FIM 미적분1(현 공통수학) 1번-56번 해설

해설 작성자 : 강도윤

문제는 포만한(https://cafe.naver.com/pnmath)에서 받으실 수 있습니다.

FIM을 시도하는 여러분들은 어느 정도 실력이 있으신 분들이니, 기초적인 과정에 대한 설명이나 의미 없는 계산과정은 생략했습니다.

기계적인 해설을 쓰는 것은 별로 의미가 없다고 생각하여 사고과정이나 문제를 접근할 때 했던 생각들을 최대한 자연스럽게 추가하여 해설을 작성하였습니다. 또한 [참고]를 통해 도움이 될 것 같은 부가적인 설명들도 기록해두었으니 매우 쉬운 문제가 아니라면 해설을 읽어보시길 추천드리고, 그마저도 귀찮으면 최소한 [참고]가 있는 문항의 해설은 읽어보시길 권장합니다. (물론 자신의 답에 의심할 여지가 없을 정도의 실력자분이시면 안읽어도 괜찮습니다.)

(가)형 전용으로 만들어져서 그런지 과거 수학 B형(현 교육과정(선택형)에서는 미적분을 선택해야만 풀 수 있는 문제들)이 간혹 있기도 합니다. 혹시라도 미적분을 공부한 사람만 풀 수 있는 문제는(15,26,27번) 문항 번호 옆에 미적분을 표기하였으니 참고하시면 되겠습니다. ~~까먹고 체크하지 못한 문제가 있을 수도 있습니다.~~

혼자 해설을 작성하다 보니 가끔 오타 및 오류가 있을 수도 있습니다. 발견되면 게시물에 댓글 남겨주시면 감사하겠습니다. 또한 해설에 이해가 되지 않는 부분은 '충분한 고민 후에' 댓글 남겨주시면 답변해드리겠습니다.

혹시라도 해설을 수정해야 할 상황을 대비해 해설지의 일부분에 여백 공간이 있습니다. 그냥 무시하시면 됩니다.

해설을 쓴 저보다는 FIM에 수록되어있는 문항에 대한 제작자분들과 FIM을 정리하여 만들어주신 ictteru님에게 감사를 전해주세요!

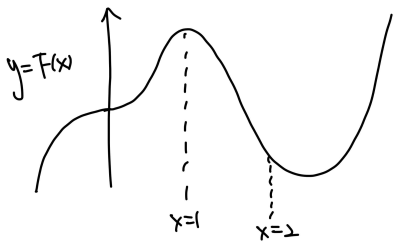
(44, 47번은 문제 마지막 페이지에 있는 빠른 정답이 잘못된 것으로 확인됩니다. 또한 56번은 조건이 부족하여, $f(0)=0$인 조건을 추가해야 할 것 같습니다. 풀기 전에 확인하세요~!)

1. [2012년 자유전자 20번]

주어진 $\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = f(k)$ 에서 정적분을 넓이로 이해하기엔 다소 불편할 것이다.
그러므로 $F'(x)=f(x)$ 인 함수 $F(x)$를 생각하자.

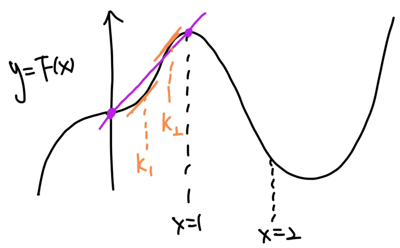
$$\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = f(k) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{F(n)-F(n-1)}{n-(n-1)} = F'(k)$$

이고, 주어진 그림에서 $y=F'(x)$ 의 부호를 판단하며 $y=F(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



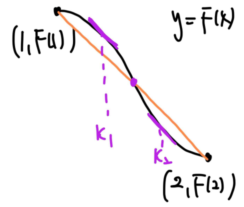
ㄱ. 거짓
함수 $y=F(x)$는 임의의 자연수 n에 대해 닫힌구간 $[n-1, n]$에서 연속이고, 열린구간 $(n-1, n)$에서 미분가능하므로 평균값정리에 의해 $\frac{F(n)-F(n-1)}{n-(n-1)} = F'(k)$를 만족하는 실수 k가 구간 $(n-1, n)$에 적어도 하나 존재한다. 그러므로 집합 A_n이 공집합이 되게 하는 n은 존재하지 않는다.

ㄴ. 참
두 점 $(0, F(0))$, $(1, F(1))$을 지나는 직선을 그려보면 직관적으로 A_1의 원소가 2개 존재함을 알 수 있다.



(조금 자세하게 서술하려면 두 점 $(0, F(0))$, $(1, F(1))$을 지나는 직선을 $g(x)$라 하고, 열린구간 $(0, 1)$에 속하는 방정식 $F(x)=g(x)$의 근을 $x=c$라 하자. 이후 열린구간 $(0, c)$, $(c, 1)$에서 평균값정리를 두 번 이용하면 두 근이 존재함을 알 수 있다.)

ㄷ. 참
집합 A_2의 원소가 1개보다 많으려면 두 점 $(1, F(1))$, $(2, F(2))$를 지나는 직선과 $y=F(x)$의 교점의 x좌표가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재해야 한다.
즉 다음과 같은 상황이다.



따라서 $F'(2) \ge \frac{F(2)-F(1)}{2-1} \Leftrightarrow f(2) \ge \int_{1}^{2} f(x)\,dx$ 임을 알 수 있다.

답 : ⑤

2. [2012년 자유전자 21번]

$g(k)$는 $(0, k)$에서 $y=f(x)$에 그을 수 있는 접선의 개수와 같다.
다만 지금은 $f(x)$의 삼차항의 계수가 결정되지 않아, 그래프를 그려 관찰하기 어려우니 접선의 방정식 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$를 통해 방정식 $-tf'(t)+f(t)=k$의 실근의 개수로 $g(k)$를 알아보자.
방정식 $-tf'(t)+f(t)=k$를 정리하면 다음과 같다.

$$-3t^4-2at^3-6t^2-4=k$$

이때 함수 $p(t)=-3t^4-2at^3+6t^2-4$는 최고차항의 계수가 음수인 사차함수이므로 (가)를 만족시키기 위해 극댓값이 하나만 존재하는 그래프 개형임을 알 수 있다. 즉 도함수 $p'(t)$의 부호변화는 한 번만 나타나야 하고, 따라서 $p(t)=-6t(2t^2+at+2)$에서 $a^2-4\times2\times2 \le 0$을 얻고, 곧 $-4 \le a \le 4$이다. ⋯ ㉠
한편 $g(k) \ge 1$이 되려면 $k \le p(0)=-4$를 만족해야 한다. 따라서 (나)에 의해 $a \le -4$이다. ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의해 $a=-4$이고, 계산을 통해 $f(1)=-3$을 얻는다.

[참고] : 공통접선이 있으면 t의 개수와 $g(k)$의 개수가 달라지니 공통접선에 유의해야 한다. (예를 들어 사차함수 $y=x^2(x-1)^2+x$와 직선 $y=x$를 생각해보자. 직선과 곡선의 교점은 2개지만 직선은 1개인 상황이다.) 다만 지금은 $p''(t)=12(t-1)^2 \ge 0$이므로 이런 상황은 고려하지 않아도 된다.

답 : ④

3. [2013년 자유전자 13번]

이차함수 $g(x)$는 $(1,1)$을 지난다. 이때 함수 $f(g(x))$가 구간 $[-1,4]$에서 연속이다.

만약 $x=1$에서 $g(x)$가 감소하거나 증가하면 함수 $f(g(x))$의 $x=1$에서의 좌극한, 우극한이 1, 0으로 달라 불연속이 된다.

비슷하게 $x=1$에서 극대를 가진다면 $f(g(1))=0$이고 $\lim_{x\to1} f(g(x))=1$이므로 불연속이 된다.

만약 $x=1$에서 극소를 가진다면 $f(g(1))=\lim_{x\to1} f(g(x))=0$이고 $x=0$에서 연속이 됨을 알 수 있다. 그러므로 우리가 원하는 상황은 이차함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극소를 갖는 상황이다.

ㄱ. 참

$x\to1 \Rightarrow g(x)\to1+$이므로 $\lim_{x\to1} f(g(x))=0$이다.

ㄴ ㄷ. 참

위 과정 참고

답 : ⑤

4. [2012년 나의 뜻 제1회 21번]

$\mathrm{A}(\alpha,0)$, $\mathrm{C}(\beta,0)$으로 두면

$$\lim_{a\to0} t_1=6 \ \to\ f'(\alpha)=6$$

$$\lim_{a\to0} t_2=-4 \ \to\ f'(0)=-4$$

$$\lim_{a\to0} t_3=f'(\beta)$$

임을 알 수 있다. $f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)x$로 두면

$$f'(0)=-4 \ \to\ k\alpha\beta=-4 \ \to\ \beta=-\frac{4}{k\alpha}$$

$$f'(\alpha)=6 \ \to\ k(\alpha-\beta)\alpha=6 \ \to\ k\alpha^2=2$$

$$(\because k\alpha\beta=-4)$$

이다. 따라서

$$f'(\beta)=k(\beta-\alpha)\beta=k\beta^2-k\alpha\beta$$

$$=8+4=12$$

이다.

답 : ①

5. [2012년 나의 뜻 제1회 21번]

$F'(x)=f(x)$인 $F(x)$에 대해

$$\int_a^x f(t)\,dt \ge 0 \ \Leftrightarrow\ F(x)\ge F(a)$$

이고, 곧 $F(x)$는 $x=a$에서 최소를 가져야 한다.

$f(x)=(x-1)(x-6)(x+2)$이므로 $a=6$이다.

답 : 6

6. [2012년 나의 뜻 제2회 20번]

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되어야 하고, 이때 $x\to1+$일 때와 $x\to1-$일 때로 상황이 달라짐을 알 수 있다.

$$\lim_{x\to1-} g(x)=\lim_{x\to1-}\left\{2x^2+3x+p+\frac{2x^4+3x^2+p-2x^2-3x-p}{x-1}\right\}$$

$$=2+3+p+8+6-4-3=p+12$$

$$\lim_{x\to1+} g(x)=\lim_{x\to1+}\left\{x^3+3x^2-2+\frac{x^6+3x^4-2-x^3-3x^2+2}{x-1}\right\}$$

$$=1+3-2+6+12-3-6=11$$

($\lim_{x\to1}\frac{x^6+3x^4-2x-\cdots}{x-1}$은 미분계수의 정의로 계산했다.)

따라서 $p=-1$, $q=11$이므로 $p+q=10$이다.

[참고] : 혹시나 미적분 선택자가 아닌 학생이 있을까봐 일일이 계산했지만, 합성함수 $f(x^2)$를 미분할 줄 알면 그냥 로피탈을 써도 좋다.

답 : ①

〈여백의 미〉

7. [2013년 나의 뜻 제3회 18번]

근과 계수의 관계에 의해 $Q(-2t, -8t^3+6t+1)$이고, $g(t)=-8t^3+6t+1$이다. 따라서 $g'(1)=-24+6=-18$

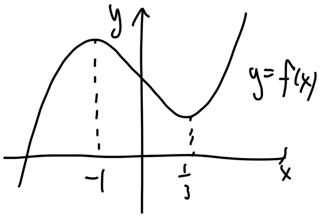
[별해]

$g(t)=f(-2t)$이므로 $g'(t)=-2f'(-2t)$를 구하여 계산해도 좋다.

답 : ①

8. [2013년 포카칩 예비시행(A형) 21번]

$y=f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



이때 직선 $y=ax$에서 a를 변화시키며 상황을 관찰하면 $y=ax$가 $y=f(x)$에 접할 때의 a가 구하는 최댓값임을 어렵지 않게 알 수 있다. 따라서 접점의 x좌표를 t로 두면 $f(t)=g(t)$, $f'(t)=g'(t)$이므로

$$at=3t^3+2t^2-t \ , \ at=t^3+t^2-t+3$$

를 계산하면 $t=1$, $a=4$임을 알 수 있다.

답 : ⑤

9. [2013년 포카칩 수능직전(A형) 21번]

$$f(x)=\begin{cases} x^3+2ax^2-9a & (x\le -3, x\ge 3) \\ x^3+9a & (-3\le x\le 3) \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+4ax & (x<-3, x>3) \\ 3x^2 & (-3<x<3) \end{cases}$$

$-3<x<3$에서 $f'(x)=3x^2\ge 0$이므로 $x<-3$, $x>3$에서도 $f'(x)\ge 0$이 되어야 한다. a의 부호에 따라 상황이 달라질 것이니 경우를 나누자. (이때 어차피 대칭이므로 $a>0$일 때와 $a<0$일 때는 똑같을 것이다.)

- $a>0$

$3x^2+4ax=x(3x+4a)$이므로 $-3\le -\frac{4}{3}a$이고, 곧 $a\le \frac{9}{4}$를 얻는다.

- $a<0$

대칭성에 의해 $-\frac{9}{4}\le a$를 얻는다.

- $a=0$

$3x^2+4ax=3x^2$이므로 $f'(x)\ge 0$이다.

각 경우에 의해 $-\frac{9}{4}\le a\le \frac{9}{4}$이고, 구하는 정수 a는 $-2,-1,0,1,2$로 5개다.

답 : ⑤

10. [2013년 포카칩 수능직전(A형) 25번]

주어진 관계식을 정리하면 $2f(x)=x^4-2x^3+f(1)$이다.
양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=-1$이므로
$2f(x)=x^4-2x^3-1$이고, $f(3)=13$을 얻는다.

답 : 13

11. [2013년 포카칩 수능직전(A형) 28번]

(가)에 의해 $f(x)-g(x)=px(x+2)(x-1)$로 놓을 수 있다. 이후 (나)를 잘 이용하기 위해 위 관계식의 양변에 정적분을 취해줄 수 있고, 다음과 같다.

$$\int_0^2 f(x)\,dx-\int_0^2 g(x)\,dx=\int_0^2 px(x+2)(x-1)\,dx$$

$$\to \int_0^2 px(x+2)(x-1)\,dx=8 \ \ (\because (나))$$

위 정적분을 풀기 위해 무작정 적분을 갈겨도 좋지만

$$\int_0^2 px(x+2)(x-1)\,dx=\int_{-1}^1 p(x+1)(x+3)x\,dx$$

$$=\int_{-1}^1 p(x^3+4x^2+3x)\,dx$$

$$=2\int_0^1 4px^2\,dx \ \ (\because 대칭성)$$

따라서 $\int_0^1 4px^2\,dx=4$이고, 곧 $p=3$이다.

이후 구하는 넓이는

$$\left|\int_{-2}^0 3x(x+2)(x-1)\,dx\right|+\left|\int_0^1 3x(x+2)(x-1)\,dx\right|$$

이고, $\int 3x(x+2)(x-1)\,dx = \frac{3}{4}x^4 + x^3 - 3x^2$ 임을

참고하여 계산하면 $S = \frac{37}{4}$ 임을 알 수 있다. (계산생략)

따라서 $20S = 185$ 이다.

답 : 185

12. [2013년 프로버 제2회 29번]

먼저 문제를 읽어보면 $g(t)$ 의 내용과는 상관 없이 (가), (나)를 통해 $f(x)$ 를 구할 수 있을 것 같다. 그러므로 우선 (가), (나)를 이용하여 $f(x)$ 를 추론해보자.

$f(0) = f'(0) = 0$ 이므로 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$ 으로 놓을 수 있다. 그리고 $f'(-1) = 5$ 이므로 $3a - 2b = 9$ … ㉠ 를 얻는다. 한편 (나)를 이용할 때, 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근이 2 개란 보장이 없으므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

• p, q 에 0 이 없을 때

$f(x) = x^2(x^2 + ax + b) = 0$ 이므로 근과 계수의 관계에 의해 $p + q = -a = -3$ 이고, 곧 $a = 3$ 을 얻는다. 이후 ㉠에 의해 $b = 0$ 이고, 이는 p, q 중 적어도 하나는 0 이란 의미이다. 따라서 모순이다.

• p, q 에 0 이 포함될 때

이전과 같은 논리로 $a = 3,\ b = 0$ 이다.

따라서 $f(x) = x^4 + 3x^3$ 임을 알 수 있다.

이후 α, β 는 $f'(x)$ 의 극솟값, 극댓값이고, 도함수의 정적분(넓이)은 원함수의 높이차임을 생각하면

$f''(x) = 12x\left(x + \frac{3}{2}\right)$ 이므로 구하는 값은

$$4(\beta - \alpha) = 4 \times \frac{12 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3}{6} = 27$$

임을 알 수 있다. ($\because$ 이차함수 넓이공식)

[참고] : 편의상 도함수의 도함수인 이계도함수를 표기했다. 다만 이계도함수의 의미는 이용하지 않았으니 정 찝찝하면 $f'(x) = h(x)$ 로 놓고 풀면 된다.

답 : 27

13. [2014년 프로버 제3회 21번]

접선의 방정식을 통해

$$g(t) = -tf'(t) + f(t)$$

임을 쉽게 알 수 있다. 다만 지금은 $-tf'(t) + f(t)$ 의 꼴에서 주는 이점이 없으니 부등식 $\frac{g(m) - g(n)}{m - n} < k$ 를 이해할 때는 그냥 단순히 삼차함수 $g(x)$ 로 바라보는 게 맞다. (지금 상황에 $\frac{-mf'(m) + f(m) + nf'(n) - f(n)}{m - n}$ 이라고 쓰는 건 복잡해지기만 할 뿐, 아무 장점이 없다는 것이다.)

함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 -2 인 삼차함수이고, $\frac{g(m) - g(n)}{m - n}$ 은 두 점 $(m, g(m))$, $(n, g(n))$을 지나는 직선의 기울기와 같다. 따라서 임의의 실수 m, n 에 대해 $\frac{g(m) - g(n)}{m - n} < k$ 를 만족하려면

$k \geq (g'(x)$ 의 최댓값$)$(=변곡접선의 기울기)

를 만족해야 한다. 이제 계산을 하기 위해 $g(t) = -tf'(t) + f(t)$ 를 이용하자.

$f(x) = x^3 + ax^2 + (1 - a)x$ 이므로 계산을 통해 $g(t) = -2t^3 - at^2$ 이고, $g'(t) = -6t^2 - 2at$ 이다.

따라서 $g'(t)$ 는 $t = -\frac{a}{6}$ 에서 최댓값 $g'\left(-\frac{a}{6}\right) = \frac{a^2}{6}$ 을 갖는다. 그러므로 $\frac{a^2}{6} = \frac{3}{2}$ 이고, 곧 $a = 3$ 이다.

$\therefore f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x \ \rightarrow\ f(2) = 16$

답 : ①

14. [2014년 PNMIE 예비시행 21번]

지금은 (가)의 정수조건이 포인트이므로

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

(단, a 는 자연수, b, c 는 음이 아닌 정수)

로 놓을 수 있다. 이때 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점의 x 좌표는 $-\frac{b}{2a}(\leq 0)$ 이므로 $0 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가함을 알 수 있다. 따라서

(나) $\Leftrightarrow$ $3 \leq f(0) \leq 12$ 이면서 $3 \leq f(1) \leq 12$

로 해석할 수 있다. 곧

$$3 \leq c \leq 12,\ \ 3 \leq a + b + c \leq 12$$

를 만족시키는 자연수 a, 음이 아닌 정수 b, c 의

개수를 구하는 것과 같다.

• $c=3$

$1 \le a+b \le 9$를 만족시키는 a, b의 개수를 구하자.
($a \ge 1$이므로 $0 \le a+b \le 9$가 아닌 $1 \le a+b \le 9$로 썼다.)

$a=1$이면 $b=0,1,2,\cdots,8$

$a=2$이면 $b=0,1,2,\cdots,7$

$\vdots$

$a=9$이면 $b=0$

따라서 구하는 경우의 수는 $\sum_{k=1}^{9} k$이다.

이 과정을 이해했다면 $c=4,5,\cdots,11$일 때도 같은 과정을 따라갈 것이므로 $S_n=\sum_{k=1}^{n} k$로 뒀을 때, 구하는 값은 $\sum_{k=1}^{9} S_k$와 같다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$$\sum_{k=1}^{9} S_k = \sum_{k=1}^{9} \frac{k(k+1)}{2} = 165$$

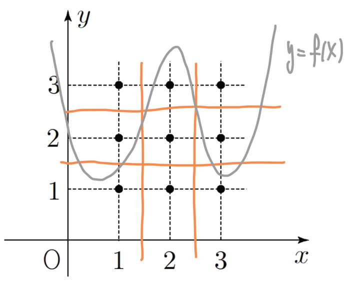
이다. (시그마 계산은 생략하겠다.)

답 : ②

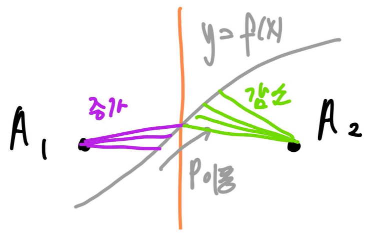
15. [2014년 PNMIE 예비시행 30번] **[미적분]**

우선 (가)에 의해 사차함수 $y=f(x)$의 그래프는 '대략' $x=1,3$주변에서 극소, $x=2$주변에서 극대인 상황임을 알 수 있다.

이제 (나)조건을 이용해보자. 먼저 경계가 되는 $x=\frac{3}{2},\frac{5}{2}$, $y=\frac{3}{2},\frac{5}{2}$를 그려보면 다음과 같다.



만약 점 P가 경계라인을 넘어가는 상황이 발생하면 경계를 넘는 근방의 순간은 다음과 같고,



즉 $g(t)$가 증가하다가 갑자기 감소하므로 경계를 지날 때 미분불가능 함을 예상할 수 있다. 논리적으로 알아보자. $\mathrm{A}_k(a,b)$로 잡으면

$$\overline{\mathrm{PA}_k}=\sqrt{(t-a)^2+(f(t)-b)^2}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\overline{\mathrm{PA}_k}=\frac{2(t-a)+f'(t)(f(t)-b)}{2\overline{\mathrm{PA}_k}}$$

이다. 따라서

(ⅰ) a가 변할 때

(ⅱ) b가 변하면서 $f'(t)\neq 0$일 때

(ⅲ) 점 P가 A_k를 지날 때

ⅰ, ⅱ일 때는 직관적으로 미분불가능함을 알 수 있지만 ⅲ인 경우엔 $\frac{0}{0}$꼴의 부정형이므로 계산해봐야 알 수 있다. 아래 과정을 참고하자.

$\overline{\mathrm{PA}_k}=\frac{2(t-a)+f'(t)(f(t)-b)}{2\sqrt{(t-a)^2+(f(t)-b)^2}}$ 이므로

$$\lim_{t\to a+}\frac{2(t-a)+f'(t)(f(t)-b)}{2\sqrt{(t-a)^2+(f(t)-b)^2}}$$

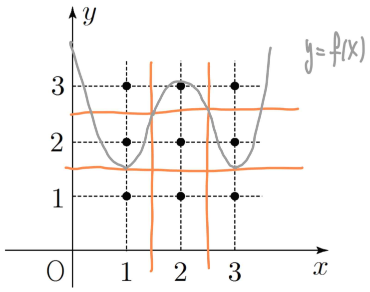
$$=\lim_{t\to a+}\frac{2+f'(t)\frac{f(t)-b}{t-a}}{2\sqrt{1+\left(\frac{f(t)-b}{t-a}\right)^2}}=\frac{2+(f'(a))^2}{2\sqrt{1+(f'(a))^2}}$$

$$\lim_{t\to a-}\frac{2(t-a)+f'(t)(f(t)-b)}{2\sqrt{(t-a)^2+(f(t)-b)^2}}$$

$$=\lim_{t\to a-}\frac{2+f'(t)\frac{f(t)-b}{t-a}}{-2\sqrt{1+\left(\frac{f(t)-b}{t-a}\right)^2}}=-\frac{2+(f'(a))^2}{2\sqrt{1+(f'(a))^2}}$$

따라서 미분불가능하다.

즉 ⅰ, ⅱ, ⅲ일 때 모두 미분불가능하고, 이때 (나)에 의해 경계라인을 뚫고 지나가는 점이 4개만 존재해야 하므로 (가)에 의해 다음과 같이 $y=f(x)$의 그래프를 완성할 수 있다.



즉 $f'(1)=f'(3)=0$, $f(1)=f(3)=\frac{3}{2}$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$

이다. 따라서 계산하면

$$f(x)=\frac{16}{9}(x-1)^2(x-3)^2+\frac{3}{2}$$

이고, 곧 $f(4)=\frac{35}{2}$이므로 $p+q=37$이다.

답 : 37

16. [2014년 멸공 29번]

함수 $h(x)$는 $f(x)$와 $g(x)$중 더 큰 함수를 택하는 함수로 이고, 연속함수임을 알 수 있다.

한편 $\{h(x)\}^2$의 도함수는 $2h'(x)h(x)$이다.

$(\because \{h(x)\}^2=h(x)\times h(x))$

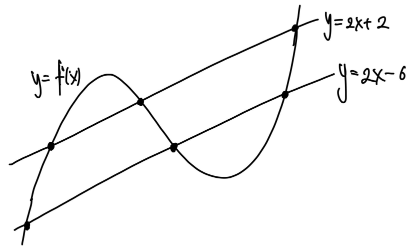
$h(x)$가 미분가능한 x에 대해선 $\{h(x)\}^2$도 미분가능할 것이니 $h(x)$가 미분불가능한 x에 대해 조사해보자.

만약 $f(a)=g(a)$, $f'(a)\neq g'(a)$인 $x=a$가 존재한다면 $2h'(x)h(x)$ 의 $x=a$에서의 좌,우극한은 $2f'(a)f(a)$, $2g'(a)g(a)$와 같고, 곧

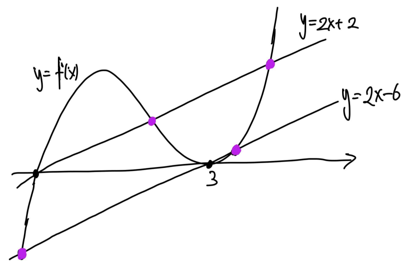
$f(a)=g(a)=0$이면 $x=a$에서 미분가능

$f(a)=g(a)\neq 0$이면 $x=a$에서 미분불가능함

을 알 수 있다.(…㉠)이때 $f(x)$는 삼차함수이고 $g(x)$는 일차함수이므로 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 미분불가능한 교점을 갖는 상황은 교점이 1개 또는 3개인 경우가 존재함을 알 수 있다. 이때 (나)를 만족시키기 위해선 일단은 $y=f(x)$와 $y=2x+2$, $y=2x-6$의 교점이 각각 3개 존재해야 하고, 교점 중 y좌표가 0인 점이 존재하여 미분불가능 점 한 개가 제거되어야 함을 알 수 있다. ($\because$㉠) 다음 그림과 같이 $y=f(x)$와 $y=2x+2$, $y=2x-6$의 교점은 각각 3개 존재하는 상황을 생각하자.



이때 $2x-6=0$의 해는 $x=3$이고, (가)를 생각하면 다음과 같이 그림을 조정할 수 있다. (미분불가능한 점은 색칠해뒀다.)



따라서 $f(x)=(x+1)(x-3)^2$이고, $f'(-1)=16>2$ 이므로 위 그림이 실제로 가능한 상황임을 알 수 있다. (우리는 그림으로만 $y=f(x)$와 $y=2x+2$의 교점이 3개라고 했다. 다만 이게 실제로 되는지는 지금처럼 확인해봐야 한다. 물론 답이 나오려면 이 경우 말곤 없으니 그냥 넘어갔을 것이다.)

$\therefore f(5)=24$

[참고] 미적분 선택자가 아니더라도 $\{h(x)\}^2=h(x)\times h(x)$에서 곱의 미분법을 이용한 것처럼 $\{(p(x))^n\}'=np(x)^{n-1}$정도는 쉽게 이해할 수 있을 것이다. 만약 합성함수 미분법을 알고 있다면 그 방법으로 이해하면 된다.

17. [2014년 멸공 FINAL 7번]

닫힌구간 $[0,a]$에서 $f(x)\geq 0$임을 생각하자.

ㄱ. 참

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^k f(x)\,dx+\int_k^a f(x)\,dx \geq \int_k^a f(x)\,dx$$

ㄴ. 참

$$\int_k^a kf(x)\,dx \leq \int_k^a xf(x)\,dx \Leftrightarrow 0\leq \int_k^a (x-k)f(x)\,dx$$

닫힌구간 $[k,a]$에서 $(x-k)f(x)\geq 0$이므로 참

ㄷ. 참

주어진 부등식의 형태를 관찰하면 ㄱ, ㄴ의 과정을 생각할 수 있다.

ㄱ 과정을 생각하면

$$3\int_{\frac{1}{3}}^{1} xf(x)\,dx \le 3\int_{0}^{1} xf(x)\,dx$$

를 생각할 수 있고, ㄴ 과정을 생각하면

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{3}f(x)\,dx \le \int_{\frac{1}{3}}^{1} xf(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{3}}^{1} f(x)\,dx \le 3\int_{\frac{1}{3}}^{1} xf(x)\,dx$$

를 생각할 수 있다. 따라서

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1} f(x)\,dx \le 3\int_{\frac{1}{3}}^{1} xf(x)\,dx \le 3\int_{0}^{1} xf(x)\,dx$$

이므로 $\int_{\frac{1}{3}}^{1} f(x)\,dx \le 3\int_{0}^{1} xf(x)\,dx$이다.

[참고] ㄱㄴㄷ 문제를 내는 이유

요즘은 ㄱㄴㄷ 문제를 잘 내지 않는 추세다. 다만 나올 수도 있으니 가볍게 알아보자. ㄱㄴㄷ 문제를 내는 이유는 크게 두 가지 이유가 있다.

(ⅰ) 발상을 도와주기 위해

(ⅱ) 물어볼 게 많은 상황

ⅰ) ㄱㄴㄷ 선지에서 ㄱ이나 ㄴ선지에 '이렇게 쉬운걸 왜 물어보지?'와 같은 생각이 들 때가 있을 것이다. 이것은 사실 ㄷ선지에서 이용하는 아이디어를 갑자기 물어보기엔 학생들이 어려워할까봐 맛보기 느낌으로 내는 경우가 많다. 그러므로 ㄱ, ㄴ선지를 풀며 알아낸 정보나 과정을 이용하여 ㄷ 선지를 해결하는 것을 미리 예상할 수도 있어야 한다. (지금 문제가 (ⅰ)과 같다.)

ⅱ) 대부분 ㄱㄴㄷ 문제가 (ⅰ)의 경우이지만 가끔 아닌 경우도 있다. 그게 (ⅱ)의 경우이다. 문제의 상황을 다 만들어 놓았는데, 뭔가 하나만 물어보기엔 아쉽기도 하고, 다른 특징을 물어보기에도 나쁘지 않은 상황이라면 ㄱㄴㄷ로 문제가 출제되기도 한다.
(예제가 궁금하면 21수능13(가)를 풀어보자. 선지간의 유기성이 잘 느껴지진 않을 것이다.)

답 : ⑤

18. [2014년 멸공 FINAL 18번]

주어진 발문에 따라 $g(a)=|af(a)|$임을 알 수 있다. 상수랑 헷갈리지 않게 $g(x)=|xf(x)|$라 하자.
($x \ge 0$에서 정의되었으므로 a는 양수만 생각해도 된다.) 한편 $f(x)=x^3-5x^2+6x$는 인수분해도 예쁘게 되는 꼴이고 $f(0)=0$인 것을 쉽게 관찰할 수 있다.

ㄱ. 참

$g'(x)=0$인 x는 $(xf(x))'=0$인 x와 같다.
$xf(x)=x^4-5x^3+6x^2$, $(xf(x))'=x(4x^2-15x+12)$이고 근과 계수의 관계에 의해 $g'(k)=0$를 만족시키는 양수 k의 값들의 합은 $\frac{15}{4}$임을 알 수 있다. (두 근의 합과 곱이 모두 양수이므로 방정식 $4x^2-15x+12=0$의 실근은 모두 양수다.)

ㄴ. 거짓

$g(x)=|xf(x)|=x^2|(x-2)(x-3)|$이므로 $x=2,3$에서 미분불가능하다.

ㄷ. 참

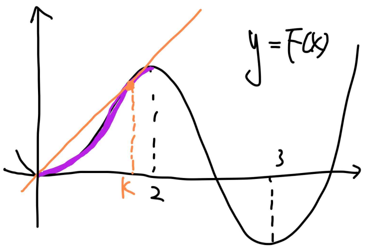
$\int_0^k f(x)\,dx=g(k)$를 계산으로 이용하기엔 다소 복잡할 것이다. 그러므로 관계식에서 의미를 해석해야 하고, 의미를 읽기 위해 함수를 맞춰주자.
$0<x<2$에서 $g(x)=xf(x)$이므로 준 식은

$$\int_0^k f(x)\,dx=g(k) \Leftrightarrow \int_0^k f(x)\,dx=kf(k)$$

이다. 여기서 정적분을 넓이로 해석하긴 별로이니, $\int_0^x f(t)\,dt=F(x)$로 두면

$$\int_0^k f(x)\,dx=kf(k) \Leftrightarrow \frac{F(k)}{k}=F'(k)$$

이다. 따라서 다음 페이지의 그림과 같이 상황을 이해할 수 있고,



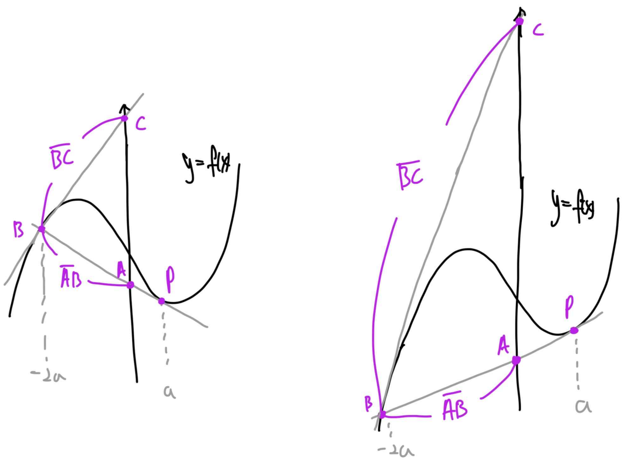
$\dfrac{F(k)}{k}=F'(k)$를 만족시키는 양수 k가 존재함을 알 수 있다. (우당탕 계산해서 사잇값 정리를 이용해도 좋다. 궁금하면 스스로 해보자.)

[참고] 스포방지를 위해 미리 말하진 않았지만 지금 문제가 약간 (ii)와 비슷한 느낌이지 않을까 예상한다.

답 : ③

19. [2014년 명공 FINAL 21번]

함수 $f(x)=x^3-3x+3$에서 이차항의 계수가 0이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\mathrm{B}(-2a, f(-2a))$임을 알 수 있다. 이후 주어진 상황을 관찰해보면 다음과 같다.



이때 a를 증가시키며 상황을 관찰해보면 $\overline{\mathrm{BA}}>\overline{\mathrm{BC}}$이다가 $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 순간이 한 번 존재하고, 이후 $\overline{\mathrm{BA}}<\overline{\mathrm{BC}}$가 됨을 직관적으로 알 수 있다. 즉 우리가 구하는 순간은 $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$일 때의 a와 같다.

$\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 순간은 삼각형 BAC가 이등변삼각형인 상황과 같고, 이때 $f'(a)+f'(-2a)=0$를 만족한다.

따라서 계산하면 $a=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$임을 알 수 있다. (계산생략)

[풀이2]

계산으로도 충분히 풀 수 있다.

직선 BA : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$\rightarrow \mathrm{A}(0, f(a)-af'(a))$

직선 BC : $y=f'(-2a)(x+2a)+f(-2a)$

$\rightarrow \mathrm{C}(0, f(-2a)+2af'(-2a))$

이때 $f(a)-af'(a)=-2a^3+3$이고, 합성관계를 통해 계산 없이 $f(-2a)+2af'(-2a)=16a^3+3$임을 알 수 있다. 따라서

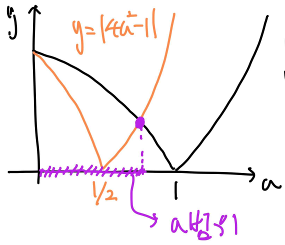
$$\mathrm{A}(0,\,-2a^3+3)\ ,\ \mathrm{C}(0, 16a^3+3)$$

이다. 한편 $\overline{\mathrm{BA}}\geq\overline{\mathrm{BC}} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{BA}}^2\geq\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로 점과 점 사이 거리 공식을 이용하면 다음과 같다. (계산생략)

$$\overline{\mathrm{BA}}^2\geq\overline{\mathrm{BC}}^2 \Leftrightarrow (a^2-1)^2\geq(4a^2-1)^2$$

$$\Leftrightarrow |a^2-1|\geq|4a^2-1|$$

이때 $4a^2-1=(2a)^2-1$이므로 확대 축소에 의해 다음과 같다.



따라서 조건을 만족시키는 a의 범위는 $0<a\leq\dfrac{\sqrt{10}}{5}$임을 알 수 있다.

계산풀이라 과정이 상대적으로 복잡하긴 하지만, 풀이 과정에서 얻어갈 것도 많고, 논리적인 풀이는

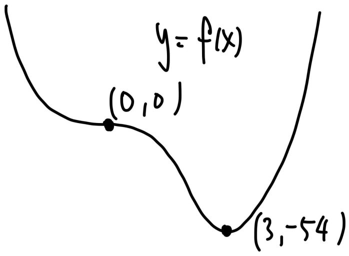
이 풀이가 맞기에 읽어보고 넘어가면 도움될 것이다.

답 : ⑤

〈여백의 미〉

20. [2014년 셀로판 15번]

(가)에 의해 $f(3)=-54$이고 (다)에 의해 $f(0)=0$이다. 구간 $(-\infty, 2]$에서 $f(x)$는 역함수 $g(x)$를 가지므로 구간 $(-\infty, 2]$에서 $f(x)$는 감소하는 상황임을 알 수 있다. 이때 $y=x$에 대한 대칭을 생각하면 (나)에 의해 $f'(0)=0$이 되어야 한다. ($y=x^3$을 $y=x$에 대해 대칭이동하여 그려보자. $x=0$에서의 미분계수는 발산하여 존재하지 않음을 알 수 있을 것이다.
엄밀하게 따지려면 역함수의 미분법을 알아야 하지만 미적분1 (현 수2)에서는 이 정도의 이해로 넘어가야 한다.)
따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

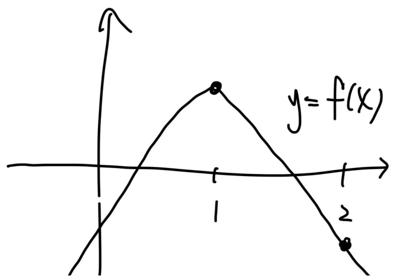


이후 비율관계와 $f(3)=-54$임을 생각하면
$f(x)=2x^3(x-4)$를 얻고, $f(5)=250$임을 알 수 있다.

답 : ⑤

21. [2014년 포카칩 6월(A형) 11번]

(가)에 의해 $f(1)>0$, $f(2)<0$임을 알 수 있다. 또한 (나)를 고려하여 연속함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 대략 아래와 같다. (상황을 이해하기 위해 대략적으로 그려본 것이다.)



그림을 참고하면 사잇값정리에 의해 $f(x)=0$의 실근이 최소한 2개 존재함을 알 수 있다.
($F'(x)=f(x)$인 함수 $F(x)$를 이용하여 극값으로 해석해도 좋다.)

답 : ③

22. [2014년 포카칩 6월(A형) 29번]

함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는

$$(x\neq -1,\ x\neq 0)\ \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{x}$$

$$(x=-1,\ x=0)\ \frac{f(x)}{g(x)}=f(x)$$

이다. $x=-1$, $x=0$에서 연속성을 체크하자.

• $x=-1$에서의 연속성

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x}=f(-1)\ \to\ f(-1)=0$$

• $x=0$에서의 연속성

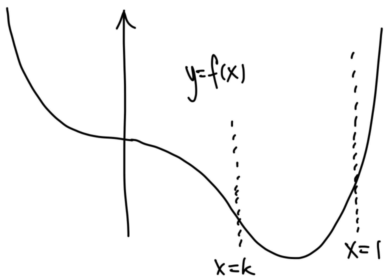
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f(0)\ \to\ f(0)=0,\ f'(0)=0$$

따라서 $f(x)=px^2(x+1)$로 놓을 수 있고, 계산을 통해 $\dfrac{f(8)}{f(3)}=16$임을 알 수 있다.

답 : 16

23. [2014년 포카칩 9월(A형) 21번]

주어진 증감표를 참고하면 대략 아래와 같이 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.



$y=f(x)$와 $y=f(0)$의 교점의 x좌표를 a로 두면

$$f(x)-f(0)=x^3(x-a)$$

로 놓을 수 있고, $f'(1)=1$이므로 계산을 통해 $a=1$이고 $f(x)-f(0)=x^3(x-1)$이다. 따라서 구하는 넓이는 다음과 같다.

$$\left|\int_0^1 x^3(x-1)\,dx\right|=\left|\int_0^1 x^4-x^3\,dx\right|=\frac{1}{20}$$

답 : ②

24. [2014년 포카칩 9월(A형) 29번]

$$f(x+1)=\begin{cases} x & (x<a-1) \\ (x-1)^2 & (x \geq a-1) \end{cases}$$

이므로

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x+1)}{f(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{(x-1)^2}{(x-2)^2}$$

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x+1)}{f(x)}=\lim_{x\to a-}\frac{(x-1)^2}{x-1}=a-1$$

이다. 이때 $a=2$이면 우극한이 존재하지 않으므로 $a\neq 2$인 상황만 생각하면 되고, 우극한의 극한값은 $\frac{(a-1)^2}{(a-2)^2}$ 임을 알 수 있다.

따라서 우리가 구하는 값은 방정식 $\frac{(a-1)^2}{(a-2)^2}=a-1$의 실근과 같다. 이후 방정식을 풀면

- $a=1$

$a=1$일 때는 좌변, 우변이 0이므로 성립

- $a\neq 1$

$$\frac{a-1}{(a-2)^2}=1 \rightarrow a^2-5a+5=0$$

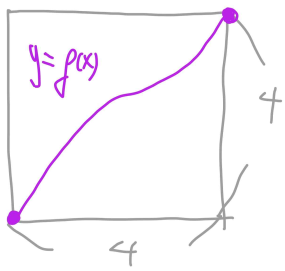
이고 $a=1,2$를 대입했을 때 성립하지 않으므로 $a=1,2$는 방정식 $a^2-5a+5=0$의 실근이 아니다. 따라서 근과 계수의 관계에 의해 $a_1+a_2=5$임을 알 수 있다.

각 경우에 의해 모든 실수 a의 값의 합은 $1+5=6$이다.

답 : 6

25. [2014년 포카칩 9월 30번]

함수 $g(x)$는 미분가능한 함수이고, 모든 실수 x에 대해 $g(x+4)=g(x)+4$를 만족시키므로 다음과 같은 곡선이 반복되어 나타날 것을 쉽게 알 수 있다.



편의상 $h(x)=\frac{1}{4}(x^4-6x^3+9x^2+4x)$로 두자. 이전 내용을 이해했다면 $f(-1)+4=h(3)$, $f'(-1)=h'(3)$이고 미분가능성에 의해 $f(0)=h(0)$, $f'(0)=h'(0)$을 쉽게 알 수 있을 것이다. 따라서 계산하면 다음을 알 수 있다. (계산 생략)

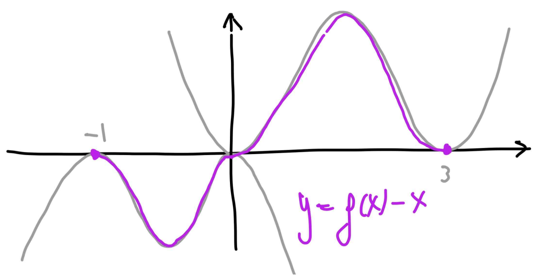
$$f(-1)=-1,\ f'(-1)=1,\ f(0)=0,\ f'(0)=1$$
$$\rightarrow f(x)=-x^4-2x^3-x^2+x$$

이후 함수 $g(x)$를 관찰하기 위해
닫힌구간 $[-1,0]$에서 함수 $f(x)$,
닫힌구간 $[1,3]$에서 $h(x)$를 관찰하자.

$f(x)=-x^4-2x^3-x^2+x$와 $h(x)=\frac{1}{4}(x^4-6x^3+9x^2+4x)$를 잘 관찰해보면 $f(x)-x$, $h(x)-x$를 생각해볼 수 있고,

$$f(x)-x=-x^2(x+1)^2$$
$$h(x)-x=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$$

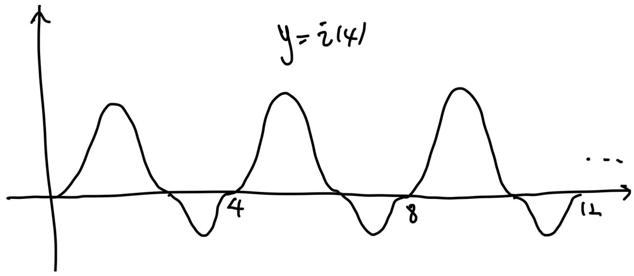
를 알 수 있다. (지금은 $f'(x)$, $h'(x)$의 부호변화를 관찰하기엔 도함수의 형태가 예쁘지 않아 다른 방법을 찾아본 것이다.) 따라서 $[-1,3]$에서 $y=g(x)-x$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



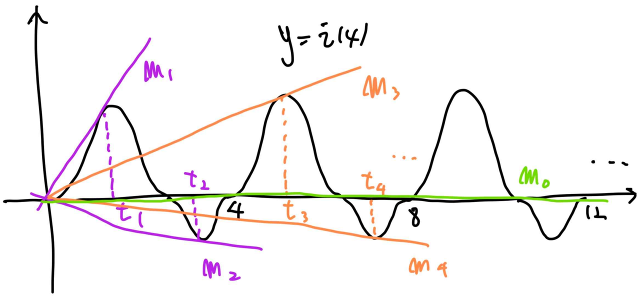
이때 $y=g(x)-x+x$를 관찰하여 함수 $g(x)$를 이용해도 좋지만, 지금은 $g(x)-x$를 이용하기 괜찮을 것 같으니 $i(x)=g(x)-x$로 잡고 $i(x)$를 중심으로 문제를 풀어보자. $i(x)=g(x)-x$이므로

$$g(x+4)=g(x)+4 \Leftrightarrow i(x+4)=i(x)$$
$$\{g'(t)\,|\,g(t)=tg'(t),\ 0\leq t<40\}$$
$$\Leftrightarrow \{i'(t)+1\,|\,i(t)=ti'(t),\ 0\leq t<40\}$$

임을 알 수 있다. $y=i(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같고,



이때 $\frac{i(t)}{t} = i'(t)$를 만족시키는 t들과, 그때 대응되는 기울기 m들을 표시하면 다음과 같다.

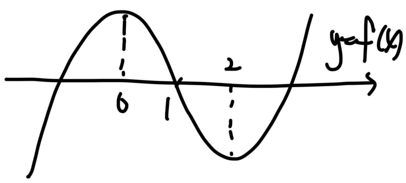


즉 닫힌구간 $[0,4]$에서 m_1, m_2, $\cdots$ $[36,40]$에서 m_{19}, m_{20}이 발생하고, $m_0 = 0$인 m_0까지 존재하여 구하는 집합의 원소의 개수는 21임을 알 수 있다.

답 : 21

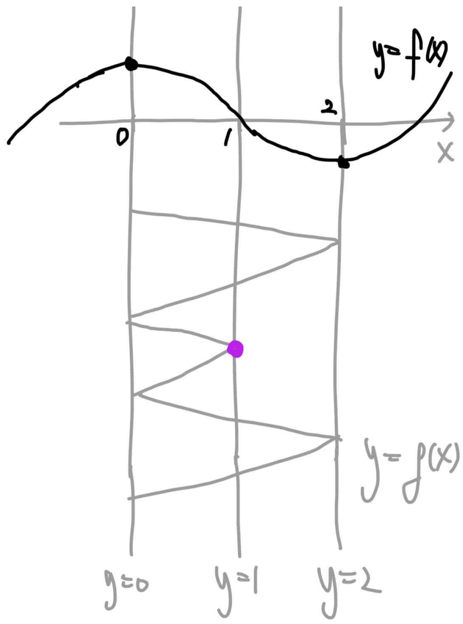
26. [2015년 JHJ 3월 20번] **[미적분]**

먼저 (가)에 의해 $f(1) = 0$이다.
한편 합성함수의 미분법을 생각하면 $(p(q(x)))' = p'(q(x))q'(x)$이므로 함수 $h(x)$가 미분불가능할 수 있는 점은 $g(x)$가 미분불가능한 점이다. 즉 $x = -2, -1, 0, 1, 2$이다.
이때 함수 $g(x)$는 우함수이므로 $h(x)$ 또한 우함수이고, (나)를 만족시키기 위해 미분불가능한 점의 개수가 1이 되려면 $x = 0$에서만 미분불가능해야 한다.
따라서 $x = -2, -1, 1, 2$에서 함수 $h(x)$는 미분가능해야 하고, 그러므로 $f'(0) = f'(2) = 0$이 되어야 한다.
($\because$ $g(-2) = g(2) = 2$, $g(-1) = g(1) = 0$) 정리하면 $y = f(x)$의 그래프를 다음과 같이 그릴 수 있고,



방정식 $f(x) = 0$의 정수해는 $x = 1$이 유일하다.
따라서 모든 실수 a에 대해 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{2x - n}$의 극한값이 존재하도록 하는 정수 n의 값은 2가 유일하다.
($\because$ $\frac{n}{2} = 1$)

[풀이2]
합성함수를 잘 이해하고 있다면 다음과 같이 쉽게 $y = f(x)$의 개형을 추론할 수 있다.



[참고] 사실 (가)만 가지고 답은 낼 수 있다. 다만 $f(x) = 0$을 만족시키는 정수 x가 유일하단 보장이 없으니 논리적인 과정이라고 하긴 다소 비약이 있다.
~~근데 뭐 답은 하나니깐 '대충 그렇겠지'하고 찍어도 상관없긴 하다.~~

답 : ①

〈여백의 미〉

27. [2015년 JHJ 6월 21번] **[미적분]**

모든 자연수 n에 대해 $a_{n+1}-a_n=n$, $a_1=\frac{1}{8}$이므로 다음을 알 수 있다.

$$
\begin{array}{rl}
& -a_1+a_2=1 \\
& -a_2+a_3=2 \\
& -a_3+a_4=3 \\
& \vdots \\
+ & -a_{n-1}+a_n=n-1
\end{array}
$$

$$a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2} \ \rightarrow \ a_n=\frac{(2n-1)^2}{8} \ \ (\because a_1=\frac{1}{8})$$

한편 수열 $\{S_n\}$이 등차수열이 되는 상황이 우리가 원하는 상황이므로

$$(n\ge 2) \ \ S_n-S_{n-1}=b_n=C=(\text{상수})$$

를 생각하자. b_n을 구하면 다음과 같고

$$b_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}}x^p dx=\left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right]_{a_n}^{a_{n+1}}$$

$$=\frac{1}{p+1}\left((a_{n+1})^{p+1}-(a_n)^{p+1}\right)$$

즉 $(a_{n+1})^{p+1}-(a_n)^{p+1}$이 상수가 되는 상황을 찾아야 한다. 이때 $a_n=\frac{(2n-1)^2}{8}$를 이용하면

$$(a_{n+1})^{p+1}-(a_n)^{p+1}=\frac{1}{8^{p+1}}\{(2n+1)^{2p+2}-(2n-1)^{2p+2}\}$$

이고, 곧 $(2n+1)^{2p+2}-(2n-1)^{2p+2}=C_1(=\text{상수})$가 되는 상황을 생각해야 한다. 따라서 $p=-\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

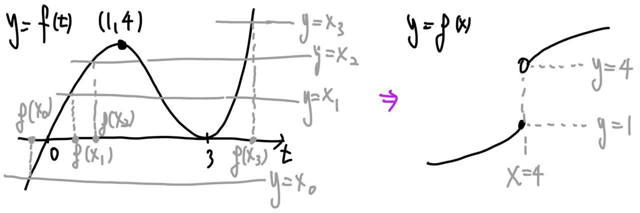
이후 계산하면 $S_2=b_1+b_2=\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{25}{8}}x^{-\frac{1}{2}}dx=2\sqrt{2}$이므로

$\frac{S_2}{p}=-4\sqrt{2}$이다.

답 : ④

28. [2015년 철지배 1회 21번]

$f(t)\ge x$를 만족하는 최소의 t를 $g(x)$라 한다. x를 상수로 취급하며 (x에 값을 대입해보며) 함수 $g(x)$를 관찰해보자. 예를 들어 $f(x)=x(x-3)^2$이라 하고 x를 대입시키며 상황을 살펴보면 다음과 같다.



위 그림을 잘 이해했다면 (가), (나)에 의해

$$f(x)=(x+k)^2(x-k)-2$$

로 놓을 수 있다. (단 $k>0$)

(만약 $f(x)$가 증가하는 삼차함수면 $g(x)$는 연속함수이고 곧, (가)에 모순이다.)

따라서 $f(3)=(3+k)^2(3-k)-2$이고,

$h(k)=(3+k)^2(3-k)-2$로 두면

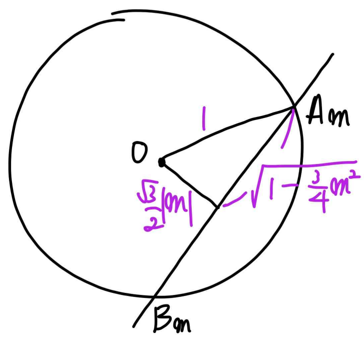
$h'(k)=(3+k)(3-3k)$이므로 $f(3)$의 최댓값은

$h(1)=30$임을 알 수 있다.

답 : ⑤

29. [2015년 철지배 3회 19번]

원점과 직선 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}m=0$의 거리는 $\frac{\sqrt{3}|m|}{2}$이다. 그리고 반지름의 길이는 1이므로 피타고라스 정리에 의해 다음과 같이 정리할 수 있다.



따라서 $f(m)=\frac{\sqrt{3}}{4}|m|\sqrt{4-3m^2}$이고

$$g(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4-3x^2} & (-1\le x<0, 0<x\le 1)\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & (x=0)\end{cases}$$

을 얻는다. 이후 마무리 계산을 하면 다음과 같다.

$$\int_{-1}^{1}\{g(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{4}-\frac{9}{16}x^2\right)dx=2\left[\frac{3}{4}x-\frac{3}{16}x^3\right]_0^1=\frac{9}{8}$$

답 : ④

30. [2015년 최고수학 6월 18번]

함수 $f(x)$는 미분가능하고 증가하므로 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재한다. 이때

$$f(f(x))=x \iff f(x)=f^{-1}(x)$$

이고, 모든 x에 대해 위 식이 성립해야 하므로 $f(x)=x$임을 의심해볼 수 있다. 이를 논증해보자.

$a\neq b$인 두 실수 a, b에 대해 $f(a)=b$를 만족한다고 가정하자. 그러면 $f^{-1}(b)=a$이고, $f(f(x))=x$에 $x=b$를 대입하면 $f(f(b))=b$이다. 따라서 $f(b)=a$를 얻는다.($\because f(a)=b$) 그러므로 $f(b)=f^{-1}(b)=a$이고 $b=a$이다. 이는 $a\neq b$에 모순이다.

따라서 $f(x)=x$이므로 마무리 계산을 하면 다음과 같이 답을 구할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{10}(f(k)+f(k+1))=\sum_{k=1}^{10}(2k+1)=\sum_{k=1}^{11}(2k-1)-1=120$$

($\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ (홀수들의 합은 제곱)정도는 알고 있으면 좋다.)

답 : ①

31. [2016년 GEAR 수능직전 21번]

(가)에 의해 $f(-x)=-f(x)$, $f'(-x)=f'(x)$ ($\cdots$㉠)이고

(나)에 의해 $g(x+f(a))=xf'(x)+f(x)$이다.

ㄱ. 참

대칭성을 확인하기 위해 $g(x+f(a))=xf'(x)+f(x)$에 $-x$를 대입해보면

$$\begin{aligned}g(-x+f(a))&=-xf'(-x)+f(-x)\\&=-xf'(x)-f(x)\ \ (\because ㉠)\end{aligned}$$

이고, 곧 $g(x+f(a))+g(-x+f(a))=0$임을 알 수 있다. 따라서 함수 $g(x)$는 점 $(f(a), 0)$에 대해 대칭이다.

ㄴ. 참

(나)에 $x=0$을 대입하면 $\int_a^{f(a)}g(t)\,dt=0$이다.

이때 $g(f(a))=0$이고 함수 $g(x)$는 미분가능한 증가함수이므로 $f(a)=a$가 되어야만 정적분 값이 0이 된다.

ㄷ. 참

주어진 관계식 $f(k)+k=g(k+a)$에서 함수 $f(x)$와 $g(x)$를 동시에 다루는 게 어떠한 이점이 있지 않다. 그러므로 하나의 함수로 정리하기 위해 $g(x+f(a))=xf'(x)+f(x)$를 이용하면 $f(a)=a$이므로 다음과 같다.

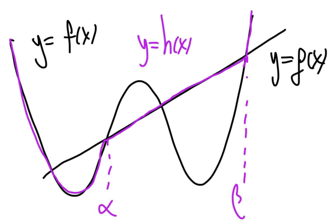
$$\begin{aligned}f(k)+k=g(k+a)&\iff f(k)+k=kf'(k)+f(k)\\&\iff k=kf'(k)\end{aligned}$$

따라서 주어진 관계식을 만족시키는 실수 $k=0$이 존재한다.

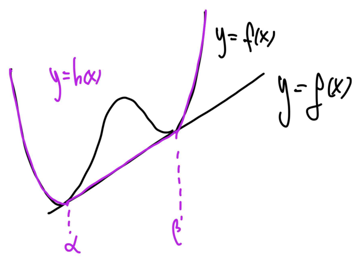
답 : ⑤

32. [2017년 MUSIK 2회 21번]

함수 $h(x)$는 대략 아래와 같이 이해할 수 있다.

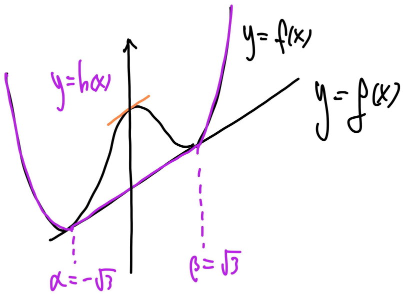


이때 (다)에 의해 아래와 같은 상황이 되어야 함을 알 수 있다.



한편 (가)에 의해 $i(x)=f(x)-(x+k)$로 두면 $i'(x)+i'(-x)=0$임을 알 수 있다. 따라서 $y=f(x)-g(x)$는 y축에 대해 대칭이고, $\beta-\alpha=2\sqrt{3}$이므로 곧 다음과 같음을 알 수 있다.

(빼기함수의 역방향을 생각하자.)



이후 $g(\alpha)=-\sqrt{3}+k$, $g(\beta)=\sqrt{3}+k$이므로 (나)에 의해 $\dfrac{-\sqrt{3}+k}{\sqrt{3}+k}=\sqrt{3}-2$이고, 계산하면 $k=1$이다.

따라서 $f(x)-(x+1)=(x^2-3)^2$이고, $f(3)=40$을 얻는다.

답 : ②

33. [2018년 Epsilon 1회(나형) 16번]

다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{xf'(x)}=\dfrac{1}{2}$이므로 $f(x)$는 이차함수임을 알 수 있다. 이후 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{xf'(x)}=\dfrac{1}{2}$에서 $f(0)=0$을 얻을 수 있고, 극한값이 $\dfrac{1}{2}$임을 이용하기 위해 $f(x)=ax^2+bx$라 두고 계산하면 다음과 같다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx}{2ax^2+bx}=\frac{1}{2}\ \to\ b=0$$

(만약 $b\neq 0$이면 극한값은 1이 됨)

따라서 $f(x)=ax^2$이고, $f(6)=k\times f(2)$이므로 $36a=4ka$에서 $k=9$를 알 수 있다.

답 : ②

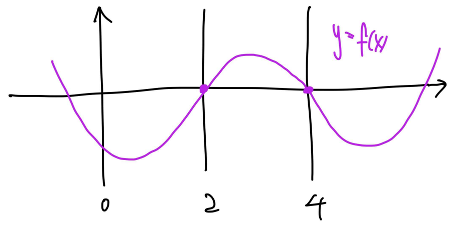
34. [2018년 Epsilon 1회(나형) 19번]

함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이므로 (나)에 의해

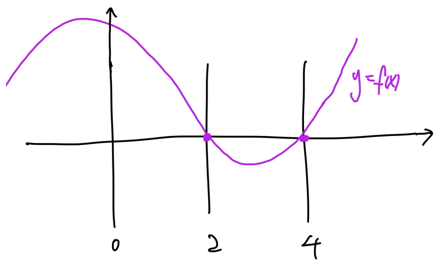
$(0,2)$에서 $f(x)<0$이면서 $(2,4)$에서 $f(x)>0$ ⋯ ①
$(0,2)$에서 $f(x)>0$이면서 $(2,4)$에서 $f(x)<0$ ⋯ ②
$(2,4)$에서 $f(x)<0$이면서 $(4,6)$에서 $f(x)>0$ ⋯ ③
$(2,4)$에서 $f(x)>0$이면서 $(4,6)$에서 $f(x)<0$ ⋯ ④

에서 ①이면서 ④이거나 ②이면서 ③인 상황이 가능하고, 이때 $f(2)=f(4)=0$을 알 수 있다.

만약 ①이면서 ④이면 (가)에 의해 아래와 같고, 이는 삼차함수 $f(x)$에 모순이다.



반대로 ②이면서 ③인 상황은 아래와 같고, 조건을 만족시키는 경우임을 알 수 있다.



ㄱ, ㄴ참
이전 과정 참고

ㄷ. 참
$f(x)=(x-a)(x-2)(x-4)$로 놓을 수 있고, $f'(0)\leq 0$이므로 계산을 통해 $8+6a\leq 0$에서 $a\leq -\dfrac{4}{3}$을 얻는다.

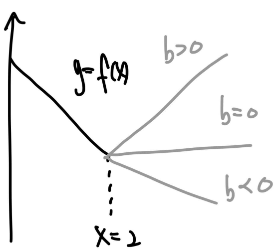
한편 $f(0)=-8a\geq\dfrac{32}{3}$이고, $M\geq f(0)$이므로 $M\geq\dfrac{32}{3}$이다.

[참고] 어떤 두 대상을 비교할 때는 비교하기 좋게 최대한 맞춰주는 게 좋다. 이때 M을 계산으로 구하기엔 쉽지 않으니 $\dfrac{32}{3}$의 의미를 추론하여 M과 비교해야 한다.

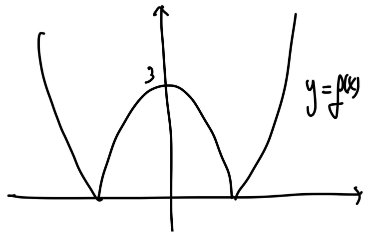
답 : ⑤

35. [2018년 Epsilon 1회(나형) 21번]

연속함수 $f(x)$는 대략 아래와 같이 이해할 수 있다.



$y=g(x)$ 의 그래프는 아래와 같다.

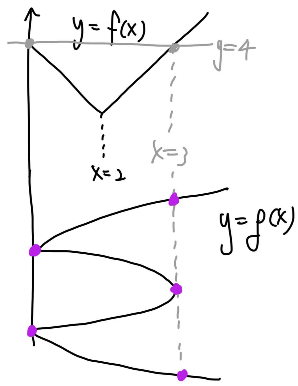


한편 방정식 $f(g(x))=4$ 의 실근의 개수에 대한 조건을 이용해야 하므로 방정식 $f(x)=4$ 의 양의 실근에 개수를 기준으로 경우를 나눌 수 있다.

방정식 $f(x)=4$ 의 양의 실근이 존재하지 않으면 $f(g(x))=4$ 의 실근도 존재하지 않아 모순이다.

비슷하게 방정식 $f(x)=4$ 의 양의 실근이 하나만 존재하면 $f(g(x))=4$ 의 실근의 개수는 최대 4개까지만 가능하므로 모순이다.

따라서 방정식 $f(x)=4$ 의 양의 실근의 개수는 2가 되어야 한다.
이후 방정식 $g(x)=t$ 의 실근의 개수를 $h(t)$ 라 하면 $h(t)=2,4,3$ 이 가능하므로($h(x)=3$ 은 $x=3$ 이 유일) 다음과 같은 상황이 되어야 함을 알 수 있다.



$f(0)=4$ 에 의해 $a=4$,
$f(2)=2$ 에 의해 $2b+c=2$, ($\because$ 연속성)
$f(3)=4$ 에 의해 $3b+c=4$ 이다.
따라서 $a=4$, $b=2$, $c=-2$ 이고 $abc=-16$ 이다.

답 : ④

36. [2018년 Epsilon 1회(나형) 29번]

함수 $f(x)=|(x-8t)(x^2-4x+16)|$ 는 $h(x)=(x-8t)(x^2-4tx+16)$ 으로 두면 $h(x)=0$ 인 x 와 $h'(x)=0$ 인 x 에서 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 될 수 있다.
먼저 $h(8t)=0$ 은 자명하고, 방정식 $x^2-4tx+16=0$ 의 실근의 개수를 기준으로 경우를 나눠보자.

$$x^2-4tx+16=0 \ \rightarrow \ D/4=4(t^2-4)$$

• $0<t<2$ 일 때 ($h(x)=0$ 의 실근이 $x=8t$ 하나일 때)
$h(x)=0$ 인 x 는 정해졌으니 $h'(x)=0$ 인 x 를 알아보자.
계산하면 $h'(x)=3x^2-24tx+32t^2+16$ 이고,
$h'(x)=0$ 에서 판별식을 구하면 $D/4=48(t^2-1)$ 이다. 다시 경우를 나눠보자.

$0<t\le 1$ 일 때
$D/4=48(t^2-1)\le 0$ 이므로 $h(x)$ 는 증가함수임을 알 수 있다. 따라서 $f(x)$ 의 극대, 극소가 되는 x 의 개수는 $x=8t$ 로 1개다.

$1<t<2$ 일 때
$D/4=48(t^2-1)>0$ 이므로 $h(x)$ 는 극대, 극소를 갖는 삼차함수임을 알 수 있다. 이때 $h(x)=0$ 인 $x=8t$ 에서 $h'(x)=0$ 이면 $f(x)$ 의 극대, 극소의 개수가 달라지니 $h'(8t)=0$ 이 될 수 있는지 확인하자.

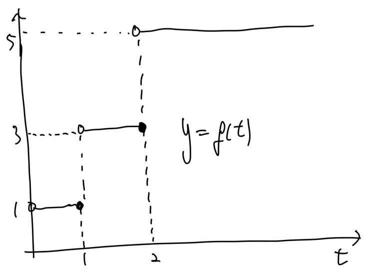
$h'(x)$ 를 구하여 $x=8t$ 를 대입하긴 조금 불편하니 잠시 생각해보면, 만약 $x^2-4tx+16|_{x=8t}=0$ 이면 $h(x)$ 는 $(x-8t)^2$ 을 인수로 가져 $h'(8t)=0$ 임을 알 수 있다. 하지만 $32t^2+16\ne 0$ 이므로 $h'(8t)\ne 0$ 이고, 곧 $h(x)=0$ 인 x 와 $h'(x)=0$ 인 x 는 겹치지 않음을 알 수 있다.
따라서 $f(x)$ 의 극대, 극소가 되는 x 의 개수는 3이다.

• $t=2$
$h(x)=(x-16)(x-4)^2$ 이므로 $f(x)$ 의 극대, 극소가 되는 x 의 개수는 3이다.

• $t>2$일 때

$1<t<2$일 때의 상황에서 t의 값에 관계없이 $x^2-4tx+16|_{x=8t}\neq 0$임을 알고 있다. 따라서 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이고, 이는 삼차함수 $h(x)$의 극대, 극소와 겹치지 않으므로 $f(x)$의 극대, 극소가 되는 x의 개수는 5이다.

각 경우를 참고하여 $y=g(t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 구하는 m의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이고 $p+q=5$이다.

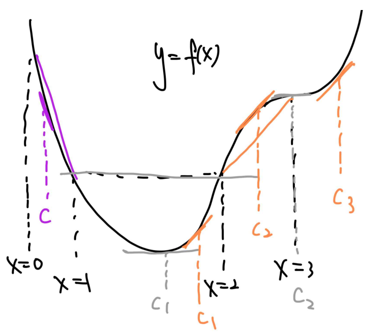
답 : 5

37. [2018년 Epsilon 1회(나형) 30번]

어떤 정수 n에 대해 $f(n+1)-f(n)=f'(c)$를 만족시키는 실수 c의 개수가 $g(n)$이다.
이때 $f'(x)$는 삼차함수이므로 c에 대한 방정식 $f(n+1)-f(n)=f'(c)$의 실근의 개수는 1 또는 2 또는 3이다. 즉 $g(n)$의 치역의 원소는 1 또는 2 또는 3이다. 이때 (나)에 의해

$$g(0)=1,\ g(1)=2,\ g(3)=3$$

이다. 이후 $\frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n}=f'(c)$으로 보면 (가)와 $g(1)=2$에 의해 아래와 같은 상황임을 알 수 있다.
($g(0)=1$은 보라색, $g(1)=2$은 회색, $g(3)=3$은 주황색으로 표시했다.)



즉 $f(1)=f(2)$, $f'(3)=f''(3)=0$이다.
$f'(3)=f''(3)=0$에 의해 $f(x)=(x-a)(x-3)^3+p$로 놓을 수 있고, $f(1)=f(2)$를 이용하여 계산하면 $a=\frac{6}{7}$을 얻는다. 따라서 $f(x)=\left(x-\frac{6}{7}\right)(x-3)^3+p$이고, 계산하면 $f(0)-f(4)=20$임을 알 수 있다.

답 : 20

38. [2018년 Epsilon 2회(나형) 17번]

$n=1$일 때

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-2}=f(1)\ \rightarrow\ f(1)=0$$

$n=2$일 때

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=f(2)\ \rightarrow\ f(2)=f'(2)=0$$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)^2$이고, 36이다.

답 : ②

39. [2018년 Epsilon 2회(나형) 20번]

(가)조건부터 차근차근히 보자.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{xg(x)}=4\ \rightarrow\ g(x)=\frac{1}{4}x^3+\cdots$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{xg(x)}=0\ \rightarrow\ f(0)=0,\ f'(0)=0$$

이제 (나)조건을 보자.

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2f(x)}{g(x)}=12\ \rightarrow\ g(1)=g'(1)=0$$

이고, 극한값이 12임을 이용하기 위해 이때까지 얻은 정보로 식을 세워보면

$$g(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2(x-2)\ \ (\because g(2)=0)$$

이고,

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{4f(x)}{x-2}=12$$

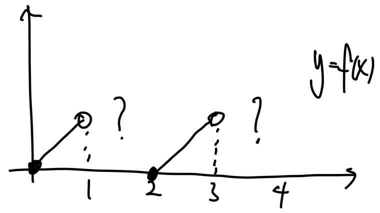
에서 $f(1)=-3$을 얻는다. 이후 (다)에 의해 $\lim_{x\to2}\frac{4f(x)}{(x-1)^2(x-2)}$가 존재해야 하므로 $f(2)=0$을 얻는다. 정리하면 $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f(1)=-3$, $f(2)=0$이므로 계산을 통해 $f(x)=x^2(x-2)(x+2)$을 알 수 있다.

따라서 $f(3)+g(3)=45+1=46$이다.

답 : ⑤

40. [2018년 Epsilon 2회(나형) 21번]

먼저 이미 결정된 $[0,1)$, $[2,3)$에서의 $y=f(x)$의 그래프만 그려보면 대략 다음과 같다.

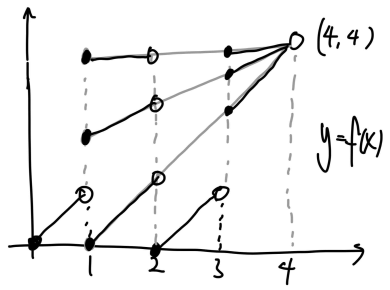


한편 $g(x)=f(f(x))$는 구간 $[0,4)$에서 정의되어야 하므로 $0<p\le 4$인 실수 p에 대해 $f(x)$의 치역은 $[0,p)$가 되어야 한다.

이때 (가)에 의해 $p=4$가 되어야 하고, a의 양수 조건에 의해 $y=ax+b$는 증가함수이므로 $4a+b=4$가 되어야 한다. ⋯ ㉠

또한 $0\le a+b$를 만족해야 한다. ⋯ ㉡ ($\because 0\le f(x)$)

지금까지 상황을 정리하면 대략 아래와 같다.



한편 $f(x)$는 $x=1,2,3$에서 불연속이 될 수도 있으니 (나)에 의해 $f\left(\frac{3}{2}\right)$의 값은 1 또는 2 또는 3이 되어야 한다. 경우를 나눠 생각하자.

• $f\left(\frac{3}{2}\right)=1$

$\frac{3}{2}a+b=1$이고 ㉠에 의해 $4a+b=4$이다.

따라서 $a=\frac{6}{5}$, $b=-\frac{4}{5}$이고, ㉡을 만족함을 알 수 있다.

이후 $ax+b=\frac{6}{5}x-\frac{4}{5}$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이 된다. (지금은 $f\left(\frac{3}{2}\right)=1$이란 정보만 이용했으므로 $f\left(\frac{3}{2}\right)=1$일 때 실제로 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속이 되는지까지 체크해줘야 한다. 물론 지금은 $y=ax+b$가 증가하는 직선이므로 $f\left(\frac{3}{2}\right)$의 값이 1일 때, 2일 때, 3일 때 모두 실제로 불연속이 되긴 한다.)

따라서 극한값을 계산하면 다음과 같다.

$$\lim_{x\to 2-} g(x)=\lim_{x\to \frac{8}{5}-} f(x)=\frac{28}{25}$$

• $f\left(\frac{3}{2}\right)=2$

$\frac{3}{2}a+b=2$이고 ㉠에 의해 $4a+b=4$이다.

따라서 $a=\frac{4}{5}$, $b=\frac{4}{5}$이고, ㉡을 만족함을 알 수 있다.

이후 극한값을 계산하면 다음과 같다.

$$\lim_{x\to 2-} g(x)=\lim_{x\to \frac{12}{5}-} f(x)=\frac{2}{5}$$

• $f\left(\frac{3}{2}\right)=3$

$\frac{3}{2}a+b=3$이고 ㉠에 의해 $4a+b=4$이다.

따라서 $a=\frac{2}{5}$, $b=\frac{12}{5}$이고, ㉡을 만족함을 알 수 있다.

이후 극한값을 계산하면 다음과 같다.

$$\lim_{x\to 2-} g(x)=\lim_{x\to \frac{16}{5}-} f(x)=\frac{92}{25}$$

각 경우에 의해 $M=\frac{92}{25}$, $m=\frac{2}{5}$이고, 곧 $M-m=\frac{82}{25}$이다.

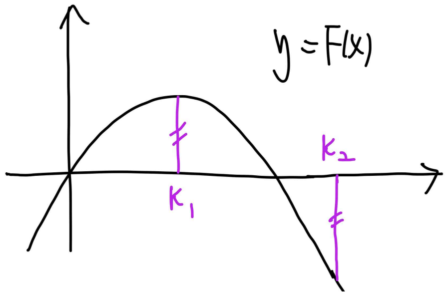
답 : ④

〈여백의 미〉

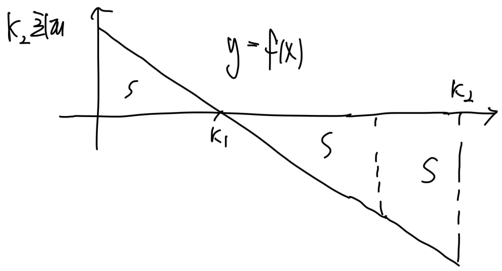
41. [2018년 Epsilon 2회(나형) 29번]

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$로 두면 $0<k_1<k_2$인 실수 k_1, k_2에 대해 $F(k_1)+F(k_2)=0$임을 알 수 있다.

이때 함수 $F(x)$는 $F(0)=0$이고 최고차항의 계수가 음수인 이차함수이므로, 만약 $y=F(x)$가 x축에 접하는 상황이면 k_1, k_2는 서로 다른 두 양수이므로 $F(k_1), F(k_2)<0$이고, 곧 $F(k_1)+F(k_2)=0$를 만족할 수 없다. 비슷하게 방정식 $F(x)=0$의 두 실근이 존재할 때, 하나의 실근이 음수가 되면 마찬가지로 $F(k_1), F(k_2)<0$이고, $F(k_1)+F(k_2)=0$를 만족시킬 수 없다. 따라서 방정식 $F(x)=0$은 $x=0$과 어떤 양수를 실근으로 갖고, k_2가 최대가 되는 상황은 다음과 같다.



위 상황을 $y=f(x)$에 대해 해석하면 다음과 같다.



위 상황에서 $k_1=m$으로 두면 음수 a에 대해 $f(x)=a(x-m)$로 놓을 수 있고,

$$\int_0^M a(x-m)\,dx+\int_0^m a(x-m)\,dx=0$$

$$\rightarrow\ \frac{a(M-m)^2}{2}-\frac{am^2}{2}-\frac{am^2}{2}=0$$

$$\rightarrow\ M=(1+\sqrt{2})m\ \ (\because M>m)$$

이후 $f(M)=\sqrt{2}am$이고

$$-\int_0^M |f(t)|\,dt=-3\int_0^m f(t)\,dt=\frac{3}{2}am^2$$

이므로 조건에 의해

$$\sqrt{2}am=\frac{3}{2}am^2\ \rightarrow\ m=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이고 $M=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{2}$임을 알 수 있다.

$\therefore\ p+q=2$

답 : 2

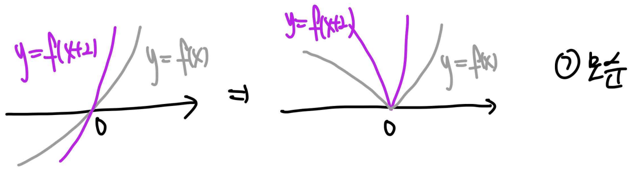
42. [2018년 Epsilon 2회(나형) 30번]

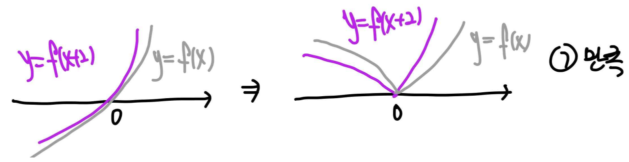
먼저 $g'(x)=|f(x+2)|-|f(x)|$,

$g(x)=\int_x^{x+2}|f(t)|dt-2$를 알 수 있다.

이후 (나)에 의해 두 곡선 $y=|f(x+2)|$, $y=|f(x)|$가 만난다면 그 지점에서는 서로 교차해야 함을 알 수 있다.(…㉠) 이때 (가)에 의해 두 곡선 $y=|f(x+2)|$, $y=|f(x)|$는 $(0,0)$에서 만나므로 $(0,0)$부터 확인해보자.

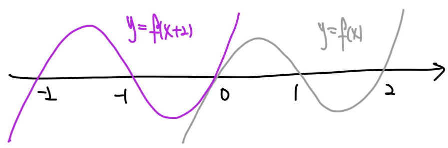
절댓값에 의해 ㉠를 만족시키기 위해선 아래와 같이 $|f'(2)|=|f'(0)|$이 되어야 한다.

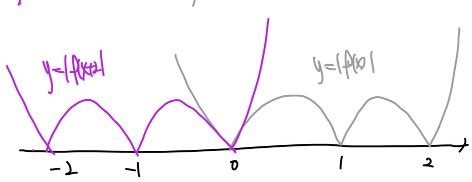




따라서 양수 p에 대해 $f(x)=px(x-2)(x-a)$로 두면 $|f'(2)|=|f'(0)|$에 의해 $a=1$을 얻는다.

고로 $f(x)=px(x-2)(x-1)$이고 아래와 같은 상황임을 알 수 있다.





이제 남은 조건인 (다)를 이용하여 p에 대한 부등식을 얻자.

$g'(x)=|f(x+2)|-|f(x)|$ 이므로 주어진 그림을 참고하면 $g(x)$는 $x=0$에서 최소가 됨을 알 수 있다. 그러므로 (다)에 의해 $g(0)\ge 0$이 되어야 한다.

이때 $g(x)=\int_x^{x+2}|f(t)|dt-2$이므로 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\int_0^2 |pt(t-1)(t-2)|dt \ge 2$$

$$\to\ 2\int_{-1}^0 pt(t+1)(t-1)\,dt \ge 2$$

$$\to\ 2p\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^0 = \frac{p}{2}\ge 2$$

따라서 $p\ge 4$이고, $(f(3))^2=36p^2\ge 576$이므로 구하는 값은 576이다.

답 : 576

43. [2018년 MUSIK(나형) 18번]

함수 $g(x)$의 불연속 후보지점은 $x=\pm 2$이다.
차근차근히 알아보자.

- $x=-2$

$$\lim_{x\to -2+} g(x)=\lim_{x\to -2-} g(x)$$

$$\to\ \lim_{x\to -2+}\frac{f(x)}{x^2-4}=\lim_{x\to -2-}(f(x)+x)$$

$$\to\ -\frac{1}{4}f'(-2)=-2,\ f(-2)=0$$

$$\to\ f'(-2)=8,\ f(-2)=0$$

- $x=2$

$$\lim_{x\to 2+} g(x)=\lim_{x\to 2-} g(x)$$

$$\to\ \lim_{x\to 2+}(f(x)+x)=\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)}{x^2-4}$$

$$\to\ \frac{1}{4}f'(2)=2,\ f(2)=0$$

$$\to\ f'(2)=8,\ f(2)=0$$

따라서 $f(x)=x(x+2)(x-2)$이고, $f(4)=48$이다.

답 : ④

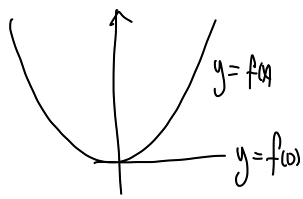
44. [2018년 MUSIK(나형) 19번]

[참고] 답지엔 ④로 되어있지만 오타인 듯 하다. 답은 ①이다. 또한 문제에서 $\int_t^x f(t)dt$를 $\int_t^x f(s)\,ds$로 보는 게 맞고, '방정식 ~의 실근의 개수'를 '방정식 ~의 서로 다른 실근의 개수'로 보는 게 자연스럽다. (예를 들어 중근인 경우 실근의 개수를 1로 볼지, 2로 볼지 애매하기 때문인데 문제의 문맥상으론 중근은 1개로 보는 게 맞는 것 같다.)

함수 $g(t)$는 방정식 $\int_t^x f(s)\,ds\times\{f(x)-f(0)\}=0$의 서로 다른 실근 x의 개수이다. 예를 들어 $g(1)$은 방정식 $\int_1^x f(s)\,ds\times\{f(x)-f(0)\}=0$의 서로 다른 실근 x의 개수와 같다.

ㄱ. 참

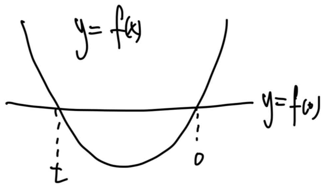
$g(0)$은 방정식 $\int_0^x f(s)\,ds\times\{f(x)-f(0)\}=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 이때 방정식 $f(x)-f(0)=0$에서 실근 $x=0$은 자명하니 방정식 $\int_0^x f(s)\,ds=0$과 $f(x)-f(0)=0$의 실근이 $x=0$뿐이 되는 상황이 존재하는지 체크하자.
먼저 방정식 $f(x)-f(0)=0$이 $x=0$을 중근으로 가져야 하므로 다음과 같이 그래프를 그릴 수 있고

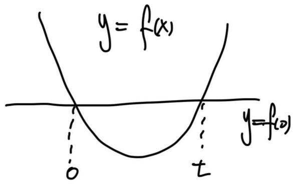


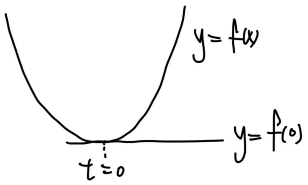
방정식 $\int_0^x f(s)\,ds=0$을 넓이 관점으로 생각해보면 $f(0)\ge 0$일 때 방정식 $\int_0^x f(s)\,ds=0$의 실근은 $x=0$이 유일함을 알 수 있다. 따라서 $g(0)$의 최솟값은 1이다. ($f(0)<0$이면 $\int_0^\alpha f(x)\,dx=0$인 양수 α, $\int_\beta^0 f(x)\,dx=0$인 음수 β가 존재하여 $g(t)=3$이다.)

ㄴ. 거짓

$f(t)=f(0)$ 인 상황은 다음과 같다.



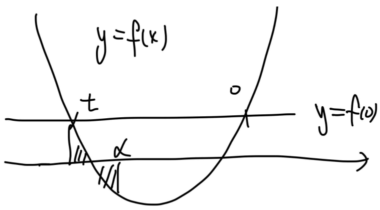


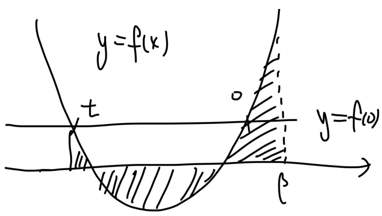


$t=0$ 인 상황은 이전 과정을 참고하면 $g(t)$ 의 최댓값은 3 이다.

반면에 $t<0$ 인 상황은 다음과 같이

$\int_t^{\alpha} f(x)dx=\int_t^{\beta} f(x)\,dx=0$ 인 α,β가 존재하고



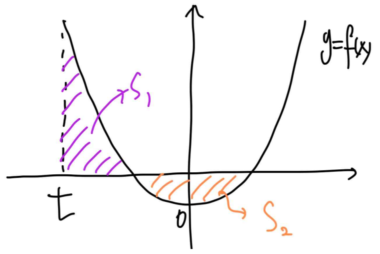


따라서 방정식 $\int_1^x f(s)\,ds\times\{f(x)-f(0)\}=0$ 의 실근은

$x=t,\alpha,0,\beta$ 로 4 개 존재함을 알 수 있다. 따라서 $g(t)$ 의 최댓값은 3 이 아니다.

($t>0$ 일 때도 대칭성을 생각하면 $t<0$ 과 같음을 알 수 있다.)

ㄷ. 거짓



이전 그림과 같은 상황에서 각 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, S_2 라 하자.

이때 $S_1>S_2$ 이면 방정식 $\int_t^x f(s)\,ds=0$ 의 실근은 $x=t$ 가 유일하고, 방정식 $f(x)-f(0)=0$ 의 실근은 $x=0$ 이 유일하다. 따라서 $g(t)$ 의 최솟값은 3 이 될 수 없다.

답 : ①

45. [2018년 MUSIK(나형) 21번]

(가)에 의해 다음과 같이 함수 $f(x), g(x)$ 가 가진 인수 x 의 개수를 기준으로 경우를 나눌 수 있다.

	$f(x)$	$g(x)$		$f'(x)$	$g'(x)$
i	3개	2개	→	2개	1개
ii	2개	2개	→	1개	1개
iii	3개	1개	→	1개	0개

(i)의 경우

$f(x)=x^3$, $g(x)=x^2$이므로 $f(x)g(x)=x^5$이고

(나)를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii)의 경우

$f(x)=x^2(x-a)$, $g(x)=x^2$ 으로 놓을 수 있고,

$f(x)g(x)=x^4(x-a)$ 이다.

따라서 $a=-4$, $n=4$ 일 때 (나)를 만족시킨다.

정리하면 $f(x)=x^3+4x^2$ 이고 $g(x)=x^2$ 이다.

이 경우 계산하면 $f'(2)g'(2)=112$ 이다.

(iii)의 경우

$f(x)=x^3$, $g(x)=x(x-a)$ 로 놓을 수 있꼬,

$f(x)g(x)=x^4(x-a)$ 이다. 이전과 같이 $a=-4$, $n=4$ 이고 (나)를 만족시킨다.

정리하면 $f(x)=x^3$이고 $g(x)=x^2+4x$ 이다.

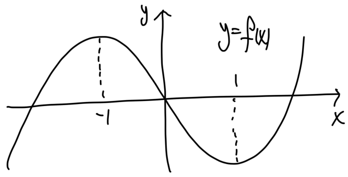
이 경우 계산하면 $f'(2)g'(2)=96$ 이다.

따라서 가능한 모든 $f'(2)g'(2)$ 의 값의 합은 $112+96=208$ 이다.

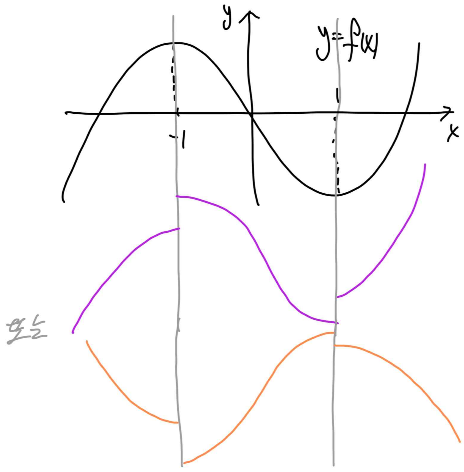
답 : ①

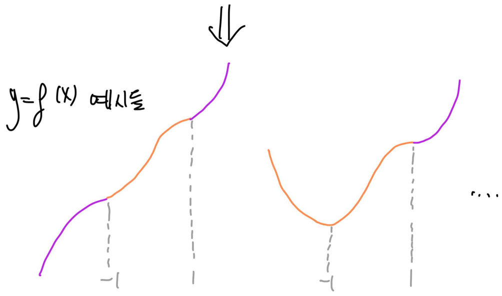
46. [2018년 MUSIK(나형) 30번]

먼저 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같고,



(가)에 의해 $y=g(x)$의 그래프는 구간 $(-\infty, -1]$, $(-1, 1)$, $[1, \infty)$에서의 각각의 곡선 $y=f(x)$를 x축에 대해 대칭시키든 상관없이 적당히 연속이 되도록 평행이동 시켜 나오는 그래프임을 알 수 있다. 예를 들어 아래와 같다.



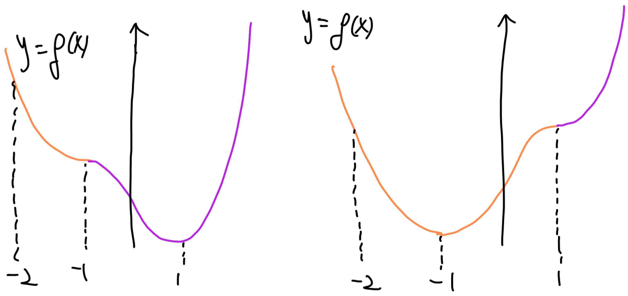


이 정도로 함수 $g(x)$를 이해하자.

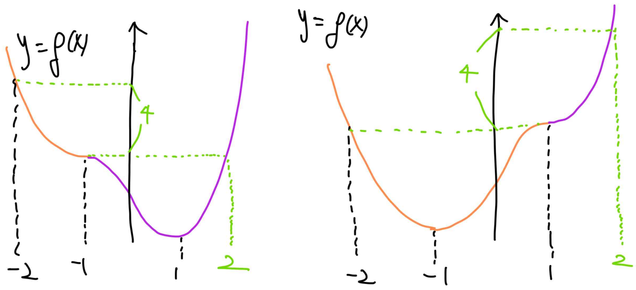
이제 (나)를 이용하자. $f(x)$의 함숫값을 관찰하면

$f(0)=0$, $f(1)=-2$, $f(2)=2$, $f(3)=18$ $\cdots$

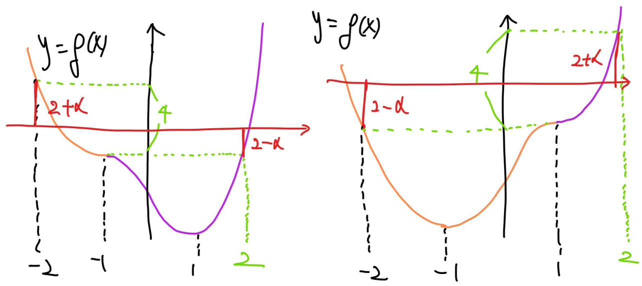
이다. 이때 $f(1)<f(2)<f(3)<\cdots$ 이므로 구간 $[1, \infty)$에서 $g(x)$는 증가해야 한다. 이후 $g(-2)\geq g(0)$을 만족해야 하므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같은 두 경우만 가능함을 알 수 있다.



이때 $f(-1)=2$이고 비율관계를 생각하면 $f(1)=f(-2)$이므로 다음과 같음을 쉽게 알 수 있다.



이후 절댓값의 의미를 거리로 생각하면 $|g(-2)|$, $|g(2)|$는 각각 $(-2, g(-2))$, $(2, g(2))$에서 x축까지의 거리이므로 다음과 같은 상황에서 $|g(-2)|+|g(2)|$는 최솟값 4를 가짐을 알 수 있다.



답 : 4

〈여백의 미〉

47. [2018년 진문 1회(나형) 20번]

[참고] 답지엔 ③이지만 오타같다. 답은 ①이다.

$f(x)g(x)=\begin{cases} xf(x) & (f(x)\ge 0) \\ -xf(x) & (f(x)<0)\end{cases}$이다.

편의상 $f(\alpha)=0$이고 $x=\alpha$근방에서 함수 $f(x)$가 증가한다고 하자. 그러면 $x=\alpha$근방에서 다음과 같다.

$$f(x)g(x)=\begin{cases} xf(x) & (x\ge \alpha) \\ -xf(x) & (x<\alpha)\end{cases}$$

ㄱ. 참

$$\lim_{x\to\alpha+} f(x)g(x)=\lim_{x\to\alpha-} f(x)g(x)=f(\alpha)g(\alpha)=0$$

이고, $x=\alpha$에서 $f(x)$가 감소할 때, 극대를 가질 때도 비슷한 과정으로 좌극한, 우극한, 함숫값이 같을 것이다.

ㄴ. 거짓

함수 $f(x)g(x)$는 연속함수이고, $f(\alpha)g(\alpha)=0$이므로 $|f(x)g(x)|$가 $x=\alpha$에서 미분가능하려면 $f(x)g(x)$는 $x=\alpha$에서 x축에 접해야 한다. 이때

$$(f(x)g(x))'=\begin{cases} xf'(x)+f(x) & (x>\alpha) \\ -xf'(x)-f(x) & (x<\alpha)\end{cases}$$

이므로 $\alpha\ne 0$이면 $f'(\alpha)=f(\alpha)=0$을 만족해야만 조건을 만족시킴을 알 수 있다.

따라서 다음과 같은 반례를 생각할 수 있다.

$\alpha\ne 0$이고 $f(x)=x-\alpha$일 때

$$f(x)g(x)=\begin{cases} x(x-\alpha) & (x\ge \alpha) \\ -x(x-\alpha) & (x<\alpha)\end{cases}$$

이고, $|f(x)g(x)|$는 $x=\alpha$에서 첨점을 갖는다.

ㄷ. 거짓

ㄴ 과정과 비슷하게 도함수

$$(f(x)g(x))'=\begin{cases} xf'(x)+f(x) & (x>a) \\ -xf'(x)-f(x) & (x<a)\end{cases}$$

를 관찰하면 양수 a에 대해 $f'(x)$가 $x=a$근방에서 $f'(x)<0$이면 $x=a$에서 극대이다. 따라서 다음과 같은 반례를 생각할 수 있다.

$a>0$이고 $f(x)=-x+a$일 때

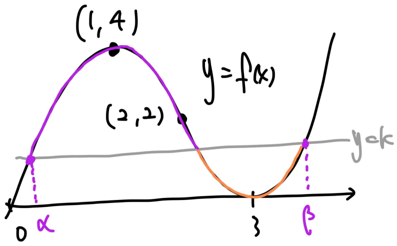
$$f(x)g(x)=\begin{cases} -x(x-a) & (x\ge a) \\ x(x-a) & (x<a)\end{cases}$$

이고, $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

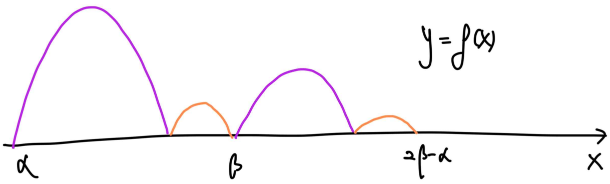
답 : ①

48. [2018년 진문 1회(나형) 21번]

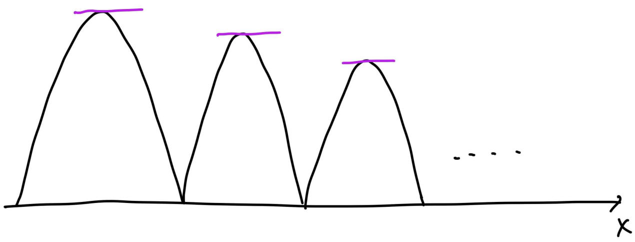
주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 상황을 이해해보면 다음과 같고



(나)에 의해 $y=g(x)$의 그래프는 대략 다음과 같다.



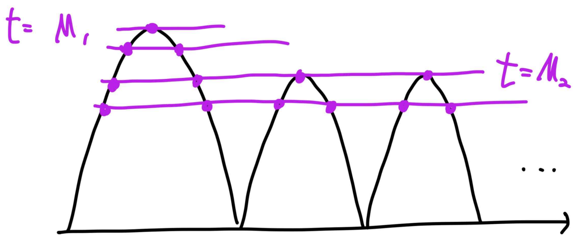
한편 $h(t)$는 곡선 $y=g(x)$와 $y=t$의 교점의 개수이므로 편의상 $y=g(x)$의 봉오리들(?)을 내림차순 느낌으로 다시 배열시키면 다음과 같다.



이때 만약 극댓값이 겹치치는 상황이 없다면 t가 감소함에 따라 $g(t)$는 $1,2,3,4,\cdots$가 되므로 집합 S는 공집합이 된다. ($k=0$일 때도 이와 같은 이유로 모순이다.)

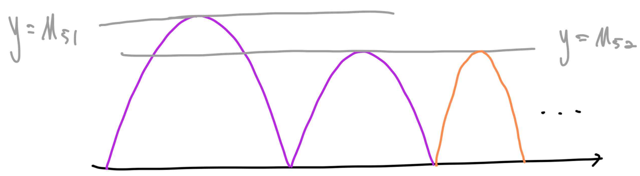
반대로 만약 겹치는 게 있는 상황을 살펴보자.

극댓값들을 큰 순서대로 $M_1, M_2, \cdots$라 할 때 다음과 같이 M_2가 겹치는 상황이 존재하면 t가 감소함에 따라 $g(t)$는 $1,2,4,6,\cdots$가 된다.



즉 이러한 상황은 S의 원소 중 가장 작은 것이 3이 된다. ($k=2$이면 집합 S의 원소 중 가장 작은 것이 1이 되어 모순이다.)

이전 과정을 잘 이해했다면 집합 S가 공집합이 아니며 집합 S의 원소 중 가장 작은 것이 103이 되는 것은 t가 감소함에 따라 $g(t)$는 $1, 2, 3, \cdots, 102, 104, \cdots$가 되는 상황임을 알 수 있고, 내림차순으로 정리한 봉오리들에 대한 그림으로 이해하면 다음과 같다.



이후 $4-k=a$, $k=b$라 두면 $y=g(x)$의 극댓값은

$$a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2^2}, \frac{a}{2^3}, \cdots$$

$$b, \frac{b}{2}, \frac{b}{2^2}, \frac{b}{2^3}, \cdots$$

임을 알 수 있다. 따라서 위 그림의 상황은

$\frac{a}{2^{51}}=b$와 같음을 알 수 있고, $a+b=4$이므로

$b=\frac{4}{2^{51}+1}$임을 알 수 있다.

그러므로 조건을 만족시키는 $k(=b)$는 $\frac{4}{2^{51}+1}$이고,

이때 $\log_2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{4}\right)=49$이다.

답 : ②

49. [2018년 진문 1회(나형) 29번]

함수 $f(x)\{f'(x)+9\}$는 삼차함수이므로 극솟값 0을 가지려면 $(x-\alpha)$를 인수로 2개 가져야 한다.

• $f(x)$가 $(x-\alpha)^2$을 인수로 가질 때
$f(x)=-2(x-\alpha)^2$으로 두면 계산을 통해

$$f(x)\{f'(x)+9\}=8(x-\alpha)^2\left(x-\frac{4\alpha+9}{4}\right)$$

임을 알 수 있다. 이때 $\alpha<\frac{4\alpha+9}{4}$이므로 함수 $f(x)\{f'(x)+9\}$는 극댓값 0을 가져 모순이다.

• $f(x)$, $f'(x)+9$가 각각 $(x-\alpha)$를 하나씩 가질 때
$f(x)=-2(x-\alpha)(x-\beta)$로 놓으면 (단, $\alpha\neq\beta$)
$f'(x)+9=-4\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+9$이고, $f'(\alpha)+9=0$이므로
$\alpha-\beta=\frac{9}{2}\cdots$ ㉠을 얻는다. 이후 ㉠을 이용하면

$$f(x)\{f'(x)+9\}=8(x-\alpha)^2\left(x-\left(\alpha-\frac{9}{2}\right)\right)$$

이므로 함수 $f(x)\{f'(x)+9\}$는 극솟값 0을 가짐을 알 수 있다.

이후 정리하면 $f(x)=-2(x-\alpha)(x-\beta)$이고 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$이므로 ㉠을 통해 계산하면

$M=\frac{81}{8}$을 얻는다.

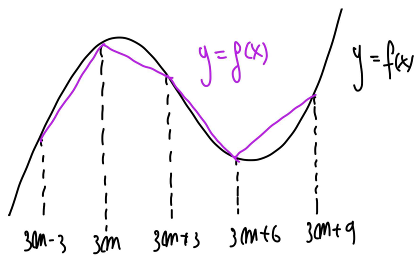
$\therefore\ 16M=162$

[참고] x축 방향으로 함수 $f(x)\{f'(x)+9\}$를 평행이동시켜도 극댓값, 극솟값은 변하지 않는다. 따라서 대충 $f(0)=0$으로 잡고 문제를 풀어도 상관없다.

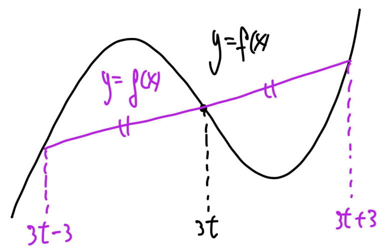
답 : 162

50. [2018년 진문 1회(나형) 30번]

(가), (나)에 의해 함수 $y=g(x)$의 그래프는 대략 아래와 같음을 이해할 수 있다. (m은 어떤 정수)

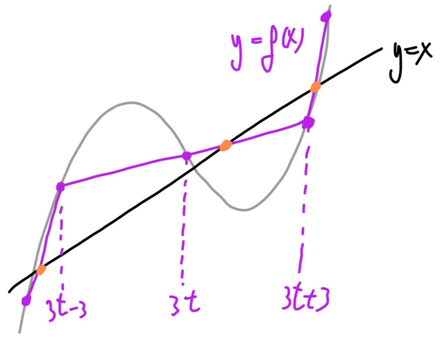


이때 (다)를 만족시키기 위해선 구간 $(3t-3, 3t+3)$에서 $y=g(x)$의 그래프는 하나의 직선으로 연결되어야 하고, 그렇려면 $f(x)$는 $(3t, f(3t))$에 대해서 대칭이 되어야 한다.



(추가로 $f(x)$는 $(3t, f(3t))$에 대해 대칭이므로 함수 $g(x)$ 또한 $(3t, g(3t))$에 대해 대칭임을 알 수 있다.)

한편 $g(x)$는 연속함수이고, 어떤 큰 양수 M에 대해 구간 (M, ∞)에서 증가하므로 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다. ($\because g^{-1}(x)$ 존재)
그러므로 $y=g(x)$와 $y=g^{-1}(x)$의 교점은 $y=g(x)$와 $y=x$의 교점으로 생각할 수 있다.
그리고 $g(x)$의 대칭성을 생각하면 다음과 같은 상황에서 $y=g(x)$와 $y=x$의 교점의 개수가 3임을 알 수 있다.



즉 $0 < \dfrac{f(3t+3)-f(3t-3)}{6} < 1$을 만족해야 한다.

위 부등식을 이용하기 위해 편의상 $f(x)$를 적당히 평행이동한 $f_1(x) = x(x+a)(x-a)$를 생각하자.
($(3t, f(3t))$를 원점으로 오게 평행이동 시킨 것이다.)
이때 $0 < \dfrac{f_1(3)-f_1(-3)}{6} < 1$을 생각하면
$0 < f_1(3) < 3$이고 곧 $8 < a^2 < 9$를 얻는다.

이후 $m = -a^2$이므로 $-9 < m < -8$이고, $\alpha^2 + \beta^2 = 145$를 얻는다.

답 : 145

51. [2018년 한달음 0회(나형) 20번]

$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $f(1) < 0$이므로 함수 $g(x)$는 $g'(1) < 0$, $g(0) = 0$인 다항함수임을 알 수 있다.
이 정보들을 이용하여 주어진 선지들을 판단하자.
(그래프를 대략적으로 그려보면 직관적으로 이해하기 좋을 것이다.)

ㄱ. 참
함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g(0) = g(1) = 0$이므로 평균값정리에 의해 $\dfrac{g(1)-g(0)}{1} = g'(a) = 0$인 실수 a가 열린구간 $(0,1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄴ. 참
함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 평균값정리에 의해 $g'(b) = \dfrac{g(1)-g(0)}{1} > 0$인 실수 b가 열린구간 $(0,1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. 참
ㄴ의 결과를 생각하면 $g'(b) > 0$인 실수 b가 열린구간 $(0,1)$에 적어도 하나 존재함을 알 수 있다.
이때 $g'(1) < 0$이고, 함수 $g'(x)$는 연속함수이므로 사잇값정리에 의해 구간 $(0,1)$에서 $g'(c) = 0$인 실수 c가 적어도 하나 존재한다.

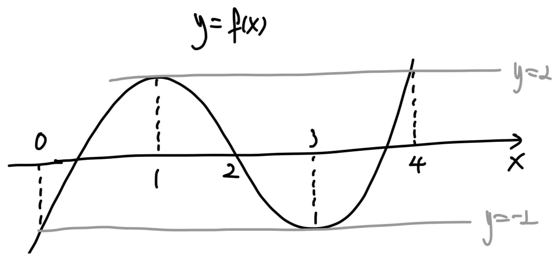
답 : ⑤

52. [2018년 한달음 0회(나형) 30번]

먼저 주어진 조건박스에 의해 방정식

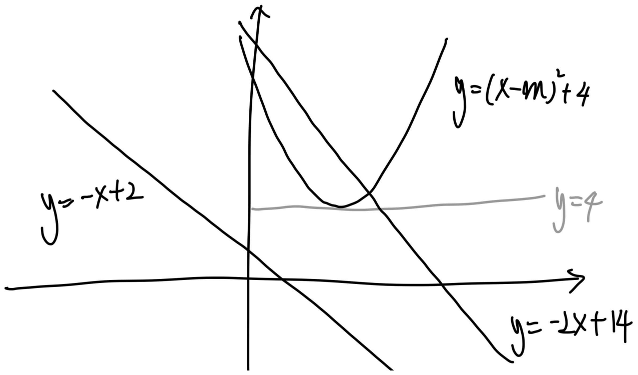
$$f(k) = 0, \quad f'(k) = k^3 - 3k^2 - 3k + 7$$

을 동시에 만족시키는 서로 다른 실수 k_1, k_2, k_3가 존재해야 한다. 이때 위 두 식에서 $k = k_1, k_2, k_3$에 대해 $f(k) + f'(k) = k^3 - 3k^2 - 3k + 7$을 얻을 수 있고,
함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f(x) + f'(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 7$임을 알 수 있다.
따라서 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$로 두고 계수를 비교하면 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 7$임을 알 수 있다. 이때 식을 잘 관찰하면 $f(x) = x(x-3)^2 - 2$이고, 비율관계를 통해 아래와 같이 $y = f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.



한편 $y=-x+2$, $y=(x-m)^2+4$, $y=-2x+14$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

(방정식 $(x-m)^2+4=-x+2$의 근 여부는 $x^2+4=-x-m+2$의 근 여부와 같고, 판별식을 조사해보면 근이 없음을 알 수 있다.)



따라서 $g(x)$는 $x=a$에서 불연속임은 확실하다.
이때 $(x-m)^2+4 \ge 4$이므로 함수 $(f \circ g)(x)$가 $x=a$에서 연속이 되려면 $a=m$이고, $-a+2=1$이 되어야 한다. ($y=f(x)$의 그래프를 참고하자.)
따라서 $a=m=1$을 얻는다.

이후 $4=g(a)<g(b)$이므로 $x=b$에서 함수 $(f \circ g)(x)$가 $x=b$에서 연속이 되려면 $g(x)$가 $x=b$에서 연속이 되어야 한다. 따라서 $(b-1)^2+4=-2b+14$를 만족해야 하고, 곧 $b=3$을 얻는다.
따라서 $m+a+b=1+1+3=5$이다.

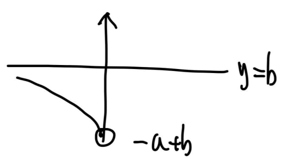
답 : 5

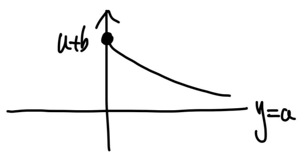
53. [2018년 한달음 1회(나형) 21번]

$x<0$에서 $y=\dfrac{a}{x-1}+b$

$x \ge 0$에서 $y=\dfrac{b}{x+1}+a$

의 그래프를 그리면 다음과 같다.

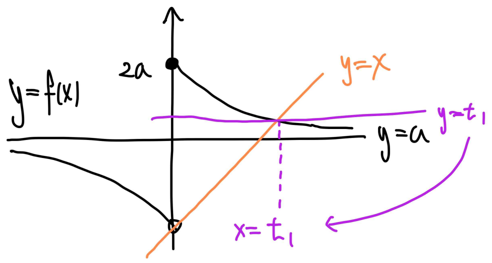




한편 방정식 $f(x)=(f \circ f)(x)$에서 $f(x)=t$로 두면 $t=f(t)$이므로 $f(t)=t$를 만족시키는 t에 대해 $f(x)=t$를 만족시키는 x가 구하는 실근과 같다. ⋯ ㉠

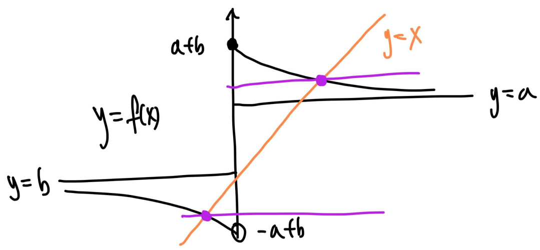
경우를 나누며 $y=f(x)$의 그래프를 관찰하고, 방정식 $f(x)=(f \circ f)(x)$의 실근을 관찰하자.

• $a=b$일 때



$y=f(x)$의 그래프는 위와 같다. ㉠의 과정을 따라해보자. $y=f(x)$의 그래프와 $y=x$와의 교점은 (t_1, t_1)으로 하나가 존재한다. 이후 $y=f(x)$와 $y=t_1$의 교점은 1개 존재하므로 방정식 $f(x)=(f \circ f)(x)$의 실근의 개수는 1이다.
(다음 경우부터는 ㉠의 과정에 대한 설명은 생략할 것이다.)

• $a>b$일 때

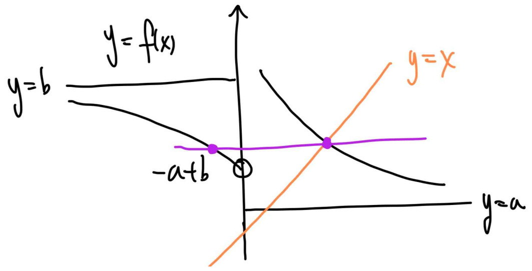


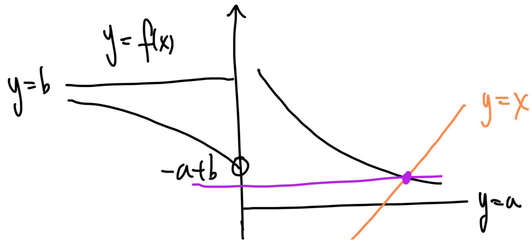
위 그림을 참고하면 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 즉 지금 경우는 조건을 만족시키는 경우이고, 이때 순서쌍의 개수는 45임을 알 수 있다.

$a<b$일 때는 $-a+b \ge a$일 때와 $-a+b<a$일 때로 다시 상황이 달라짐을 알 수 있다.

• $a<b$이면서 $-a+b \ge a$일 때

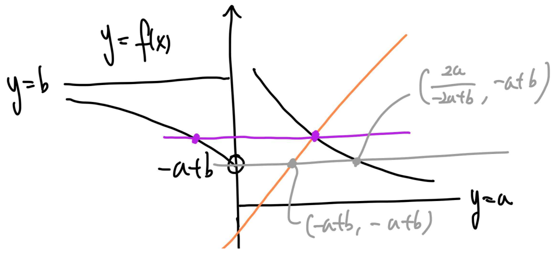
다음 페이지의 그림과 같이 두 경우가 존재한다.





방정식 $\dfrac{b}{x+1}+a=-a+b$를 풀면 $x=\dfrac{2a}{-2a+b}$이다.

따라서 $y=f(x)$는 $\left(\dfrac{2a}{-2a+b},-a+b\right)$를 지나고, 주어진 상황$(-a+b\geq a)$에서 $\dfrac{2a}{-2a+b}>-a+b$를 만족할 때만 서로 다른 실근의 개수가 2가 된다. 아래 그림을 참고하자.



따라서 $-a+b\geq a$, $\dfrac{2a}{-2a+b}>-a+b$를 만족시키는 순서쌍 (a,b)의 개수를 구하자. $\dfrac{2a}{-2a+b}>-a+b$를 정리하긴 조금 귀찮으니 그냥 대입해보자.

먼저 $-a+b\geq a$에 의해

$a=1$이면 $b=2,3,\cdots,10$

$a=2$이면 $b=4,5,\cdots,10$

$a=3$이면 $b=6,7,\cdots,10$

$a=4$이면 $b=8,9,10$

$a=5$이면 $b=10$

이고, $\dfrac{2a}{-2a+b}>-a+b$에서

$a=1$이면 $b^2-3b<0 \rightarrow b=2$

$a=2$이면 $b^2-6b+4<0 \rightarrow b=4,5$

$a=3$이면 $b^2-9b+12<0 \rightarrow b=6,7$

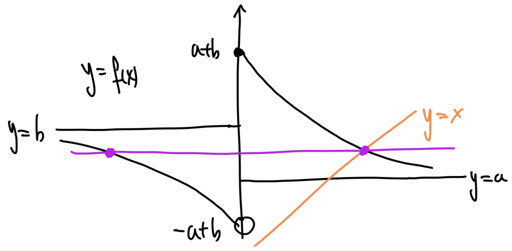
$a=4$이면 $b^2-12b+24<0 \rightarrow b=8,9$

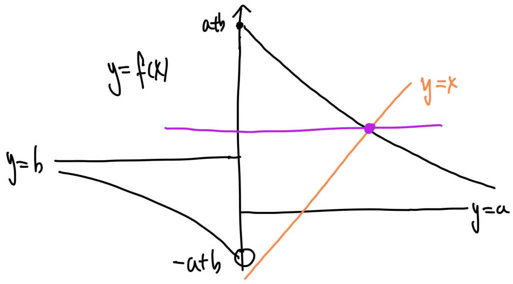
$a=5$이면 $b^2-15b+40<0 \rightarrow b=10$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수는 8이다.

• $a<b$이면서 $-a+b<a$일 때

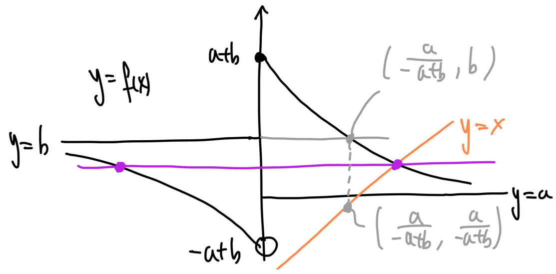
다음과 같이 두 경우가 존재한다.





방정식 $\dfrac{b}{x+1}+a=b$를 풀면 $x=\dfrac{a}{-a+b}$이다.

따라서 $y=f(x)$는 $\left(\dfrac{a}{-a+b},b\right)$를 지나고, 주어진 상황 $(a<b<2a)$에서 $\dfrac{a}{-a+b}<b$를 만족할 때만 서로 다른 실근의 개수가 2가 된다. 아래 그림을 참고하자.



따라서 $a<b<2a$, $\dfrac{a}{-a+b}<b$를 만족시키는 순서쌍 (a,b)의 개수를 구하자. 지금은 이전과 달리 대입하기엔 좀 불편하니 식을 적당히 조작해보면

$$\frac{a}{-a+b}<b \iff 0<b^2-ab-a$$

$$\iff b<\frac{a-\sqrt{a^2+4a}}{2} \quad 또는 \quad b>\frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{2}$$

이때 $\dfrac{a-\sqrt{a^2+4a}}{2}<\dfrac{a-\sqrt{a^2}}{2}=0$이므로

$b > \dfrac{a+\sqrt{a^2+4a}}{2}$ 를 만족하는지만 고려하면 된다.

이때

$$a = \frac{a+\sqrt{a^2}}{2} < \frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{2} < \frac{a+\sqrt{(a+2)^2}}{2} = a+1$$

이고 a, b는 10 이하의 자연수이므로

$$b > \frac{a+\sqrt{a^2+4a}}{2} \iff b \ge a+1$$

이다. 마찬가지로 $a < b < 2a$를 만족시키는 a, b 또한 $a+1 \le b \le 2a-1$과 같음을 알 수 있다.

즉 $a+1 \le b \le 2a-1$이면 $b \ge a+1$를 만족시키므로

$a < b < 2a$일 때 $\dfrac{a}{-a+b} < b$를 만족시키는 것이고,

곧 $a < b < 2a$인 모든 10 이하의 자연수 a, b에 대해 방정식의 실근의 개수가 2가 된다. 따라서 구하는 순서쌍의 개수는 20 이다.

각 경우에 의해 구하는 순서쌍의 개수는 $45+8+20=73$ 이다.

답 : ②

〈여백의 미〉

54. [2018년 한달음 1회(나형) 30번]

함수 $g(t)$는 주어진 삼차함수 $f(x)$에 대해 함수 $|f(x)-f(t)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수이다. 따라서 다음과 같다.

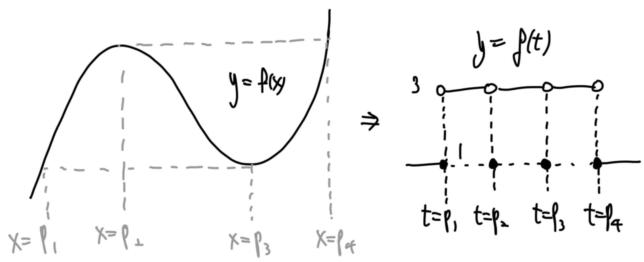
• $f'(x) > 0$일 때

$$g(t) = 1$$

• $f(x) = x^3$일 때

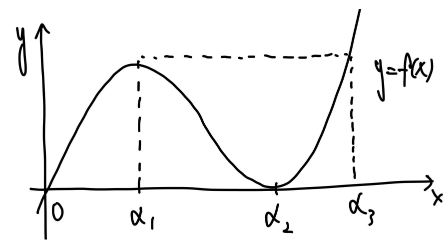
$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t \ne 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

• $f(x)$가 극대, 극소를 가질 때



이후 조건박스에서 m은 자연수이므로 $f(x)$는 극대, 극소를 가질 때만 조건을 만족시키고, $m=3$임을 알 수 있다. 그리고 $p_1=0$, $p_2=\alpha_1$, $p_3=\alpha_2$, $p_2=\alpha_3$이다.

다시 정리하면 다음과 같다.



$\lim\limits_{t\to\alpha_1} g(t) = 3$, $\lim\limits_{t\to\alpha_3+} g(t) = 1$이므로 조건박스에 있는 등식은 다음과 같고,

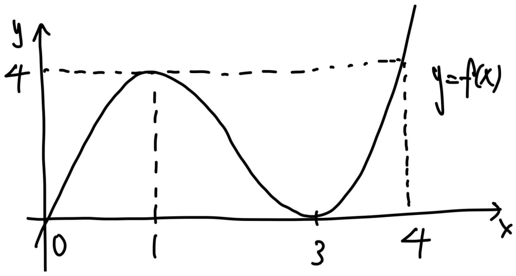
$$2\int_0^{\alpha_3} f(x)\,dx = -\alpha_3(f(3)-f(1))$$

정적분을 넓이로 생각하면 대칭성에 의해

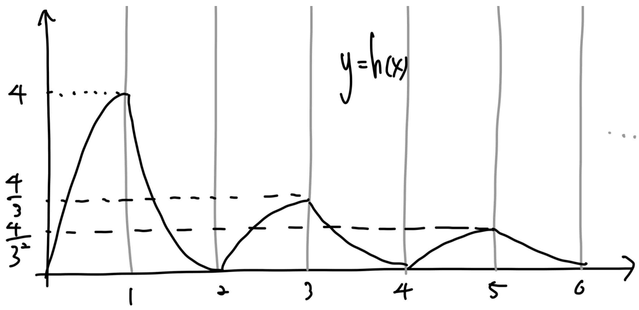
$\displaystyle\int_0^{\alpha_3} f(x)\,dx = \alpha_3 f(\alpha_3)$이고 다음과 같이 등식을 정리할 수 있다.

$$f(\alpha_3) = f(1) - f(3)$$

이후 비율관계에 의해 $f(x)=x\left(x-\frac{3}{4}\alpha_3\right)^2$ 로 놓을 수 있고, 계산을 통해 $\alpha_3=4$를 얻는다. (계산생략)



한편 주어진 함수 $h(x)$의 관계식을 살펴보면 구간 $[0,1]$에서의 $y=f(x)$를 평행이동, 대칭이동, 축소를 시킨 것임을 알 수 있다. 그러므로 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같이 그릴 수 있다.



이때 평행이동, 대칭이동을 생각하면 $\int_0^2 h(x)\,dx=4$ 이고, 나머지 구간들은 어차피 구간 $[0,2]$에서의 $y=h(x)$를 $\frac{1}{3}$배 하며 반복하여 나타나고 있으니

$$a_n=\int_0^2 h(x)dx+\int_2^4 h(x)dx+\cdots+\int_{2n-2}^{2n} h(x)dx$$
$$=4+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{4}{3^{n-1}}$$
$$=4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=6\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

임을 알 수 있다.

이때까지 과정을 참고하면 $m=3$, $g(\alpha_1)=1$, $\lim_{n\to\infty}a_n=6$ 이므로 구하는 값은 $3+1+6=10$이다.

답 : 10

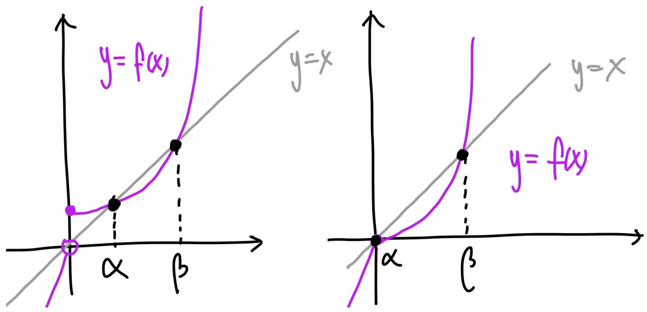
55. [2018년 한달음 FINAL(나형) 29번]

임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이므로 함수 $f(x)$는 일대일함수가 되어야 한다.

한편 방정식 $(f\circ f)(x)=0$의 실근의 개수는 $y=f(x)$의 그래프를 $y=x$에 대해 대칭이동한 그래프와 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다. 그러므로 조건에 의해 교점의 개수는 2개가 되어야 한다. … ㉠

• $a>0$

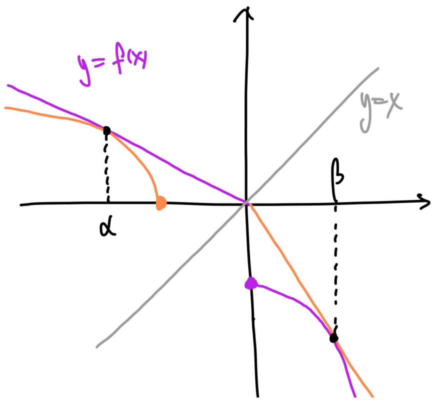
지금은 $f(x)$가 증가함수이므로 $y=x$와 $y=f(x)$의 그래프와의 교점의 개수가 2개가 되어야 한다.
따라서 다음과 같은 상황이고, (a의 값은 중요하지 않다. 양수이고 $a\neq 1$이기만 하면 된다.)



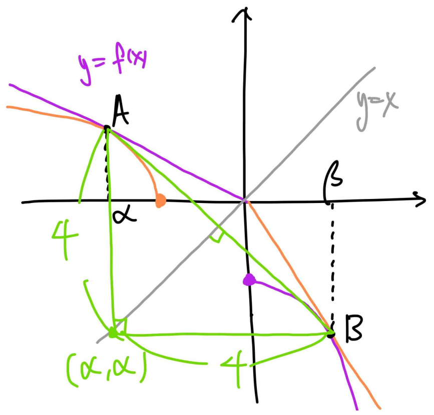
이때는 $\alpha+\beta>0$이므로 조건을 만족시킬 수 없다.

• $a<0$

$f(x)$는 감소함수이고, ㉠에 의해 아래와 같이 제2,4사분면에서 대칭이동시킨 그래프와 $y=f(x)$의 그래프가 접해야 한다.



이때 대칭성과 (나)에 의한 $\beta-\alpha=4$를 생각하면 다음과 같은 상황임을 알 수 있다.



따라서 $\beta-\alpha=4$이고 (가)에 의해 $\alpha+\beta=-3$이므로 $\alpha=-\frac{7}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$을 얻는다. 그러므로

$$\mathrm{A}\left(-\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right)$$

이다. 이후 점 A는 $y=ax$ 위의 점이므로 $a=-\frac{1}{7}$이고, 주황색 직선인 $y=-7x$는 $y=bx^2+c$와 점 B에서 접하므로 다음과 같다.

$$bx^2+7x+c=b\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

따라서 계수를 비교하면 $b=-7$, $c=-\frac{7}{4}$이다.

$\therefore 14a-3b-4c=-2+21+7=26$

답 : 26

56. [2018년 한달음 FINAL(나형) 30번]

[참고] 조건 하나가 부족하다. $f(0)=0$을 추가하여 풀자. (굳이 $f(0)=0$일 필요는 없다만 어떠한 조건이 추가되어야 답을 낼 수 있다.)

$0\le x<2$일 때 $g(x)=f(x)$

$2n\le x<2n+2$일 때 $g(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n f(x-2n)$

이고, 함수 $g(x)$는 정의된 $[0,\infty)$에서 연속함수이므로 $f(0)=f(2)=0$을 얻을 수 있다. 이후엔 (가)에 $f'(1)=0$을 알 수 있다.

한편 (나)의 등식을 아래와 같이 조작할 수 있고

$$\int_{2k-2}^{2k} g(x)\,dx=4\times\int_{2k-1}^{2k+1} g(x)\,dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_0^2\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} f(x)\,dx$$
$$=4\times\left(\int_1^2\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} f(x)\,dx+\int_0^1\left(-\frac{1}{2}\right)^{k} f(x)\,dx\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx$$

지금까지 상황을 정리하면 대략 아래와 같다.

이제 $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2k-2}^{2k} g(x)\,dx=\frac{8}{3}$을 이용해보자.

편의상 $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_1^2 f(x)\,dx=S$로 두면

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{2k-2}^{2k} g(x)\,dx=2S-S+\frac{S}{2}+\cdots+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}S$$

이므로 계산하면 $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2k-2}^{2k} g(x)\,dx=\frac{4}{3}S$이고, 곧 $S=2$이다.

이후 마무리 계산을 하면 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{13}\int_{2k-2}^{2k}|g(x)|\,dx=2S+S+\frac{S}{2}+\cdots+\frac{S}{2^{11}}$$
$$=S\times\frac{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\right)}{1-\frac{1}{2}}=8\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\right)$$
$$=8-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$\therefore p+q=18$

답 : 18