제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $16^{\frac{1}{4}} \times 8^{-\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

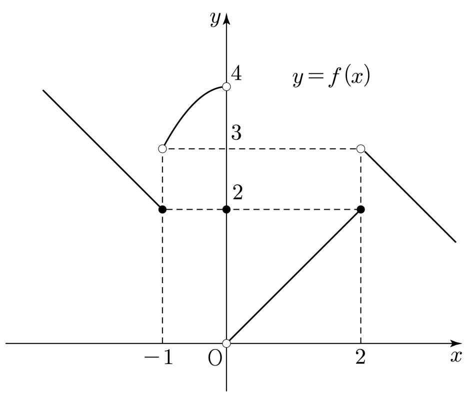
2. 함수 $f(x)=2x^2-x+1$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum\limits_{k=1}^{5}(2a_k+3)=33$일 때, $\sum\limits_{k=1}^{5}a_k$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$\left(\lim\limits_{x\to -1+} f(x)\right)\times f(2)$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

5. 함수 $f(x)=(x-1)(x^2-x+2)$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

6. 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여

$$(a+b)^{-1}=\log_3 10,\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2-\log 25$$

일 때, 2^{ab}의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{6}$ ⑤ 3

7. 함수 $f(x)=ax^2-6x$에 대하여

$$\int_0^3 f(x)dx-\int_a^3 f(x)dx=0$$

일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

8. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$이고 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \times \cos(\pi - \theta) = \frac{1}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-2\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ 0 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

9. 함수 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 4x + a$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$를 만족시키는 실수 a의 최솟값은? [4점]

① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

10. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_3(a_1 + a_3) = a_1(2a_1 + a_5) = 48$$

을 만족시킬 때, a_6의 값은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

11. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 실수 k에 대하여 시각 $t\,(t \geq 0)$일 때, 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^2+2t-k$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=1$이면, 시각 $t=2$일 때, 점 P의 위치는 $\frac{14}{3}$이다.

ㄴ. $k=2$이면, 출발한 후 점 P의 운동 방향이 한 번 바뀐다.

ㄷ. $k=3$이면, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 상수 $a\,(a>1)$에 대하여 두 곡선 $y=-\log_a x$, $y=\log_a(-x)$가 직선 $y=3x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자.
곡선 $y=-\log_a x$ 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여
$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$, $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}$이고 삼각형 ABQ의 넓이가
삼각형 ABP의 넓이의 2배일 때, $a\times\left(\overline{\mathrm{PQ}}\right)^2$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{9}\times2^{\frac{25}{6}}$ ② $\frac{5}{9}\times2^{\frac{13}{3}}$ ③ $\frac{5}{9}\times2^{\frac{9}{2}}$
④ $\frac{5}{9}\times2^{\frac{14}{3}}$ ⑤ $\frac{5}{9}\times2^{\frac{29}{6}}$

13. 함수 $f(x)=x^3-ax^2+bx+2$가 다음 조건을 만족시키는 5 이하의 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

> 열린구간 $(0, 1)$에서
> 함수 $f(x)$는 오직 하나의 극값을 갖는다.

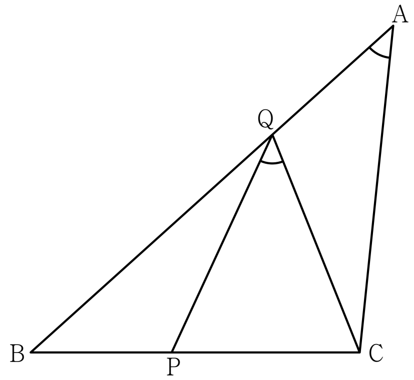
① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

14. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=7$, $\angle \mathrm{C} > \frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC를 $3:4$로 내분하는 점을 P라 하고, 선분 AB 위의 점 Q를 $\angle \mathrm{QAC} = \angle \mathrm{PQC}$이고

$$\overline{\mathrm{BQ}}=4\sqrt{3},\ \sin(\angle \mathrm{QAC}) : \sin(\angle \mathrm{QCA}) = 4 : \sqrt{6}$$

이 되도록 잡을 때, $\overline{\mathrm{AC}}^2$의 값은? [4점]

① $\frac{119}{2}$　② $\frac{121}{2}$　③ $\frac{123}{2}$　④ $\frac{125}{2}$　⑤ $\frac{127}{2}$



15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 두 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (|x|<1) \\ x & (|x|\ge 1)\end{cases}, \quad h(x)=\begin{cases} 2x+2 & (x\le a) \\ -x^2 & (x>a)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(a+4)$의 값은? [4점]

> 모든 실수 α에 대하여 $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{g(x)-h(x)}{x}$의 값이 존재하고 $\alpha\ne 0$일 때, 그 값은 $\dfrac{g(\alpha)-h(\alpha)}{\alpha}$이다.

① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=na_n+n^2$$

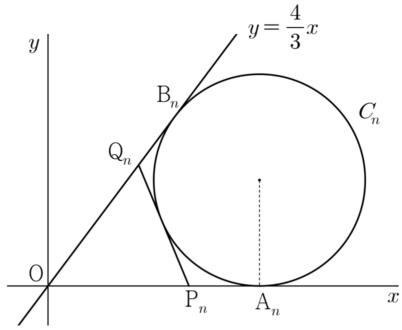
을 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)=3x^2+2x+1$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(0)+F(1)=9$일 때, $F(2)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $y=a\sin b\pi x$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 함수 $f(x)$의 최댓값은 5이고 주기가 $\frac{1}{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

19. 곡선 $y=x^3-5x+2$ 위의 점 $(1, a)$에서의 접선이 점 $(3, b)$를 지날 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. [3점]

20. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 중심의 y좌표가 a_n인 원 C_n이 있다. 원 C_n이 x축 및 직선 $y=\frac{4}{3}x$와 접하는 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하고 선분 OA_n 위의 점을 P_n, 선분 OB_n 위의 점을 Q_n 이라 할 때, 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$은 원 C_n에 접한다.



다음은 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 둘레의 길이를 l_n이라 하고 $l_4=8$일 때, $\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{a_n l_{n+1}}$ 의 값을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이고 A_n와 B_n의 x좌표는 모두 양수이다.)

> 원 C_n의 중심의 x좌표를 b_n이라 할 때, 점과 직선 사이의 거리 공식에 의해 $b_n=\boxed{(가)}\times a_n$이다.
>
> 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$가 원 C_n과 접하는 점을 R_n이라 할 때, 원의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}$, $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}$이므로 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{Q}_n}$이다.
>
> 또한 원의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{OA}_n}=\overline{\mathrm{OB}_n}$이고, $l_4=8$이므로 수열 $\{l_n\}$의 일반항은 $\boxed{(나)}$이다.
>
> 따라서 $\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{a_n l_{n+1}}=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $\frac{f(25)}{p\times q}$ 의 값을 구하시오. [4점]

21. 사차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)\times f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

> 모든 실수 x에 대하여
>
> $$\int_{-1}^{x}|g(t)-g(3)|\,dt=\begin{cases} f(x)+4 & (x\le 0) \\ -f(x) & (x>0) \end{cases}$$
>
> 이다.

22. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge 3x-23) \\ 3x-23 & (f(x)<3x-23) \end{cases}$$

가 있다. 함수 $g(x)$와 정의역이 자연수 전체의 집합이고 치역이 $\{2,3\}$인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $g(n)$의 $h(n)$제곱근 중에서 음의 실수가 존재한다.
>
> (나) $g(n)$의 $h(n)$제곱근 중에서 정수인 것의 개수가
>
> 1이 되도록 하는 자연수 n의 개수는 4이다.

$h(2)=2$, $f(5)<-8$일 때, $g(10)+\sum_{k=1}^{10}h(k)$의 값을 구하시오.

[4점]

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+10x)}{2x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \frac{2a_n + 1}{3} = 3$일 때,

$\lim_{n \to \infty} \frac{3a_n + 8n}{na_n(a_n - 3)}$ 의 값은? [3점]

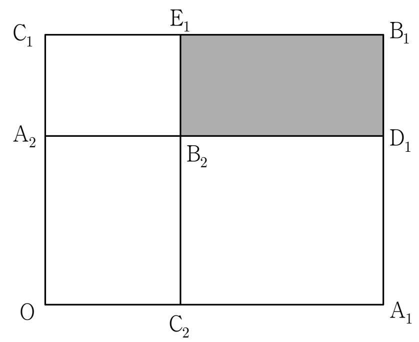
① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

25. x에 대한 방정식 $x(\ln x)^2 - x\ln x - x = t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은?
(단, $\lim_{x\to 0+} x(\ln x)^2 = 0$) [3점]

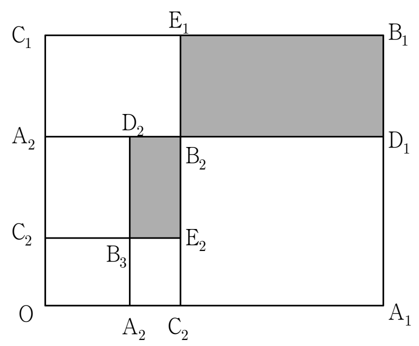
① $\frac{3}{e^2}$ ② $\frac{4}{e^2}$ ③ $\frac{5}{e^2}$ ④ $-3e$ ⑤ $-4e$

26. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA_1}} = 5$, $\overline{\mathrm{OC_1}} = 4$인 직사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{A_1B_1}$ 위에 점 $\mathrm{D_1}$, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 위에 점 $\mathrm{E_1}$, 사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$ 내부에 점 $\mathrm{B_2}$를 사각형 $\mathrm{B_2D_1B_1E_1}$가 $\overline{\mathrm{B_1D_1}} : \overline{\mathrm{B_1E_1}} = 1:2$인 직사각형이 되도록 잡는다. 선분 $\mathrm{OC_1}$ 위에 점 $\mathrm{A_2}$, 선분 $\mathrm{OA_1}$ 위에 점 $\mathrm{C_2}$를 사각형 $\mathrm{OA_2B_2C_2}$가 $\overline{\mathrm{OA_2}} : \overline{\mathrm{OC_2}} = 5:4$인 직사각형이 되도록 잡고, 사각형 $\mathrm{B_2D_1B_1E_1}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
직사각형 $\mathrm{OA_2B_2C_2}$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 다섯 점 $\mathrm{D_2}$, $\mathrm{E_2}$, $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{C_3}$을 잡고, 사각형 $\mathrm{B_3D_2B_2E_2}$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{21}{4}$ ② 6 ③ $\frac{27}{4}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{33}{4}$

27. $0 < t < \frac{\pi}{4}$ 인 실수 t에 대하여 직선 $y = (\sin 2t)x$가 곡선 $y = \sqrt{x^2 - t^2}$과 만나는 점을 P라 하고, 점 P가 나타내는 곡선을 C라 하자. $t = \frac{\pi}{8}$일 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{\pi+4}{\pi+2}$ ② $\frac{\pi+2}{\pi+4}$ ③ $\frac{\pi-2}{\pi+4}$

④ $\frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{\pi+2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}(\pi+2)}{\pi+4}$

28. 상수 $a\ (a < 0)$에 대하여 함수 $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{e^{x-a}}$가 있다. 실수 t에 대하여 점 $(t, f'(a)(t-a)+f(a))$에서 곡선 $y = f(x)$에 그을 수 있는 접선의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(a)g(b) \times \left(\frac{b}{a+1} - 1\right)e^a$의 값은? [4점]

(가) 함수 $g(t)$가 $t = k$에서 불연속이 되는 실수 k의 최솟값은 a, 최댓값은 b이다. (b는 $a < b$인 상수)

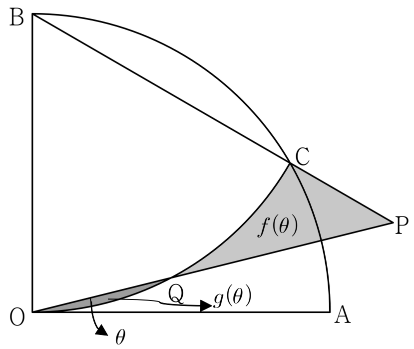
(나) $\lim_{t \to a} g(t) = 4$, $\lim_{t \to b+} g(t) < \lim_{t \to b-} g(t) < 4$

① $\frac{3}{2}e^2$ ② $3e^2$ ③ $\frac{9}{2}e^2$ ④ $6e^2$ ⑤ $\frac{15}{2}e^2$

단답형

29. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 중심이 B, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{BO}}$인 원과 만나는 O가 아닌 점을 C라 하고, 선분 BC의 연장선 위의 점 P를 $\angle \mathrm{POA} = \theta$가 되도록 잡고, 선분 OP가 호 OC와 만나는 O가 아닌 점을 Q라 할 때, 호 QC와 두 선분 QP와 CP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 호 OQ와 선분 OQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{2}{3}$를 만족시키는 실수 α에 대하여 $f'(\alpha)-g'(\alpha)=-\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



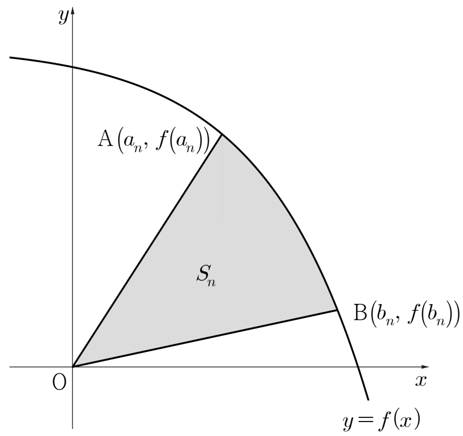
30. $f(0)>0$이고 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x)<0,\quad f''(x)<0$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점을 $\mathrm{A}(a_n, f(a_n))$, $\mathrm{B}(b_n, f(b_n))$라 할 때, 직선 AB의 기울기는 $-n$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{1+n^2}$이다. 곡선 $y=f(x)$와 두 선분 OA, OB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(b_n)^2-(a_n)^2}{f(b_n)-f(a_n)}=-20,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=4$$

일 때, $100\times\left|\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{f(b_n)}{f(a_n)}\right)\right|$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 모든 자연수 n에 대하여 $0<a_n<b_n$이다.) [4점]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

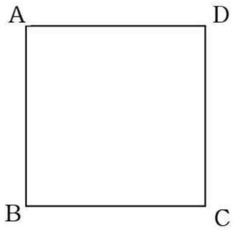
23. 두 벡터 $\vec{a}=(1,\ -2)$과 $\vec{b}=(4k, 1-k)$이 서로 수직일 때, 실수 k의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{a^2}=1$ 의 한 점근선의 방정식이 $y=\frac{2}{3}x$이다. 이 쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(9, b)$에 대하여 양수 b의 값은? [3점]

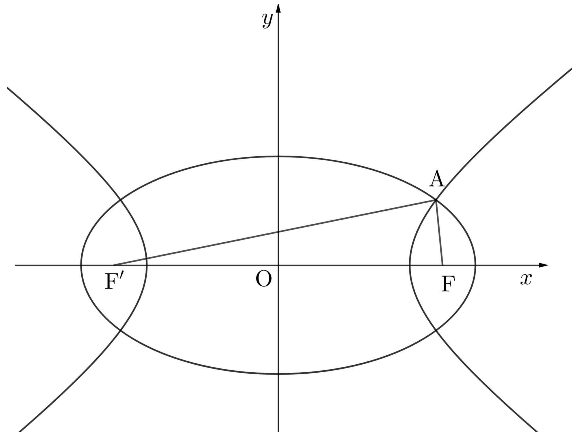
① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

25. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD가 있다. 선분 CD를 $1:2$ 로 내분하는 점을 E라고 할 때, $|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}|$의 값은? [3점]



① $\sqrt{59}$　② $\sqrt{61}$　③ $3\sqrt{7}$　④ $\sqrt{65}$　⑤ $\sqrt{67}$

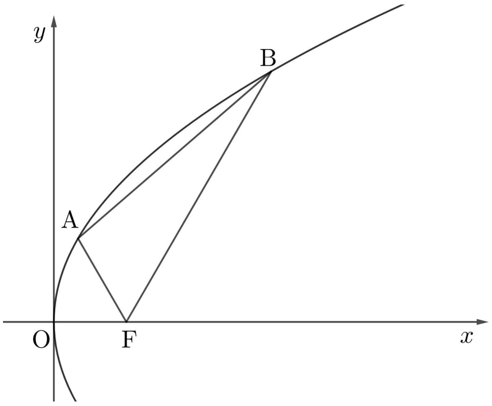
26. 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{11}=1$와 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$이 만나는 점을 A라 하자. 두 점 F$(5,0)$, F$'(-5,0)$에 대하여 삼각형 AF$'$F의 넓이는? [3점]



① $3\sqrt{7}$　② $3\sqrt{8}$　③ 6　④ $3\sqrt{10}$　⑤ $3\sqrt{11}$

27. 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=12x$ 위에 서로 다른 제1사분면 위의 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(c, d)$가 있다. $\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=1:3$ 이고 $\angle\mathrm{AFO}+\angle\mathrm{BFO}=\pi$ 일 때, 삼각형 AFB의 외접원의 반지름의 길이는?

(단, $a<3$, $c>3$이고 O는 원점이다.) [3점]



① $\dfrac{4\sqrt{17}}{3}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{4\sqrt{19}}{3}$ ④ $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{21}}{3}$

28. 좌표평면에 두 점 $\mathrm{F}(5, 0)$, $\mathrm{F}'(-5, 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 C가 있다. $\angle\mathrm{F}'\mathrm{PF}=\dfrac{\pi}{2}$인 쌍곡선 C 위의 점 P에 대하여 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PF}}|$

(나) $|\overrightarrow{\mathrm{QF}}+\overrightarrow{\mathrm{QF}'}|$의 최댓값은 22이다.

쌍곡선 C의 주축의 길이는? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

단답형

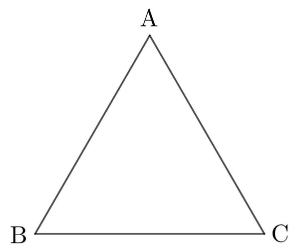
29. 두 초점이 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$이고, 단축의 길이가 $2\sqrt{3}$인 타원을 C라 하자. 점 $A(3, 0)$에서 타원 C에 그은 접점을 P, P′이라 할 때, 선분 PP′의 길이는 $4\sqrt{2}$이다. 사각형 PFP′A의 둘레의 길이는 $a\sqrt{3}$이다. a의 값을 구하시오. (단, 점 P의 y좌표는 점 P′의 y좌표보다 크며, a는 유리수이다.) [4점]

30. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 ABC에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{BP} = s\overrightarrow{BA} + t\overrightarrow{BC}$ $\left(0 \le s \le \frac{1}{2},\ 0 \le t \le \frac{1}{2}\right)$

(나) $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PB} \ge 8$

두 선분 BC와 CA 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BQ}$일 때, $\left|\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{CR}\right|^2$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]



○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.