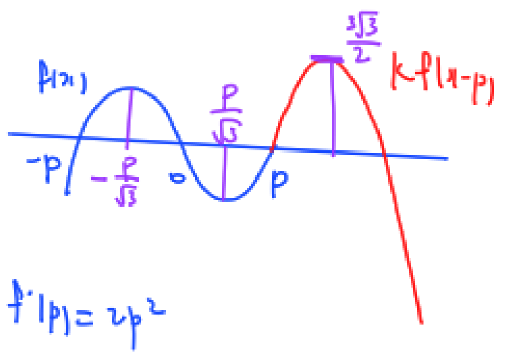
$g(x)=\begin{cases} x(x-p)(x-a) & (x<p) \\ 0,\ p,\ a & \\ k(x-p)(x-2p)(x-p-a) & (x\geq p) \\ p,\ 2p,\ p+a & \end{cases}$

$g(x)=0$ 실근 합 $2p \Rightarrow a<0$ ($a\geq 0$면 실근합$>2p$)

$p+2p+a=2p \to a=-p$

$f(x)=x(x-p)(x+p)$





$f'(p)=2p^2$

$f'(0)=-p^2$

$kf'(0)=-kp^2=2p^2$, $k=-2$

$f(x)=x(x^2-p^2)$

$f\left(\frac{p}{\sqrt{3}}\right)\times(-2)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\frac{p}{\sqrt{3}}\left(-\frac{2p^2}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ $\therefore p^3=\frac{27}{8}$, $p=\frac{3}{2}$

$f(x)=x\left(x^2-\frac{9}{4}\right)$, $f(4)=4\left(16-\frac{9}{4}\right)$

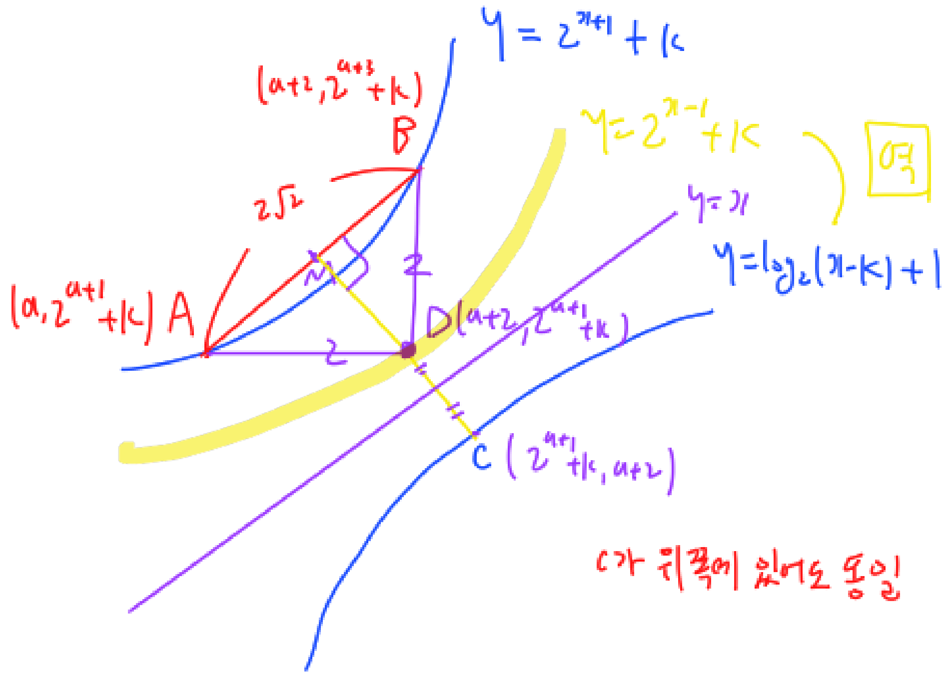
$=64-9=55$

22. 다음 조건을 만족시키는 곡선 $y=2^{x+1}+k$ 위의 서로 다른 두 점 A, B와 곡선 $y=\log_2(x-k)+1$ 위의 점 C가 존재하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 S라 하자.

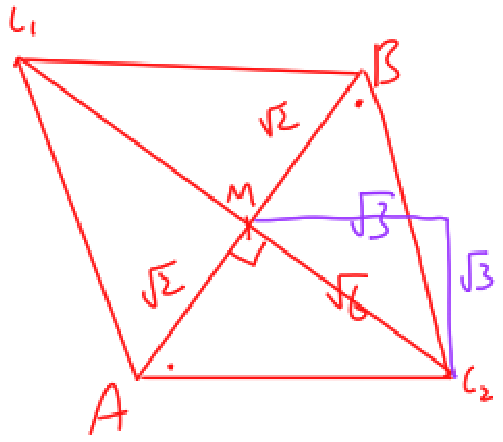
(가) 직선 AB의 기울기는 1이다.
(나) 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정삼각형이다.

$2^{-S+\frac{2}{3}}$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{9}$



$(2^{a+3}+k)-(2^{a+1}+k)=3\cdot 2^{a+1}=2$, $2^a=\frac{1}{3}$, $a=-\log_2 3$



$M(a+1,\ k+5\cdot 2^a)$

$C(a+1\pm\sqrt{3},\ k+5\cdot 2^a\mp\sqrt{3})$

$=(2^{a+1}+k,\ a+2)$

$\therefore k=a+1\pm\sqrt{3}-2^{a+1}$

$=\frac{1}{3}-\log_2 3\pm\sqrt{3}$

$k_1+k_2=\frac{2}{3}-2\log_2 3=S$

$-S+\frac{2}{3}=2\log_2 3$

$\therefore 2^{-S+\frac{2}{3}}=9$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

5지선다형

23. 7개의 문자 a, a, a, b, b, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 70 ② 105 ③ 140 ④ 175 ⑤ 210

$\frac{7!}{3!3!} = 140$

24. 두 사건 A, B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{8},\quad \mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$$

일 때, $\mathrm{P}(B^C)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

$P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$P(B^c) = \frac{3}{4}$

25. $(2x^2+1)^4\left(x-\dfrac{1}{2x}\right)$의 전개식에서 x^5의 계수는? [3점]

① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

$x \times {}_4C_2\,(2x^2)^2 \to 24x^5$

$\left(-\frac{1}{2x}\right) \times {}_4C_3\,(2x^2)^3 \to -16x^5$

$8x^5$

26. 다음 조건을 만족시키는 6 이하의 자연수 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5의 모든 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$의 개수는? [3점]

> (가) $a_5 - a_1 = 4$이고,
> $2 \le k \le 4$인 모든 자연수 k에 대하여 $a_1 \le a_k \le a_5$이다.
> (나) $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5$의 값은 짝수이다.

① 163　② 178　③ 193　④ 208　⑤ 223

$a_1 \le a_2 \le a_5$
a_3
a_4

모두 홀수

$a_5 - a_1 = 4 \to$ a_1 a_5
1 5 $\to 5^3 - 3^3 = 98$
2 6 $\to 5^3 = 125$
223

27. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수는? [3점]

> (가) $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5)$
> (나) 1과 3은 함수 f의 치역의 원소이다.

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

$\longrightarrow$

1   1
2   2
3   3
4   4
5

1,3은 적어도 하나 선택 $\Rightarrow {}_4H_3 = 20$

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 일대일대응 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

> (가) $f(1) < f(3)$, $f(2) < f(4)$
> (나) 함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
> $|f(1) - f(5)| \ge f^{-1}(1)$이다.

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{11}{60}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{13}{60}$

전체 $5! = 120$, $1 \le |f(1) - f(5)| \le 4$

$f^{-1}(1)$

1 → $f(1)=1$
2 → $f(2)=1$
3 → $f(3)=1$ (X) ($\because f(1)<f(3)$)
4 → $f(4)=1$ (X) ($\because f(2)<f(4)$)

$\therefore f^{-1}(1) = 1$ or 2

i) $f^{-1}(1)=1$, $f(1)=1$ → $|f(5)-1| \ge 1$, $f(5)$는 모두 가능

1 — 1
2   2
3   3
4   4
5   5

$4 \times {}_3C_2 = 12$
$f(3)$ $f(2)<f(4)$

ii) $f^{-1}(1)=2$, $f(2)=1$ → $|f(5)-f(1)| \ge 2$ $f(5)$ & $f(1)$ 연속한 값 (X)

1   1
2   2
3   3
4   4
5   5

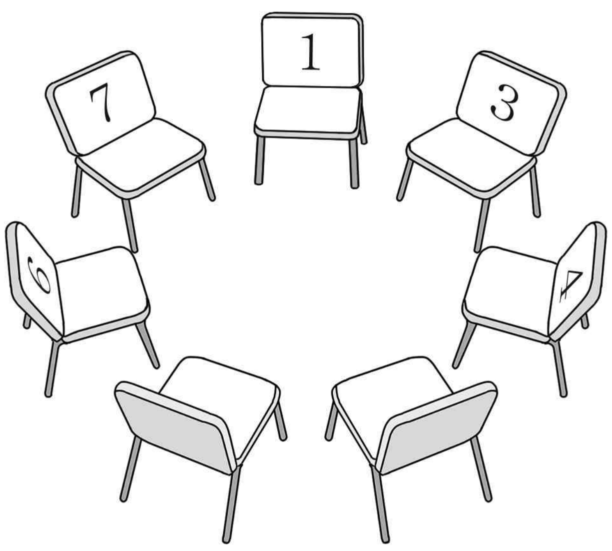
$f(4)$ $f(5)$ → $f(1), f(3)$ 자동결정
2 → 5
3 → 2, 4, 5
4 → 5
5 → 4
6

$\therefore \frac{12+6}{120} = \frac{3}{20}$

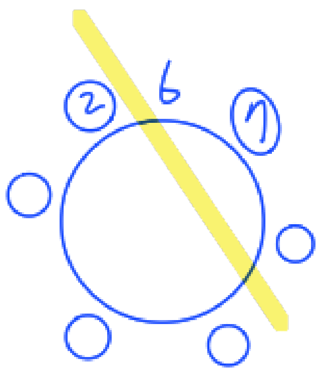
단답형

29. 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7개의 의자가 있다. 이 7개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점] $\boxed{68}$

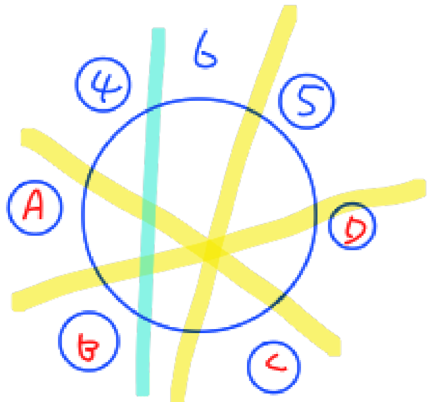
(가) 6이 적힌 의자와 이웃한 2개의 의자에 적힌 두 수의 합은 9이다.
(나) 7이 적힌 의자와 이웃하지 않은 4개의 의자에 적힌 네 수의 곱은 12의 배수이다.



2 6 7
4 6 5



1, 3, 4, 5
⇓
3,4는 7과 반대쪽 위치
$2 \times {}_3P_2 \times 2 = 24$
2,7 자리 / 3,4 자리 / 1,5 자리

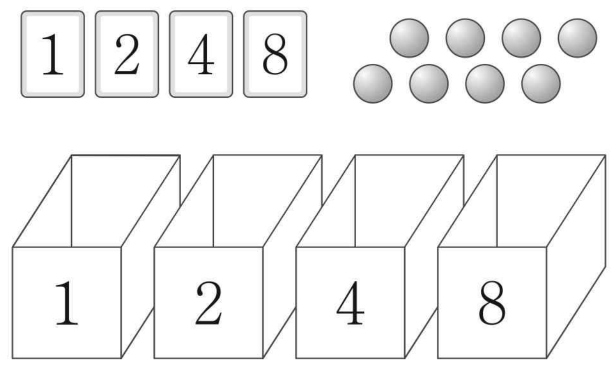


1, 2, 3, 7
7의 위치
B, C, D ⇒ $3 \times 3! = 18$
(6×4=24 ×)
A ⇒ 2는 7과 반대쪽 위치
$2 \times 2! = 4$
∴ $2 \times (18+4) = 44$
4,5 자리

∴ $24+44=68$

30. 8개의 공과 숫자 1, 2, 4, 8이 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 있다. 숫자 1, 2, 4, 8이 하나씩 적혀 있는 4개의 빈 상자에 8개의 공과 4장의 카드를 남김없이 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공이나 카드를 넣지 않는 상자가 있을 수 있다.) [4점] $\boxed{398}$

(가) 1이 적힌 상자에 들어 있는 카드의 개수는 1이고 8이 적힌 상자에 들어 있는 카드의 개수는 2 이상이다.
(나) $n(n=2,\ 4,\ 8)$이 적힌 상자에는 n의 배수가 적힌 카드가 들어 있거나 공이 n개 이상 들어 있다.



8번 카드 ⇒ 8번 상자에 위치 ⇒ 1번8번 상자는 공의 개수 영향 X

상자	1	2	4	8	
카드개수	1	0	0	3	⇒ $3 \times {}_4H_2 = 30$ (1번상자 1,2,4)
	1	1	0	2	⇒ 2번 상자 카드
	1	0	1	2	⇒ 4번 상자 카드

2번 상자 카드:
1 → ${}_4H_2 = 10$
2 → ${}_4H_4 = 35$
4 → ${}_4H_4 = 35$
80
1,8번 상자 카드 ∴ $80 \times 2 = 160$

4번 상자 카드:
1 → ${}_4H_2 = 10$
2 → ${}_4H_2 = 10$
4 → ${}_4H_6 = 84$
104
1,8번 상자 카드 ∴ $104 \times 2 = 208$

⇒ $30+160+208 = 398$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. 함수 $f(x)=4\ln x$에 대하여 $f''(2)$의 값은? [2점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$f'(x)=\frac{4}{x}$

$f''(x)=\frac{-4}{x^2}$

$f''(2)=-1$

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$이 수렴할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3^{n+1}}{a_n+3^{n-1}}$의 값은? [3점]

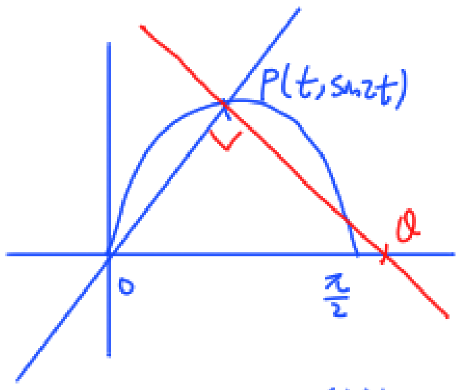
① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}=0$

$\therefore \frac{0+3}{0+\frac{1}{3}}=9$

25. 실수 $t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 곡선 $y=\sin 2x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin 2t)$를 지나고 직선 OP에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6



OP 기울기 $\frac{\sin 2t}{t}$, 수직 ⇒ 기울기 $-\frac{t}{\sin 2t}$

$y=-\frac{t}{\sin 2t}(x-t)+\sin 2t$

$y=0 \to x=t+\frac{\sin^2 2t}{t}=\overline{OQ}$

$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{OQ}}{t}=\lim_{t\to 0+}\left(1+\frac{\sin^2 2t}{t^2}\right)=1+4=5$

26. 다항함수 $f(x)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$$a_n=f(n)$$

이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{a_2}{a_1}$의 값은? [3점]

(가) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n}-2n\right)=2$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{a_n+1}$의 값은 자연수이다.

① $\frac{11}{6}$ ② 2 ③ $\frac{13}{6}$ ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4n^2}{\sqrt{a_n}+2n}=2$

$\therefore\ a_n=4n^2+8n+C$

$a_n+1=4n^2+8n+C+1$

$D/4=16-4(C+1)=0 \quad \therefore C=3$

$a_n=4n^2+8n+3$

$a_2=35,\ a_1=15$

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{7}{3}$

27. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=2e^{t}-3e^{-t},\quad y=2e^{t}+6e^{-t}$$

을 C라 하자. 상수 k에 대하여 t에 대한 방정식 $2e^{t}+6e^{-t}=k$는 서로 다른 두 실근 t_1, t_2를 갖는다. 곡선 C에서 $t=t_1$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $-\frac{1}{5}$이고, $t=t_2$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은 m이다. $k+m$의 값은? [3점]

① $\frac{75}{11}$ ② $\frac{79}{11}$ ③ $\frac{83}{11}$ ④ $\frac{87}{11}$ ⑤ $\frac{91}{11}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2e^{t}-6e^{-t}}{2e^{t}+3e^{-t}}=\frac{2e^{2t}-6}{2e^{2t}+3}=\frac{-1}{5}$

$-2e^{2t}-3=10e^{2t}-30$

$e^{2t}=\frac{9}{4},\ e^{t}=\frac{3}{2}\quad \therefore e^{t_1}=\frac{3}{2}$

$2e^{t_1}+6e^{-t_1}=k=3+6\times\frac{2}{3}=7$

$2e^{t}+6e^{-t}=7,\ 2e^{2t}-7e^{t}+6=0$

$2e^{t}\quad -3$

$e^{t}\quad -2\qquad e^{t}=\frac{3}{2},\ 2$

$\therefore e^{t_2}=2$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_2}=\frac{2}{11}=m$

$\therefore k+m=7+\frac{2}{11}=\frac{79}{11}$

28. 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$(b_n-a_n)(b_n-|a_n|)=0$$
> 이다.
>
> (나) $\sum_{n=k}^{\infty}(a_{2n+1}+b_{2n+1})=0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 2이다.

$b_1-b_3=3a_3+5$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값은? [4점]

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

$b_n=\begin{cases}a_n\\|a_n|\end{cases}$ $\quad a_1=a,\ a=0\ (\times)$

$a>0$

	a_n	b_n
1	a	a
2	$-\frac{a}{2}$	$\pm\frac{a}{2}$
3	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{4}$

$b_1-b_3=3a_3+5$

$\frac{3a}{4}=\frac{3}{4}a+5$

$(\times)$

$\therefore a<0$

$a<0$

	a_n	b_n
1	a	$\pm a$
2	$-\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2}$
3	$\frac{a}{4}$	$\pm\frac{a}{4}$
4	$-\frac{a}{8}$	$-\frac{a}{8}$
5	$\frac{a}{16}$	$\pm\frac{a}{16}$

$\sum_{n=2}^{\infty}(a_{2n+1}+b_{2n+1})=0$

$\Downarrow$

$n\geq 2 \Rightarrow b_{2n+1}=-a_{2n+1}$

$n=1 \Rightarrow b_3=a_3=\frac{a}{4}$

$b_1-b_3=3a_3+5$

$b_1=4a_3+5=a+5$

$b_1=a \rightarrow a=a+5\ (\times)$

$b_1=-a \rightarrow -a=a+5,\ a=-\frac{5}{2}$

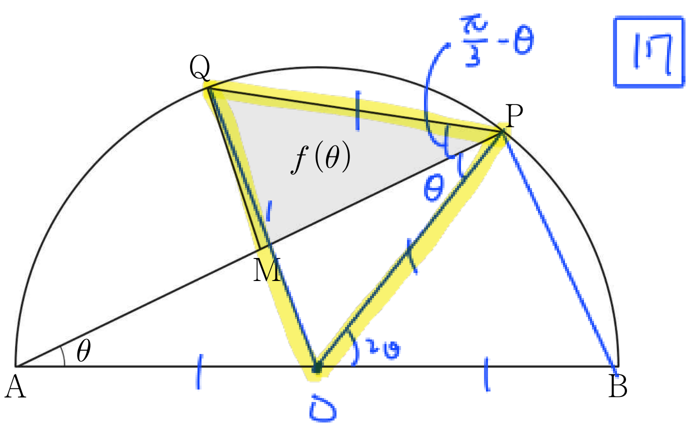
$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{5}{2}+\frac{5}{4}-\frac{25}{8}+\frac{25}{16}+\frac{25}{32}+\cdots$

$=\frac{20+10-25}{8}+\frac{\frac{25}{16}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{5}{8}+\frac{25}{8}=\frac{15}{4}$

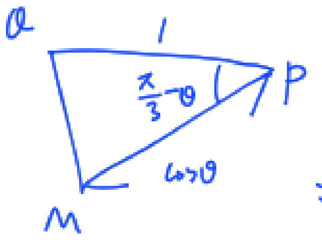
단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 점 P를 $\angle \mathrm{BAP}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$가 되도록 잡고, 호 AP 위에 점 Q를 $\overline{\mathrm{PQ}}=1$이 되도록 잡는다. 선분 AP의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 PQM의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\overline{\mathrm{AP}}=\frac{6}{5}$이 되도록 하는 θ의 값을 a라 할 때, $f'(a)=p+q\sqrt{3}$이다. $100\times|p+q|$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

$\boxed{17}$



$\overline{AP}=2\cos\theta$, $\overline{AM}=\overline{PM}=\cos\theta$



$f(\theta)=\frac{1}{2}\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

$=\frac{1}{2}\cos\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right)$

$f'(\theta)=\frac{1}{4}\left(-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\cos2\theta\right)$

$=-\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\sin2\theta+\cos2\theta\right)$

$\overline{AP}=2\cos a=\frac{6}{5}$

$\therefore \cos a=\frac{3}{5}$

$\sin a=\frac{4}{5}$

$\sin2a=\frac{24}{25}$

$\cos2a=-\frac{7}{25}$

$\therefore f'(a)=-\frac{1}{4}\left(\frac{24\sqrt{3}-7}{25}\right)$

$=\frac{7-24\sqrt{3}}{100}=p+q\sqrt{3}$

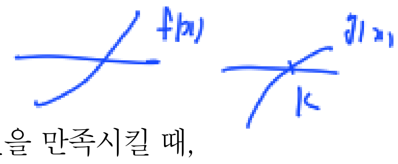
$\therefore 100\times|p+q|=17$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 갖는다. 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)h(x)=x\ln(1+3|g(x)|)$$

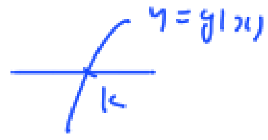
이고 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{31}$



> (가) $g(k)=0$인 상수 k에 대하여
> 함수 $h(x)-|g(x)|$는 $x=k$에서 미분가능하다. → 연속
> (나) $4g'(f(1))=3f(1)-4$

$g(k)=0 \rightarrow f(0)=k$



$x\neq k \Rightarrow h(x)=\dfrac{x\ln(1+3|g(x)|)}{g(x)}$

$h(x)-|g(x)|$는 $x=k$에서 연속

$\lim_{x\to k^-}\left(h(x)-|g(x)|\right)=\lim_{\substack{x\to k^-\\ g(x)\to0^-}}\left(\dfrac{x\ln(1-3g(x))}{g(x)}+g(x)\right)=-3k$

$\lim_{x\to k^+}\left(h(x)-|g(x)|\right)=\lim_{\substack{x\to k^+\\ g(x)\to0^+}}\left(\dfrac{x\ln(1+3g(x))}{g(x)}-g(x)\right)=3k$

$=$ $\therefore k=0$

$g(0)=0$

$f(0)=0$

$h(x)-|g(x)|$는 $x=k=0$에서 미분가능

$\lim_{x\to0^-}\dfrac{h(x)-|g(x)|}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(\dfrac{\ln(1-3g(x))}{g(x)}+\dfrac{g(x)}{x}\right)=-3+g'(0^-)$

$\lim_{x\to0^+}\dfrac{h(x)-|g(x)|}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(\dfrac{\ln(1+3g(x))}{g(x)}-\dfrac{g(x)}{x}\right)=3-g'(0^+)$

$=$ $g'(0)=3$

$g'(0)=\dfrac{1}{f'(0)}=3 \quad \therefore f'(0)=\dfrac{1}{3}$

$f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{3}x$, $f'(x)=3x^2+2ax+\frac{1}{3}$,

$f(1)=a+\frac{4}{3}$

$f'(1)=2a+\frac{10}{3}$

$D/4=a^2-1\le0$

$-1\le a\le1$

$g'(f(1))=\dfrac{1}{f'(1)}$, $\dfrac{4}{f'(1)}=3f(1)-4$

$\dfrac{12}{6a+10}=3a$, $6a^2+10a-4=0$

$3a^2+5a-2=0$

$3a \quad -1$

$a \quad +2$

$a=\frac{1}{3}$

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

$f(3)=27+3+1=31$

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{7}=1$의 한 초점의 좌표가 $(c, 0)(c>0)$일 때, c의 값은? [2점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

24. 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 두 벡터

$$\vec{a}+2(\vec{b}-\vec{a}),\quad -2\vec{a}+k\vec{b}$$

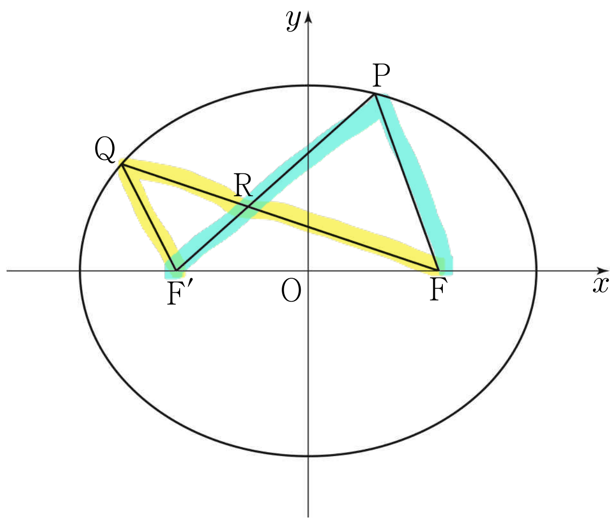
가 서로 평행하도록 하는 상수 k의 값은? (단, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$) [3점]

① $\frac{7}{2}$　② 4　③ $\frac{9}{2}$　④ 5　⑤ $\frac{11}{2}$

$-\vec{a}+2\vec{b}$

$2\times2=k$

25. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(\sqrt{3}, 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{3}, 0)$을 초점으로 하는 타원이 있다. 이 타원 위의 제1사분면에 있는 점 P와 이 타원 위의 제2사분면에 있는 점 Q에 대하여 두 선분 PF′, QF가 만나는 점을 R이라 하자. 삼각형 PRF의 둘레의 길이와 삼각형 QF′R의 둘레의 길이의 합이 12일 때, 이 타원의 단축의 길이는? [3점]



① 4 ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

$\overline{QF'} + \overline{QF} = 2a$

$\overline{PF'} + \overline{PF} = 2a$

$4a = 12$

$a = 3$

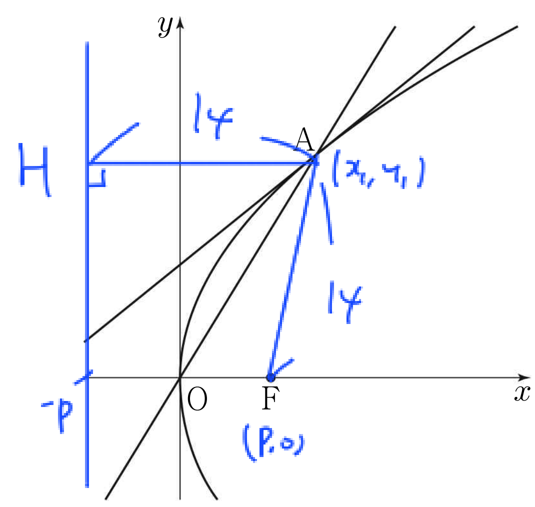
$c = \sqrt{3}$

$\Rightarrow b = \sqrt{6}$

$2b = 2\sqrt{6}$

26. 초점이 F인 포물선 $y^2 = 4px\ (p > 0)$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A에서의 접선의 기울기와 직선 OA의 기울기의 곱이 $\frac{3}{2}$이다. $\overline{\mathrm{AF}} = 14$일 때, p의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 6 ② $\frac{19}{3}$ ③ $\frac{20}{3}$ ④ 7 ⑤ $\frac{22}{3}$



$y_1 y = 2p(x + x_1)$ 기울기 $\frac{2p}{y_1}$

OA 기울기 $\frac{y_1}{x_1}$

$\frac{2p}{y_1} \times \frac{y_1}{x_1} = \frac{2p}{x_1} = \frac{3}{2}$

$x_1 = \frac{4}{3}p$

$\overline{AH} = 14 = x_1 + p = \frac{7}{3}p$

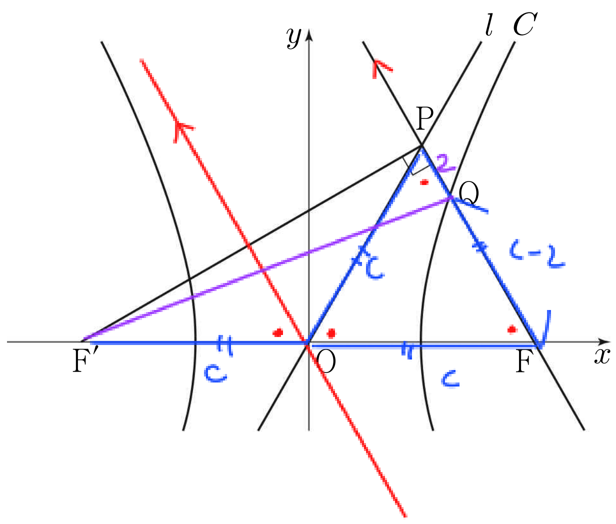
$\therefore p = 6$

27. 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>0)$인 쌍곡선 C가 있다. 쌍곡선 C의 점근선 중 기울기가 양수인 점근선을 l, 기울기가 음수인 점근선을 m이라 하자. 점 F를 지나고 직선 m에 평행한 직선이 직선 l과 만나는 점을 P, 쌍곡선 C와 만나는 점을 Q라 할 때,

$$\angle \mathrm{F'PF}=\frac{\pi}{2},\quad \overline{\mathrm{PQ}}=2$$

이다. c의 값은? [3점]

① 6　　② $\frac{13}{2}$　　③ 7　　④ $\frac{15}{2}$　　⑤ 8



△PFF' 외심 O ⇒ $\overline{OF}=\overline{OF'}=\overline{OP}=c$, ∠OPF=∠OFP

l 기울기 + m 기울기 = 0 ⇒ ∠POF=∠PFO

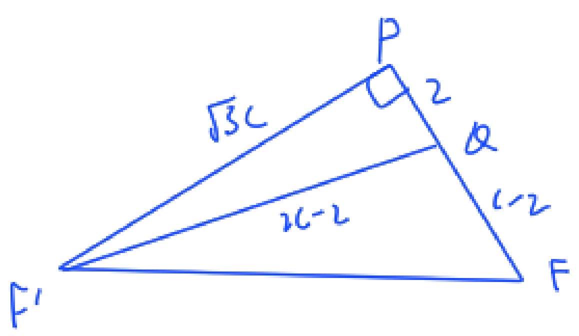
△OFP: 정삼각형

∠PF'F=30° ⇒ $\overline{F'P}=\sqrt{3}c$

l 기울기 $\sqrt{3}=\frac{b}{a}$ ∴ $b=\sqrt{3}a$
$b^2=3a^2$

$c^2=a^2+b^2=4a^2$, $c=2a$

$\overline{F'Q}-\overline{FQ}=2a$ ∴ $\overline{F'Q}=2a+c-2=2c-2$

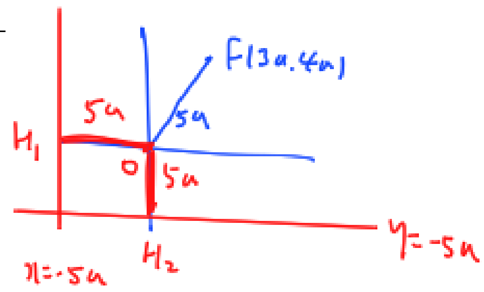


△F'QP ⇒ $(2c-2)^2=3c^2+4$

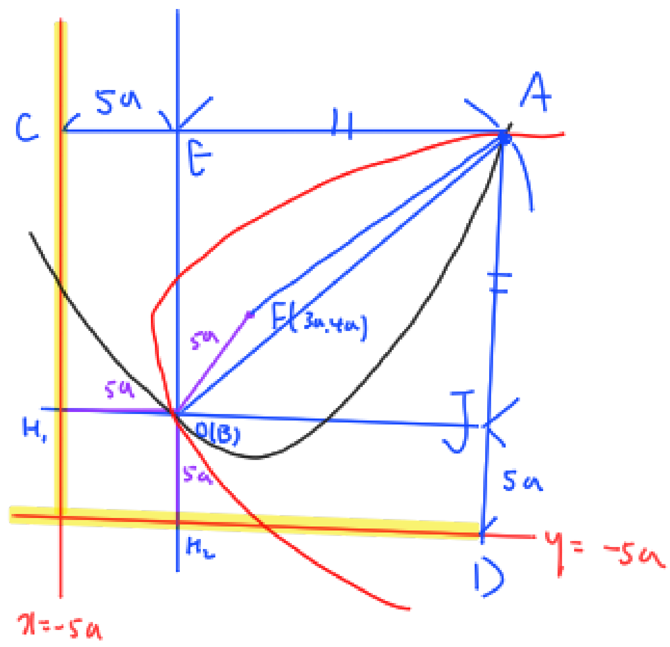
$c^2-8c=0$, $c=8$

28. 점 $\mathrm{F}(3a,\ 4a)\ (a>0)$을 초점으로 하고 준선이 $x=-5a$인 포물선을 C_1, 점 F를 초점으로 하고 준선이 $y=-5a$인 포물선을 C_2라 하자. 두 포물선 C_1, C_2가 만나는 두 점을 A, B$(\overline{\mathrm{BF}}<\overline{\mathrm{AF}})$라 할 때, $\overline{\mathrm{OA}}=6$이다. $\overline{\mathrm{AF}}-\overline{\mathrm{BF}}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{8}{3}\sqrt{2}$　　② $3\sqrt{2}$　　③ $\frac{10}{3}\sqrt{2}$
④ $\frac{11}{3}\sqrt{2}$　　⑤ $4\sqrt{2}$



$\overline{FO}=\overline{OH_1}=\overline{OH_2}$ ∴ O는 두 포물선 위의 점 ⇒ O=B



AF=AC=AD.

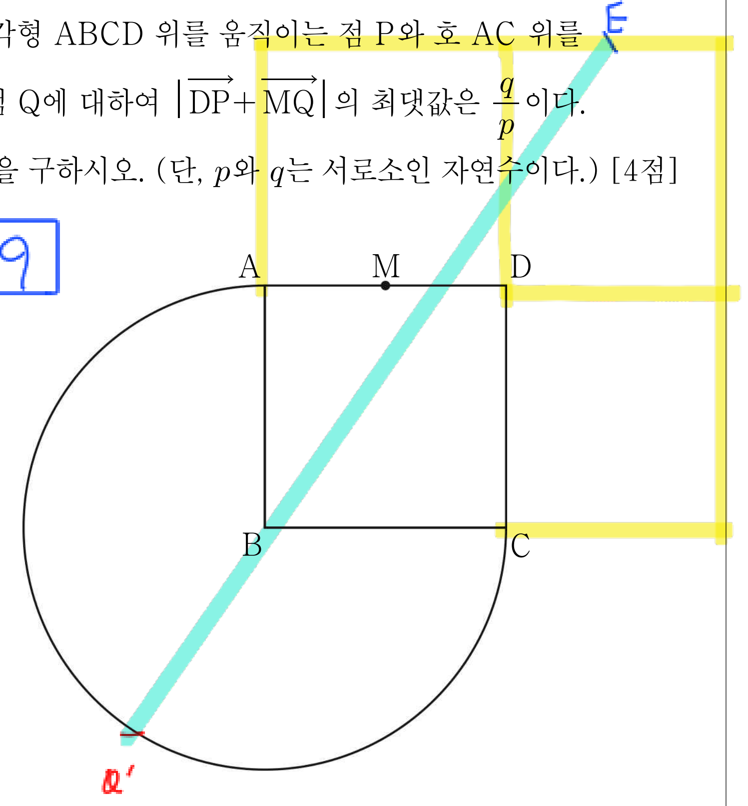
∴ AE=AJ　A(α, α), OA=6 → α=$3\sqrt{2}$

$\overline{AF}-\overline{BF}$ = AC−BF
= AE = $3\sqrt{2}$

단답형

29. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD와 중심각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi$인 부채꼴 BAC가 있고, 선분 AD의 중점을 M이라 하자. 정사각형 ABCD 위를 움직이는 점 P와 호 AC 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{DP}}+\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{9}$

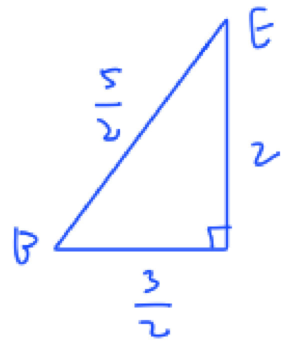


$|\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{MQ}| = |\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BQ}|$ $\quad \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{EB}$

$= |\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BQ}|$

$= |\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{BQ}| \le |\overrightarrow{EQ'}| = \frac{5}{2}+1 = \frac{7}{2} = \frac{q}{p}$

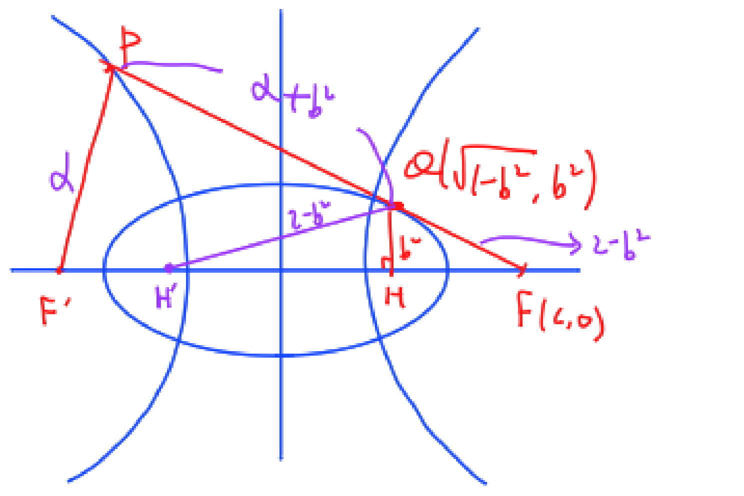
$(P=B)$ $\quad \therefore p+q=9$



30. 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{a^2}=1$ 위의 점 중 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 직선 PF가 타원 $x^2+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<1)$과 점 Q에서 접한다. 점 Q의 y좌표가 b^2이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF'}}+b^2$일 때, $30(a^2+b^2)$의 값을 구하시오. (단, a는 양수이다.) [4점]

$c^2=1+a^2$

$\boxed{80}$



$\overline{QH}+\overline{QH'}=2 \to \overline{QH'}=2-b^2$

$x^2+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=b^2 \to Q(\sqrt{1-b^2}, b^2)$

$\overline{PF}-\overline{PF'}=2$, $\overline{PF'}=\alpha \to \overline{PQ}=\alpha+b^2$, $\overline{FQ}=2-b^2$

PF : $\sqrt{1-b^2}\,x+y=1$, $y=-\sqrt{1-b^2}\,x+1$, $F\left(\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}, 0\right)$

$\therefore c=\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$, $FH=\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}-\sqrt{1-b^2}$

$\overline{QH'}=\overline{QF} \Rightarrow \overline{HH'}=\overline{FH}$, $2\sqrt{1-b^2}=\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}-\sqrt{1-b^2}$

$1-b^2=\frac{1}{3}$, $b^2=\frac{2}{3}$, $c^2=3$

$c^2=1+a^2 \to a^2=2$

$\therefore 30(a^2+b^2)=60+20=80$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.