제 2 교시

수학 영역

문해설 : 고대수교 25 김솔민 (feat. 25 홍근영)

5지선다형

1. $8^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4 ✓

$8^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{2} = (2^3)^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}$

$= 2^2 = 4$

2. 함수 $f(x) = x^4 - 3x + 2$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ✓ ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$

$f'(x) = 4x^3 - 3$

$f'(1) = 4 - 3$

$= 1$

3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(3a_k - k) = 15$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k$ 의 값은? [3점]

① 10 ✓ ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

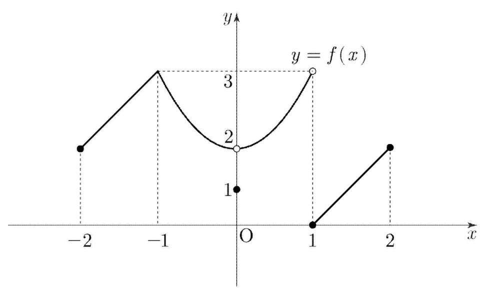
• $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{5}(3a_k - k) = 3\sum_{k=1}^{5} a_k - \frac{5 \cdot 6}{2}$

$= 15$

$\therefore \sum_{k=1}^{5} a_k = 10$

4. 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ✓ ④ 7 ⑤ 9

$\lim_{x \to 0} f(x) = 2$ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$

$\therefore 2 + 3 = 5$

5. 함수 $f(x)=(x+3)(x^2-4x-3)$에 대하여 $f'(3)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$f'(x) = (x+3)(2x-4) + (x^2-4x-3)$

$f'(3) = 6 \cdot 2 + (-6)$

$= 6$

6. 1보다 큰 두 실수 a, b가

$$2\log_3 a = \log_a 3 = b$$

를 만족시킬 때, $a^{\sqrt{2}} \times b^2$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$2\log_3 a = \log_a 3$

$\rightarrow 2\log_3 a = \dfrac{1}{\log_3 a}$ $\left(\because \log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}\right)$

$\rightarrow (\log_3 a)^2 = \dfrac{1}{2}$

$\rightarrow \log_3 a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$a = 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ (a는 1이상)

$2\log_3 a = b$ $\therefore b = \sqrt{2}$

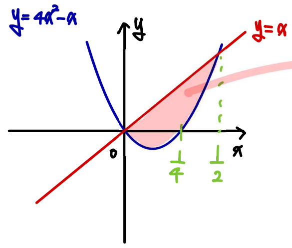
$a^{\sqrt{2}} \times b^2 = 3 \times 2$

$= 6$

$\therefore 6$

7. 곡선 $y=4x^2-x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$



$\int_0^{\frac{1}{2}} \{x-(4x^2-x)\}dx$

$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-4x^2)dx$

$= \left[x^2 - \frac{4}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{12}$ $\therefore \frac{1}{12}$

8. $2\sin\theta + 3\cos(\theta - \pi) = 0$이고 $\sin(\theta + \pi) > 0$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{13}}{13}$ ② $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$ ③ $-\frac{\sqrt{13}}{13}$ ④ $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

$2\sin\theta + 3\cos(\theta - \pi) = 2\sin\theta - 3\cos\theta = 0$

$2\sin\theta = 3\cos\theta$ & $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\frac{13}{4}\cos^2\theta = 1$ $\cos\theta = \pm\frac{2\sqrt{13}}{13}$

$2\sin\theta = 3\cos\theta$ 이고, $-\sin\theta > 0$ 이므로 $\cos\theta < 0$

$\therefore \cos\theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선이 $y = 2x + 5$이고, $f(3) = 11$일 때, $f(6)$의 값은? [4점]

① 84 ② 88 ③ 92 ④ 96 ⑤ 100

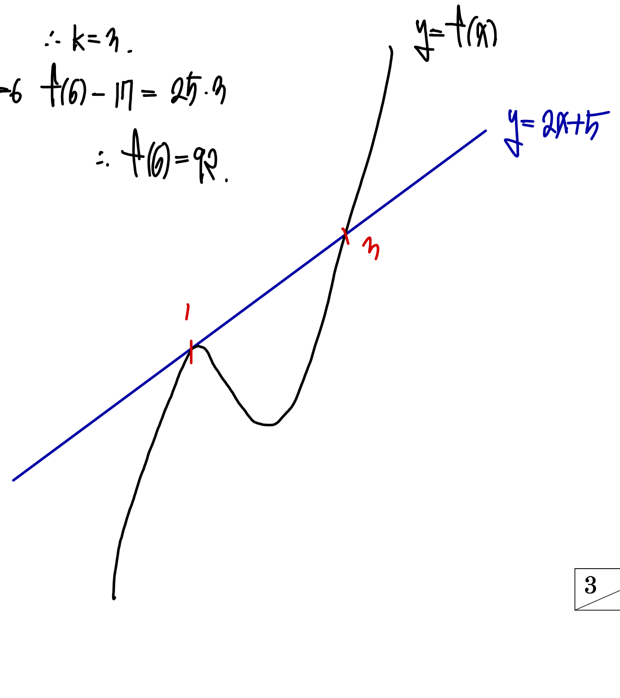
$f(x) - (2x+5) = (x-1)^2(x-k)$

$x=3$ $f(3) - 11 = 4(3-k)$

$\therefore k = 3.$

$x=6$ $f(6) - 17 = 25 \cdot 3$

$\therefore f(6) = 92.$



10. $a_2 = 2$인 등비수열 $\{a_n\}$이 자연수 k에 대하여

↳ $ar = 2$

$$\sum_{n=1}^{2k} a_n = 63, \quad \sum_{n=1}^{k} (a_n)^2 = 21$$

일 때, a_k의 값은? [4점]

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

$\{a_n\} = a \cdot r^{n-1}$, $\{(a_n)^2\} = a^2 \cdot (r^2)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{2k} a_n = \frac{a \cdot ((r)^{2k} - 1)}{r - 1}$

$\sum_{n=1}^{k} (a_n)^2 = \frac{a^2((r^2)^k - 1)}{r^2 - 1}$

$r^{2k} - 1$ 이라는 구조가 눈에 들어옴.

나누기: $\frac{a}{r+1} = \frac{1}{3}$, $ar = 2$

$\therefore r^2 + r - 6 = 0$ $r = 2$ or -3.

i) $r = 2$, $ar = 2$ $\therefore a = 1$

$\{a_n\} = 2^{n-1}$ $\sum_{k=1}^{2k} a_n = 63$

$\sum_{k=1}^{2k} a_n = \frac{1 \cdot (2^{2k} - 1)}{2 - 1} = 63$

$2^{2k} = 64$ $k = 3.$

ii) $r = -3$ $ar = 2$ $a = -\frac{2}{3}$

$\sum_{k=1}^{2k} a_n = \frac{-\frac{2}{3}((-3)^{2k} - 1)}{-3 - 1} = 63$

→ 만족시키는 자연수 k 존재 X.

$\therefore \{a_n\} = 2^{n-1}$, $k = 3$

$a_k = 2^2 = 4$ $\therefore 4$

11. 시각 $t=0$일 때 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 실수 k에 대하여 시각이 $t\,(t \ge 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = t^2 - 2kt - k^2 - 4$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=1$이면, 시각 $t=2$일 때 점 P의 가속도는 2이다.

ㄴ. $k=0$이면, 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는 $\frac{23}{3}$이다.

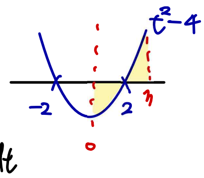
ㄷ. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번 바뀌는 k의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $k=1$ $v(t) = t^2 - 2t - 5$

가속도 $a(t) = 2t - 2$ $a(2) = 2$. (o)

ㄴ. $k=0$ $v(t) = t^2 - 4$



움직인거리 : 속도의 절댓값 적분.

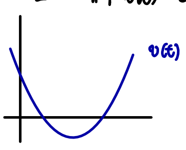
$$\int_0^3 |v(t)|dt = \int_0^2 -v(t)dt + \int_2^3 v(t)dt$$

$$= -\frac{1}{3}t^3 + 4t\Big|_0^2 + \frac{1}{3}t^3 - 4t\Big|_2^3$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3} \quad (o)$$

ㄷ. 출발후 운동방향 2번 바뀜

→ $t \ge 0$에서 $v(t)=0$인 t가 2개존재.



$v(t) = t^2 - 2kt - k^2 - 4$

$= (t-k)^2 - 2k^2 - 4$.

1) $v(0) > 0$ 2) $k > 0$ 3) $-k^2 - 4 < 0$

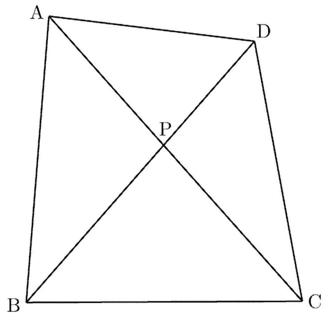
⟶ 고1수학 근의분리 응용!

1) $v(0) = -k^2 - 4 > 0$ ∴ 불가능 (X)

12. 그림과 같이 $\overline{AD}=6$인 사각형 ABCD가 있다. 선분 AC와 선분 BD가 점 P에서 만나고 점 P가 $\overline{PB}=\overline{PC}$를 만족시킬 때,

$$\cos(\angle APD) = \frac{1}{8}, \quad \sin(\angle DAP) : \sin(\angle ADP) = 4 : 5$$

이다. (삼각형 ABC의 넓이)−(삼각형 BCD의 넓이)$=3$일 때, 삼각형 PBC의 넓이는? [4점]



① $\frac{36\sqrt{7}}{7}$ ② $\frac{39\sqrt{7}}{7}$ ③ $6\sqrt{7}$ ④ $\frac{45\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{48\sqrt{7}}{7}$

△ABC − △BDC에서, △ABC와 △BDC는 공통부분이 존재 (△PBC)

⟶ ★ △ABC − △BDC = △ABP − △DPC

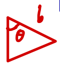
∠APD = ∠BPC = α, ∠APB = ∠DPC = β라 하면 $\alpha + \beta = \pi$

삼각형에서 마주보는 각의 sin 비율은 길이비와 똑같으므로,

$\overline{AP} = 5k$, $\overline{DP} = 4k$.

△APD에서 cos법칙 : $6^2 = (4k)^2 + (5k)^2 - 2\cdot 4k \cdot 5k \cdot \frac{1}{8}$ $(\because \cos\alpha = \frac{1}{8})$

$36 = 36k^2$ ∴ $k=1$, $\overline{AP}=5$, $\overline{DP}=4$.

△ABP − △DPC = 3. * 삼각형 넓이 a  → $\frac{1}{2}ab\sin\theta$.

$\overline{PB} = \overline{PC} = a$라하면, $\triangle ABP = \frac{1}{2}\cdot 5 \cdot a \cdot \sin\beta$.

$\triangle DPC = \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot a \cdot \sin\beta$.

$\triangle ABP - \triangle DPC = \frac{1}{2}\cdot a \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\cdot a \cdot \sin(\pi - \alpha)$

$= \frac{1}{2}a\sin\alpha = \frac{1}{2}a \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = 3$

∴ $a = \frac{16\sqrt{7}}{7}$

$\triangle PBC = \frac{1}{2}\cdot a^2 \cdot \sin\alpha$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{256}{7}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}$

$= \frac{48\sqrt{7}}{7}$ ∴ $\frac{48\sqrt{7}}{7}$

13. $f(0)=-6$인 이차함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le a) \\ 3x^2-8x+2 & (x > a) \end{cases}$$

이다. 모든 실수 k에 대하여 $\lim_{x \to k} \frac{x^2-k^2}{g(x)-g(k)}$가 0이 아닌 값으로 수렴할 때, $f(a^2)$의 값은? [4점] $x^2-k^2 \to 0$ 이므로 $g(x) \to g(k)$ ⋯ $g(x)$는 연속.

① -20 ② -10 ③ 10 ④ 20 ⑤ 30

극한식 해석. 만약 $g(x)$가 k에서 미분가능하고 $g'(k) \ne 0$이면,

$$\lim_{x \to k} \frac{x-k}{g(x)-g(k)} \cdot (x+k) = \frac{2k}{g'(k)}$$

!!

이 극한식이 $\boxed{0\text{이 아닌}}$ 값으로 수렴하므로, $k=0$ 일 때를 관찰

i) $x=0$ 에서 $g(x)=3x^2-8x+2$

$$\frac{2 \cdot 0}{g'(0)} = 0 \quad \cdots \text{모순 } (\times)$$

ii) $x=0$ 에서 $g(x)=f(x)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{f(x)-f(0)} \cdot 2 \cdot 0 \ne 0 \quad \to f(x)=px^2-6.$$

즉, $f'(0)=0$

!!

또한, 이 극한식이 0이 아닌값으로 $\boxed{\text{수렴}}$하므로, $x=a$ 에서 극한값이 존재

1) 연속성 $f(a)=3a^2-8a+2$ $\quad pa^2-6=3a^2-8a+2$

2) 수렴성 $x \to a-$ $\lim_{x \to a^-} \frac{x-a}{f(x)-f(a)} \cdot (x+a) = \frac{2a}{f'(a)}$

$x \to a+$ $\lim_{x \to a^+} \frac{x-a}{3x^2-8x+2-(3a^2-8a+2)} \cdot (x+a) = \frac{2a}{6a-8}$

$$\frac{2a}{f'(a)} = \frac{2a}{6a-8}, \quad 2pa = 6a-8$$

$$\begin{cases} pa^2-6=3a^2-8a+2 \\ pa=3a-4 \end{cases} \quad \therefore a=2,\ p=1$$

$\therefore f(x)=x^2-6 \quad f(4)=10$

$\therefore 10$

14. 두 양수 a, b에 대하여 $0 \le x \le 2\pi$에서 부등식

$$a\cos x \le b\sin x \le -2b\cos^2 x - 2\sin x + 2b + 1$$

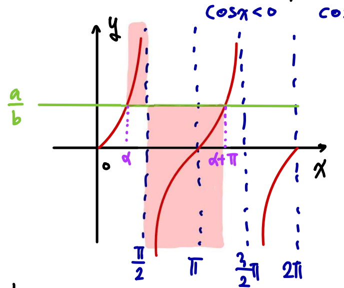
을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 범위는 $\frac{\pi}{3} \le x \le k$이다. $a \times b \times \tan k$의 값은? [4점] (단, k는 상수이다.)

① $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② 4 ③ $4\sqrt{3}$ ④ 12 ⑤ $12\sqrt{3}$

$$\begin{cases} a\cos x \le b\sin x & \cdots (A) \\ b\sin x \le -2b\cos^2 x - 2\sin x + 2b + 1 & \cdots (B) \end{cases}$$

(A) $\cos x$의 부호에 따라, $\frac{a}{b} \ge \tan x$ / $\frac{a}{b} \le \tan x$ / $b\sin x \ge 0$

$\cos x<0$ $\quad \cos x>0$ $\quad \cos x=0$



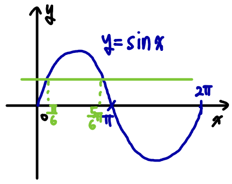
→ $\tan\alpha = \frac{a}{b}$인 어떤 α에 대하여 $\alpha \le x \le \alpha+\pi$ 이다.

(B) $b\sin x \le -2b\cos^2 x - 2\sin x + 2b + 1$

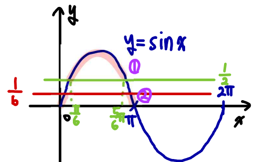
$b\sin x \le -2b + 2b\sin^2 x - 2\sin x + 2b + 1$

$2b\sin^2 x - (b+2)\sin x + 1 \ge 0$

$(2\sin x - 1)(b\sin x - 1) \ge 0$

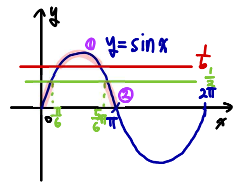


i) $b>2$이면, A와 같이 본다면 실수 x값의 범위가 $x<\pi$ 에서 부등식 두개로 쪼개짐



→ 조건에 맞지 않음.

ii) $b<2$도 마찬가지이다.



$\therefore$ 즉, $b=2$.

답 구하기) 범위가 $\frac{\pi}{3} \le x \le k$ 이므로, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\frac{a}{b} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} = \frac{a}{2}$

$\therefore a=2\sqrt{3}$, $b=2$, $\tan k = \sqrt{3}$

$2\sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{3} = 12$

$\therefore 12$

15. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ (f(x))^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값은? [4점]

(가) 집합 $\{g(x) \mid g'(x)=0\}$의 모든 원소의 합은 1이다.
(나) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① 16 ② 21 ③ 26 ④ 31 ⑤ 36

구간별 함수의 미분가능 → 1) 연속 2) 미분

연속성 $x=0$ $f(0)=\{f(0)\}^2$ ∴ $f(0)=0$ or -1

미분가능성 $x=0$ $f'(0)=2f(0)f'(0)$ ∴ $\cancel{f(0)=\frac{1}{2}}$ or $f'(0)=0$

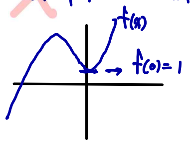
연속성에의해 X

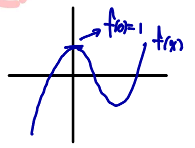
나) $g(x)=0$ → $\begin{cases} f(x)=0 \\ \{f(x)\}^2=0 \end{cases}$ ∴ $f(x)=0$ 즉, $f(x)$의 실근이 3개

i) If $f(0)=0$, $f(x)=\frac{1}{2}x^3+px^2$ → 많아야 실근 2개.

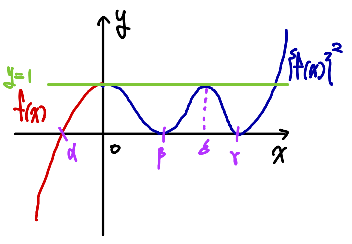
즉, $f(0)=1$, $f(x)=\frac{1}{2}x^3+px^2+1$. → $f'(0)=0$을 기준으로 케이스 분류.

i) f가 $x=0$ 에서 극소 ii) f가 $x=0$ 에서 극대.





⇒ 근을 3개 가질수 X



g(x)가 다음과 같은 모양.

→ $g'(0)=g'(\beta)=g'(\gamma)=g'(\delta)=0$

$g(0)=1$, $g(\beta)=g(\gamma)=0$ 이므로

$x=\delta$을 제외하면 $\{g(x) \mid g'(x)=0\}$의 원소의 합이 1이다.

그러므로, $g(\delta)=\cancel{0}$ or 1.

f가 세 실근을 가질수 X.

계산) $g(\delta)=\{f(\delta)\}^2=1$

$f(x)=\frac{1}{2}x^3+px^2+1$, $f'(x)=\frac{3}{2}x^2+2px=\frac{3}{2}x(x+\frac{4}{3}p)$

즉, $\delta=-\frac{4}{3}p$. $f(-\frac{4}{3}p)=-\frac{32}{27}p^3+\frac{16}{9}p^3+1=\frac{16}{27}p^3+1$

$\left(\frac{16}{27}p^3+1\right)^2=1$ $p\neq 0$ 이므로, $\frac{16}{27}p^3=-2$ $p^3=-\frac{27}{8}$ ∴ $p=-\frac{3}{2}$

∴ $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+1$, $f(5)=26$

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=50$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_n-n^2-2n$$

을 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

$n=1$ $a_2=a_1-3$ ∴ $a_2=47$

$n=2$ $a_3=a_2-8$ ∴ $a_3=39$

∴ 39

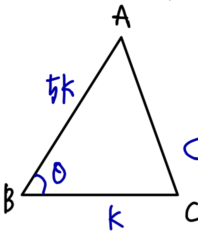
17. 함수 $f(x)=6x^2-2x+4$ 의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(1)=3$일 때, $F(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\int f(x)dx=2x^3-x^2+4x+C=F(x)$

$F(1)=5+C=3$, $C=-2$

∴ $F(x)=2x^3-x^2+4x-2$, $F(2)=18$

18. $\overline{\mathrm{AB}}=5\overline{\mathrm{BC}}$ 이고 $\cos(\angle\mathrm{ABC})=\frac{4}{5}$ 인 삼각형 ABC의 넓이가 24일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. [3점]



$\cos\theta=\frac{4}{5}$ → $\sin\theta=\frac{3}{5}$

넓이: $\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot 5k\cdot k\cdot\frac{3}{5}=24$

$k^2=16$, $k=4$ $\therefore \overline{AB}=5k=20$

$\therefore 20$

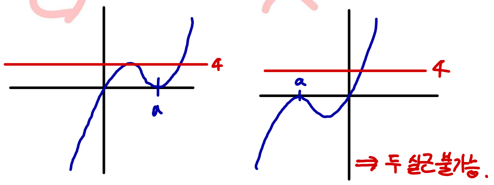
19. x에 대한 방정식

$$x^3-2ax^2+a^2x-4=0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 a의 값을 구하시오. [3점]

$x^3-2ax^2+a^2x-4=0$ $x(x-a)^2=4$

$a>0$ $\cancel{a<0}$



$f'(\frac{a}{3})=0$ 이므로, $f(\frac{a}{3})=4$.

$\frac{a}{3}\cdot(-\frac{2a}{3})^2=4$, $\frac{4a^3}{27}=4$

$\therefore a=3$

20. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>-1$인 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1\times a_5=1,\quad a_{n+1}=\frac{7a_n-1}{a_n+9}$$

를 만족시킨다. 다음은 $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)$의 값을 구하는 과정이다.

> 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\frac{7a_n-1}{a_n+9}$ 이므로
>
> 양변에 1을 더하면,
>
> $$a_{n+1}+1=\frac{8(a_n+1)}{a_n+9}$$
>
> 이다. 이때, $a_n>-1$이므로
>
> $a_n+1\neq 0$이고, 양변에 역수를 취하고 정리하면,
>
> $$\frac{1}{a_{n+1}+1}=\frac{1}{a_n+1}+\boxed{(가)}\quad\cdots\cdots ㉠$$
>
> 이므로 $\frac{1}{a_n+1}$은 공차가 $\boxed{(가)}$인 등차수열이다.
>
> $a_1\times a_5=1$이므로,
>
> $\frac{1}{a_1+1}=\boxed{(나)}$임을 알 수 있다. $\cdots\cdots$ ㉡
>
> ㉠, ㉡에 의하여
>
> $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $\frac{p+r}{q}$의 값을 구하시오. [4점]

· $a_{n+1}+1=\frac{8(a_n+1)}{a_n+9}$ $\xrightarrow{역수}$ $\frac{1}{a_{n+1}+1}=\frac{a_n+1+8}{8(a_n+1)}=\frac{1}{a_n+1}+\boxed{\frac{1}{8}}$ (가)

· $a_1\times a_5=1$ $\frac{1}{a_n+1}$ 을 b_n이라 하자.

$\{b_n\}=b_1+\frac{1}{8}(n-1)$. $b_5=b_1+\frac{1}{2}=\frac{1}{a_5+1}$

$a_1=\frac{1}{b_1}-1$ $a_5=\frac{1}{b_1+\frac{1}{2}}-1$

$a_1\times a_5=\frac{1-b_1}{b_1}\times\frac{\frac{1}{2}-b_1}{b_1+\frac{1}{2}}=1$, $2b_1^2-3b_1+1=2b_1^2+b_1$

$4b_1=1$ $\therefore b_1=\boxed{\frac{1}{4}}$ (나)

· $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)=\sum_{n=1}^{10}b_n=\left\{\frac{b_1+b_{10}}{2}\right\}10=\left\{\frac{\frac{1}{4}+\frac{11}{8}}{2}\right\}10=\boxed{\frac{65}{8}}$ (다)

· $\frac{p+r}{q}=\frac{\frac{1}{8}+\frac{65}{8}}{\frac{1}{4}}=33$ $\therefore 33$

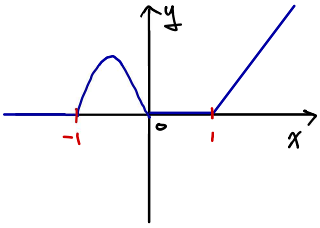
21. $f(1)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식

$$\int_x^{f(x)} \left(|t(t^2-1)| + t(t^2-1) \right) dt = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 3 이고, $f(2)=f(-1)+3$ 일 때, $f(-3)+f(2)$ 의 값을 구하시오. [4점]

$g(x) = x(x^2-1)$ 이라 하자.

$|g(x)| + g(x)$의 그래프는



$g(x)+|g(x)|$가 항상 양수이므로,

$\int_k^{f(k)} (g(t)+|g(t)|)dt = 0$ 이려면

$\begin{cases} f(k)=k \\ g(t)+|g(t)|=0 \end{cases}$ 을 만족해야 한다.

$\begin{cases} f(k)\le -1,\ f(k)=k & (k\le -1) \\ 0\le f(k)\le 1,\ f(k)=k & (0\le k\le 1) \end{cases}$

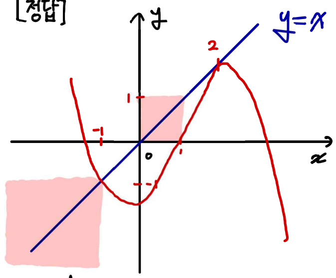
$f(k)=k$ $(-1<k<0,\ k>1)$ 인 k가 3개 이므로,

$\begin{cases} f(k)<-1 \ (k<-1) & \cdots (a) \\ 0<f(k)<1 \ (0<k<1) \text{ 인 k는 존재X} \end{cases}$ ·· 실수 k가 무한히 많아짐

만약 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이면 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

→ (a)에 해당 (모순)

[정답]



만약 $f(2)>2$ 라면, $k>1$ 에서 $f(k)=k$ 인 k가 2개 존재, $0\le k\le 1$, $0\le f(k)\le 1$인 k 때, $-1\le k<0$, $f(k)=k$인 k 때. 총 4개이므로 모순. 즉 $f(2)=2$, $f(-1)=-1$.

계산) $f(x)-x = p(x+1)(x-2)^2$

$x=1$ 대입 $f(1)-1=2p$ $\quad f(1)=2p+1=0$

$\therefore p=-\frac{1}{2}$. $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)^2+x$

$f(-3)+f(3)=23 \quad \therefore 23$

22. 양수 a 에 대하여 두 함수

$$f(x)=2^{x-a}-a+1, \quad g(x)=\log_2 x+1$$

가 있다. 실수 k 에 대하여 직선 $y=-x+k$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점을 A, 곡선 $y=g(x)$ 와 만나는 점을 B라 하고, 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k+1$ 이 곡선 $y=g(x)$ 와 만나는 점을 C라 하자.

세 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times k$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

> (가) 2×(직선 OB의 기울기) = 3×(직선 OC의 기울기)
> (나) 삼각형 ABC의 넓이는 15이다.

① $2^{x-a}-a+1 = -x+k$ ⇒ 점 A의 x좌표

② $\log_2 x+1 = -x+k$ ⇒ 점 B의 x좌표

③ $\log_2 x+1 = -\frac{1}{2}x+k+1$ ⇒ 점 C의 x좌표.

③ ⇒ $\log_2 x = -\frac{1}{2}x+k$ $\quad$ Let $\frac{1}{2}x = X$

⇒ $\log_2 2X = -X+k$

⇒ $\log_2 X+1 = -X+k$, ②와 동일

⇒ ②의 실근의 2배가 ③의 실근.

⇒ 2×(B의 x좌표) = (C의 x좌표)

B의 x좌표를 t 라 하면

$B(t, \log_2 t+1)$, $C(2t, \log_2 t+2)$

이므로 (가)에 의해

$2\times\frac{\log_2 t+1}{t} = 3\times\frac{\log_2 t+2}{2t}$

⇒ $2\log_2 t+2 = \frac{3}{2}\log_2 2t+3$

⇒ $\frac{\log_2 t}{2} = 1$

⇒ $t=4$.

따라서 B, C의 좌표는

$B(4,3)$, $C(8,4)$

이고 점 B가 $y=-x+k$ 위의 점 이므로

$\boxed{k=7}$

한편,

$\begin{cases} y=2^{x-a}-a+1,\ y=\log_2 x+1 \text{ 은 } y=x-a+1 \text{ 대칭} \\ y=-x+k \text{ 또한 } y=x-a+1 \text{ 대칭.} \end{cases}$

⇒ A, B는 $y=x-a+1$ 대칭

⇒ A의 좌표 $(2+a, 5-a)$

(나) 조건에 의해

$\frac{1}{2}\left|4\cdot4+8\cdot(5-a)+(2+a)\cdot3-(3\cdot8+4\cdot(2+a)+(5-a)\cdot4)\right|$ → 신발끈 공식.

⇒ $\frac{1}{2}|10-5a|=15$ ⇒ $\boxed{a=8}$ $(\because a\text{는 양수})$ $\quad \therefore a\times k=8\times7=56$.