2027학년도 6평 대비 잼있는 모의고사 정답 및 총평

제 2 교시

수학 영역

공통

1	①	2	③	3	④	4	⑤	5	①
6	②	7	③	8	④	9	①	10	④
11	⑤	12	③	13	③	14	①	15	②
16	10	17	17	18	6	19	40	20	32
21	136	22	73						

미적분

23	⑤	24	①	25	③	26	②	27	⑤
28	①	29	59	30	50				

기하

23	①	24	④	25	②	26	⑤	27	⑤
28	①	29	8	30	669				

예상 1등급 커트라인과 만점자 수

미적분	기하	만점자 수(미/기)
81-85	88-89	280(29)명

EBS 연계문항

공통

6번: 수능특강 수학Ⅰ/14쪽/2번 [26008-0013]
7번: 수능특강 수학Ⅱ/83쪽/5번 [26009-0135]
8번: 수능특강 수학Ⅰ/47쪽/6번 [26008-0076]
9번: 수능특강 수학Ⅱ/65쪽/유제4 [26009-0102]
10번: 수능특강 수학Ⅰ/81쪽/6번 [26008-0147]
12번: 수능특강 수학Ⅰ/33쪽/6번 [26008-0055]
13번: 수능특강 수학Ⅱ/53쪽/예제4 [--------]
14번: 수능특강 수학Ⅰ/65쪽/10번 [26008-0119]
15번: 수능특강 수학Ⅱ/14쪽/3번 [26009-0019]
18번: 수능특강 수학Ⅱ/41쪽/유제5 [26008-0065]
19번: 수능특강 수학Ⅱ/47쪽/유제1 [26009-0075]

모의고사 총평

공통 시험지와 미적 시험지가 확연하게 차이가 나는 시험지였다.
이정도면 다른 사람이 출제했다고 생각할 수 밖에 없지만
놀랍게도 같은 사람이 전문항을 출제하였다.

공통 시험지는 작년 수능 시험지와 비슷한 구성이었으나 오히려 난이도가 더 낮았다. 작년 6월, 9월, 수능 시험지에서는 15번이나 21번 둘 중에 하나는 어려워서 높은 1등급을 변별해낼 수 있었으나 이 시험지는 그렇지 못하다. 15번과 21번 둘 중에 어느 문항도 1등급을 변별하기에는 무리가 있는 문제였다.
한편 22번의 경우 작년 6월, 수능과 비슷한 수준이다.
거듭제곱근이라는 아주 마이너한 단원에서 출제되어서 당황스러울 수 있지만 6평 전에는 무슨 단원이 출제될지 모르는 만큼 한번쯤 경험해볼만한 가치가 있는 문제라고 생각한다.

그러나 공통 시험지 구성의 모든 이유는 미적분에 있었다.
미적분이 굉장히 어려웠다. 최근 기조에는 안나오고 있는
모든 주제를 28, 29, 30에 총동원하여 포격을 퍼부었다. 28번은 접선의 개수와 관련된 내용으로 14수능 B형 30번에 출제된 이례로 한번도 출제된 적 없고 29번은 삼각함수 도형 극한 기출문제에서 자주 쓰이는 요소를 핵심 발상으로 삼았는데 요즘 학생들이 삼도극 기출문제를 자세히 안보다 보니 체감 난도가 높았을 것이다. 마지막 30번은 완전한 신유형으로 부등식을 세워야만 문제를 풀 수 있는데 그 과정이 매우 낯설고 발상적이라고 느낄 수가 있다. 하지만 놀랍게도 교과서에 똑같은 과정이 그대로 나와있다.

기하는 전반적으로 무난하게 출제되었지만 그렇다고 너무 쉬운 시험지는 아니고 28, 29번이 무난한 대신 30번의 변별력이 상당히 높았다. 기하는 아쉽게도 EBS 연계 문항을 제공하지 못했습니다.

이렇게 문항을 구성한 이유는 평가원은 6월 모의고사에서
실험적인 시도를 많이 하기 때문에 공통은 22번 거듭제곱근을
미적은 28, 29, 30 모두 낯선 문제를 배치하였다.

시험지 난도에 대해서 정리하자면
공통 시험지는 6평 대비 잼모=25수능 수준이고,
미적 시험지는 6평 대비 잼모=2606 수준이다.
기하 시험지는 2606<6평 대비 잼모<2506 수준이다.

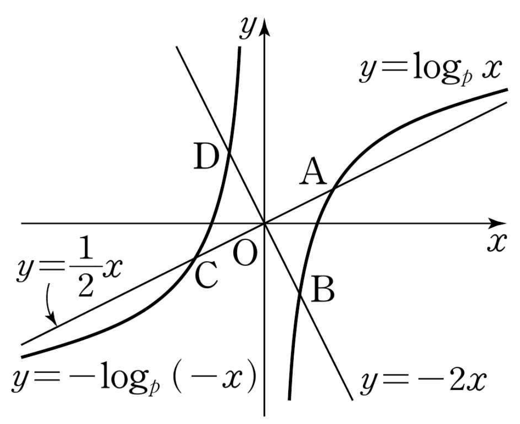
미적분

24번: 수능특강 미적분/5쪽/유제1 [26011-0001]
25번: 수능특강 미적분/67쪽/7번 [26011-0106]
27번: 수능특강 미적분/45쪽/예제3 [--------]
29번: 수능특강 미적분/52쪽/4번 [26011-0084]

Funny Funny

세부 문항 Comment

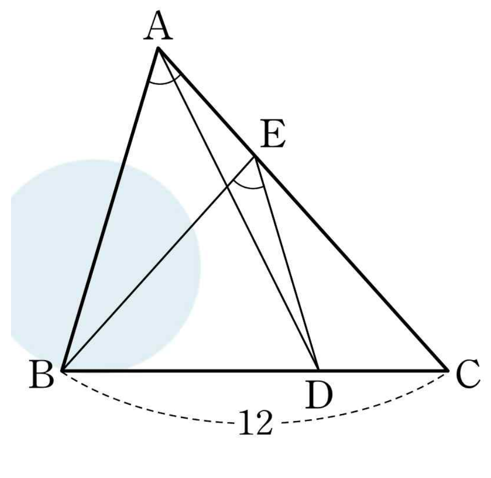
12번: 로그함수의 점대칭과 수직이등분선의 자취를 물어본 문항이다. 길이가 같다는 조건을 바탕으로 이등변삼각형의 성질을 사용하는 것은 작년 평가원을 비롯하여 빈출되는 소재이지만 이런 식으로 수직이등분선의 자취를 물어보지는 않았다. 또한 점대칭에 대한 내용을 12번에서부터 물어보았기에 12번 치고는 최근 평가원에 비해 수준이 많이 높은 문제라고 생각한다. 이 문제는 다음 EBS 문항을 연계하여 출제하였다.

> 그림과 같이 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 두 곡선 $y=\log_p x$, $y=-\log_p(-x)$와 만나는 네 점 중 원점과 가까운 두 점을 각각 A, C라 하고, 직선 $y=-2x$가 두 곡선 $y=\log_p x$, $y=-\log_p(-x)$와 만나는 두 점을 각각 B, D라 하자. 네 점 A, B, C, D가 반지름의 길이가 r인 한 원 위의 점일 때, r^6의 값은? (단, $p>1$) [26008-0055] 정답: ⑤
>
> 
>
>
> ① $\frac{105}{16}$　② $\frac{55}{8}$　③ $\frac{115}{16}$　④ $\frac{15}{2}$　⑤ $\frac{125}{16}$

13번: 가벼운 극대극소를 조사하는 문항인데 이차함수의 근의 분리를 사용하는 문항이다. 매력적인 오답으로 11을 쓴 학생이 많을 것으로 생각하는데 선지를 보면 11이 없다.
출제자가 배려를 해서 매력적인 오답을 배치하지 않았다.
이차함수의 근의 분리에서는 축 또한 근의 분리의 요소가 되는데 그것을 고려하지 않고 $f'(1)<0$만 고려한 학생들이 많았을 것이다.
역시나 수능 시험에서는 고1 수학을 피해갈 수 없다는 것을 잘 보여주는 문제다. 이 문제는 다음 EBS 문항을 연계하여 출제하였다. EBS 연계 체감이 매우 많이 되는 것을 알 수 있다.

> 함수 $f(x)=x^3-ax^2+bx+3$이 $x=1$에서 극대가 되도록 하는 10 이하의 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.
> [수능특강 수학Ⅱ/53쪽/예제4] 정답: 3

14번: 평소와 비슷한 평범한 도형 문항이다.
사인 비가 나오면 길이 비로 바꿀 수 있다는 것은 너무 많이 나온 내용인 만큼 어디선가 많이 본 도형이라고 할 수 있다. 특히 이 문제는 EBS 연계의 힘이 돋보이는데, 도형상황이 똑같기 때문에 원본 문항에서 했던 도형 해석을 이 문항에서도 똑같이 적용할 수 있었다. 이 문제는 다음 EBS 문항을 연계하여 출제하였다.

> 그림과 같이 $\overline{BC}=12$인 예각삼각형 ABC에서 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 D라 하자. 선분 AC 위의 점 E가 $\angle BAE=\angle BED$, $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{ED}:\overline{EB}$를 만족시키고 삼각형 ABE의 넓이가 $9\sqrt{5}$일 때, 선분 AD의 길이는? [26008-0119] 정답: ⑤
>
> 
>
>
> ① $\frac{\sqrt{485}}{2}$　② $\frac{7\sqrt{10}}{2}$　③ $\frac{3\sqrt{55}}{2}$　④ $5\sqrt{5}$　⑤ $\frac{\sqrt{505}}{2}$

15번: 최근에 자주 나오는 극한의 존재성 유형에서 출제하였지만 $\frac{0}{0}$꼴 극한을 자주 다루는 최근 문항과는 달리 두 불연속 함수의 차함수에 대한 극한을 물어본 문항이다.
특이한 점은 그 값이 $\frac{g(\alpha)-h(\alpha)}{\alpha}$라는 발문인데, 이 의미를 단순히 값에 대한 정보로 받아들이는 것이 아닌 연속이라는 의미로 받아들이는 것이 중요했다. 문항 난이도는 최근 평가원 15번에 비해 쉬운 편에 속한다. 추론적인 요소가 없고 케이스 분류와 계산만 잘하면 되는 문항이다. 이 문제는 다음 EBS 문항을 연계하여 출제하였다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & (x \le 1) \\ x-3 & (x>1) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} x^2+ax & (x \le a) \\ bx & (x>a) \end{cases}$$

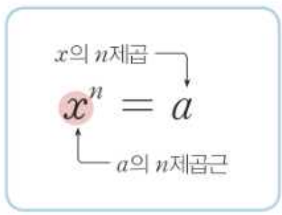
라 하자. 모든 실수 k에 대하여 $\lim_{x \to k}\left(f(x)-g(x)\right)$의 값이 존재할 때, $a+b$의 값은? [26009-0019] 정답: ①

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

20번: 수열 빈칸 문항이다. 중학교 때나 보던 원의 성질을 저런식으로 수열 문제에 여과없이 사용하기에는 수열 문항의 학업 성취 능력과는 크게 관련이 없기도 하고, 이것을 떠올리기 어렵기 때문에 빈칸으로 제시하였다. 아마 빈칸에서 문제 풀이 방식을 전부 알려줬기 때문에 푸는데에는 지장이 없었을 것이라고 믿는다.

21번: 전통적인 함수 추론 문항이다. 앞선 문항은 모두 케이스 분류나 계산 문제 느낌이 강했다면 이제서야 제대로 된 추론 문제가 나온 느낌이다. 연속함수를 적분한 함수는 미분가능한 함수라는 점은 기출문제에서 많이 다룬 소재인데 이 부분에서부터 풀이가 시작된다. 그리고 적분되는 함수가 절댓값이 씌워진 함수라는 점을 생각하고 적분함수는 증가함수라는 점을 잘 이용하여 사차함수를 증가함수가 되도록 잘 조합하면 풀이가 끝난다. 이 문항이 앞선 문항들에 비해서는 추론적인 요소가 강한 것은 사실이나 난이도 자체는 그다지 어렵지 않다. 2등급 중반만 되어도 잘 풀었을 것이라고 생각한다.

22번: 거듭제곱근이라는 생소한 단원에서 출제되어 매우 당황스러울 법한 문항이다. 출제자는 더 이상 지수로그함수에서는 22번 문제가 나오지 않을 것이라고 생각하여 어떻게 다른 단원에서 22번 문제를 만들지 생각해보았는데 떠오른 것이 지수로그 중에서도 함수가 아닌 거듭제곱근을 꺼내왔다. 22번 급으로 문제를 만들려다 보니 그동안 평가원에 출제된 거듭제곱근 문제가 왜 쉬운지부터 파악해보았다.



다음은 교과서에 적혀있는 거듭제곱근 기본 개념이다. 거듭제곱근은 크게 두가지로 이루어져 있는데, 첫째는 실수 a이고 둘째는 2 이상의 자연수 n으로 이루어져있다. 대부분이 보는 모든 거듭제곱근 문제는 n에 따라 홀짝을 나누어 실수 a 부분을 이차함수 등등으로 숨겨 함수를 추론하도록 한다.

그런데 이 거듭제곱근 문제가 쉬운 이유는 n제곱에 있다. 왜냐하면 우리는 저 n이 숨겨져 있지 않고 직접 드러나 있기 때문에 그냥 홀짝을 구분하여 잘 풀어주면 되기 때문이다.

하지만 만약 저 n제곱 부분을 숨길 수 있다면 난이도를 올릴 수 있을 것이다.

그래서 출제자는 n제곱 부분을 직접 드러내지 않고, 치역이 $\{2, 3\}$인 새로운 함수 $h(x)$를 도입하고 조건을 부여함으로서 학생들이 스스로 n제곱 부분을 추론할 수 있게 바꾸었더니 순식간에 22번 급 변별력을 갖추게 된 것이다.

Funny Funny

미적분

26번: 오랜만에 프랙탈 도형 문제가 3점짜리로 들어서서 당황스러울 수 있지만 문제 자체는 굉장히 평이하게 출제하였다. 큰 이상이 없었을 것으로 예상합니다.

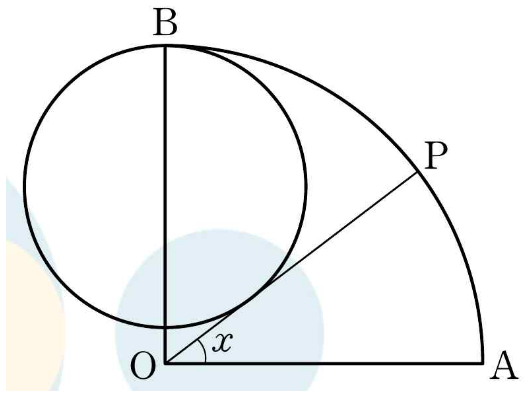
27번: 작년 수능 27번의 정확히 역과정이라고 볼 수 있다.
작년 수능은 매개변수가 이미 주어지고 직선에 대입하여 t의 값을 얻는 방식이었다면, 이 문제는 t의 값이 이미 주어지고 직선에 대입하여 매개변수를 알아내는 방식이다. 생소할 수 있다고 생각할 수 있지만 이 문제는 놀랍게도 EBS 연계 문항이므로 익숙하게 느꼈어야 한다. 이 문제는 다음 EBS 문항을 연계하여 출제하였다.

> $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$인 실수 t에 대하여 직선 $y=(\tan t)x$가 원 $x^2+y^2=t^2$과 제 1사분면에서 만나는 점을 P라 하고, 점 P가 나타내는 곡선을 C라 하자. $t=\dfrac{\pi}{4}$일 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는? [수능특강 미적분/45쪽/예제3] 정답: ⑤
>
> ① $\dfrac{2+\pi}{2-\pi}$ ② $\dfrac{1+\pi}{1-\pi}$ ③ $\dfrac{2-\pi}{2+\pi}$ ④ $\dfrac{4-\pi}{4+\pi}$ ⑤ $\dfrac{4+\pi}{4-\pi}$

28번: 상당히 까다로운 문제다. 일단 소재 자체가 13년 전 이후 출제되지 않은 접선의 개수에 대해서 다루고 있기 때문에 문제 자체의 낯섦을 무시할 수 없다. 이 문제를 해결하기 위해서는 기출문제를 통한 접선의 개수 변화 경계에 대한 모든 것을 알고 있어야함은 당연하고 그 외에도 오로지 최솟값과 최댓값에만 집중하는 태도 또한 필요하다. 예상 정답률 17%가 예상되는 고난도 문제이고 이 문제를 풀기 위한 기본적인 내용학습이 안되었다면 다음 141130(B) 기출문제를 다시 한번 학습해보길 바란다.

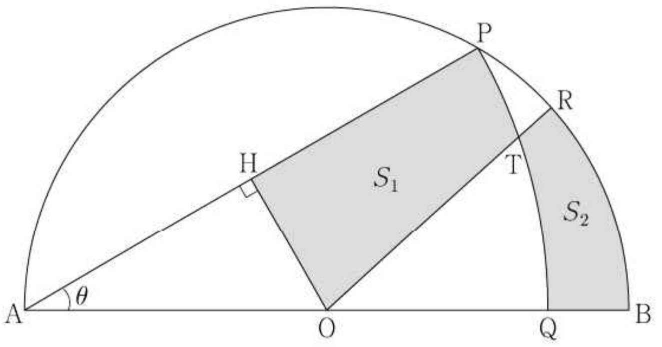
> **30.** 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.
>
> (가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
> (나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.
>
> $g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

29번: 삼도극 기출을 건너 뛰거나 설렁설렁 공부한 학생들은 당하기 딱 좋은 문제다. 만약 4년 전에 이 정도 난도의 삼각함수 도형 문제가 나왔다면, 정말 쉬운 거져주는 문제 정도가 되었겠지만
요즘 같으면 이야기가 달라진다. 삼도극 기출을 건너 뛰는 학생들이 많아짐에 따라 이 문항에서 적용되는 기본적인 넓이의 재구성마저 익히지 못하는 경우가 많을 것이다. 넓이의 재구성을 떠올리지 못한다면, 거의 불가능한 수준의 계산을 해내야 한다.
반면, 넓이의 재구성을 잘 떠올릴 경우에는 삼각함수 덧셈정리까지 적용하여 깔끔하게 식을 정리할 수 있었을 것이고 그렇게 되면
계산량이 매우 적다고 느낄 것이다. 공부를 한 학생과 그렇지 않은 학생들의 차이가 매우 극명한 문제로 만약 이 문제를 제대로 접근하지 못했다면 반성이 필요하다. 이 문제는 다음 EBS 문항을 연계하여 출제하였고, 그 다음 문제는 넓이의 재구성이 적용된 대표적인 기출문제이며 다시 한번 학습해보길 추천한다.

> 그림과 같이 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1, $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB 위에 $\angle POA=x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$인 점 P를 잡는다. 중심이 선분 OB 위에 있고 점 B를 지나며 선분 OP에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(x)$라 할 때, $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$의 값은? [26011-0084] 정답: ④
>
> 
>
>
> ① $-\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ ② $-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ ③ $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

200928(가)

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AP}}$ 인 원과 선분 AB의 교점을 Q라 하자.
호 PB 위에 점 R를 호 PR와 호 RB의 길이의 비가 3:7이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 OR와 호 PQ의 교점을 T, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하자.
세 선분 PH, HO, OT와 호 TP로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 선분 RT, QB와 두 호 TQ, BR로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$라 할 때,
$\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S_1 - S_2}{\overline{\mathrm{OH}}} = a$이다. $50a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$) [4점]



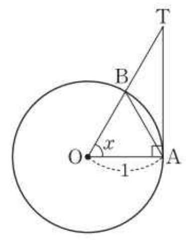
30번: 이 시험지에서 TOP2로 어려운 문제라고 해도 되겠다. 일단 처음 문제를 해결할 때, 굉장히 당황스러웠을 것이고, 그걸 해결하는 발상이 매우 생소하고 어려웠다. 일단 $f(x)$를 직접 구하기 어렵다는 것을 고려해서 부등식을 세워 샌드위치 정리로 풀이를 이어가야 하는데 그 과정이 만만치 않았다. 그런데 그 과정이 놀랍게도 교과서에 그대로 있는 발상이다.

〔신사고 미적분〕 03_여러 가지 함수의 미분 P.67

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$의 값을 구해 보자.

(i) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$일 때,

오른쪽 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원에서 $\angle$AOB의 크기를 x라 하고, 점 A에서의 접선과 선분 OB의 연장선의 교점을 T라고 하자.



삼각형 AOB, 부채꼴 AOB, 삼각형 AOT의 넓이 사이에는

$$\triangle \mathrm{AOB} < (\text{부채꼴 AOB의 넓이}) < \triangle \mathrm{AOT}$$

인 관계가 성립하고, $\overline{\mathrm{TA}}=\tan x$이므로

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,\ 즉\ \sin x < x < \tan x$$

이다. $\sin x > 0$이므로 각 변을 $\sin x$로 나누면

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},\ 즉\ 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

이다. 그런데 $\lim\limits_{x \to 0+} \cos x = 1$이므로

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

이다.

다음 과정을 보면 직각삼각형을 만들어 넓이에 대한 대소관계를 통해 부등식을 세워 샌드위치 정리를 사용하는 방식으로 극한 값을 증명하고 있다. 이 유도 과정을 참고하여 이 문항을 출제하였다.

자세히 보면 부등식에 대응하는 각각의 식들이 매우 유사하다.

$\triangle$AOB는 이 문제의 $\triangle$OAB에 대응하고
(부채꼴 AOB의 넓이)는 S_n에 대응하고
$\triangle$AOT는 $\triangle$OAB+(보조로 그린 삼각형)에 대응한다.

이런 식으로 따지고 보면 대단한 발상이 아닌데 우리가 놓치고 있는 부분에서도 충분히 킬러급 30번 문제가 나올 수 있구나 정도로 생각하면 좋을 것이다.

Funny Funny

기하

27번

특별할 거 없이 주어진 조건들을 전부 활용하면 풀리는 문제이다. 그나마 변별 포인트는 ∠AFO와 ∠BFO 관계를 식 변형을 통해 ∠AFA′과 ∠BFB′의 관계로 바꾸는 작업이다. 그 후에는 세 각이 모두 60도임을 확인하고 항상 하던 대로 사인법칙.

28번

(가) 조건을 통해 점 Q가 원의 자취임을 파악한 후, 직각삼각형을 이용하여 선분 FO와 PO가 같음을 보였으면 선분 QP의 길이를 통해 선분 FP의 길이를 구할 수 있다. 피타고라스로 PF′의 길이를 구한 후 쌍곡선의 정의를 활용하면 되는 문제였다. 이렇게 두 개의 단원을 엮어서 문제를 내는 경우는 어렵지 않게 출제된다.
 겉보기 난이도에 지레 겁먹지 말고 주어진 대로만 진행해보도록 하자.

29번

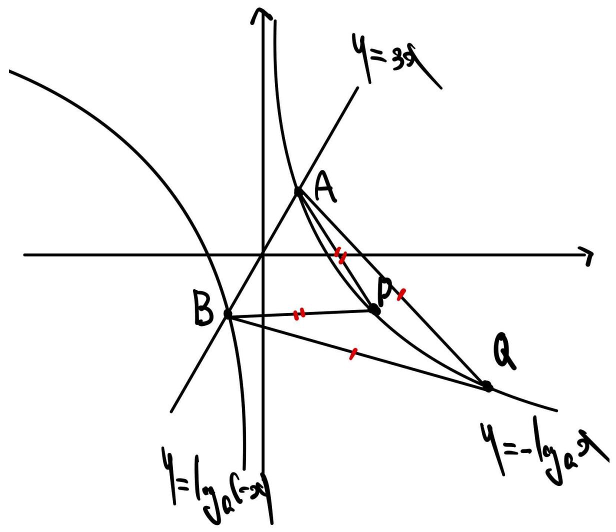
타원의 방정식이 직접 주어지지 않고 식을 세워 찾아내야 하는 문제이다. 현재 기조상 29번 이차곡선 문제에서 이차곡선의 식을 직접 주지 않고 찾아내어 연립해야 하는 문제가 많이 출제되는 만큼 잊어서는 안 되는 주제이다. 그 후에는 타원의 대칭성을 활용하면 길이 관계를 쉽게 파악하여 답을 구해낼 수 있다.

30번

도형의 자취를 파악하는 것이 중요한 문제였다. 30번인 만큼 조건해석이나 도형의 자취를 그리는 것이 까다롭긴 하나 주어진 대로 따라가면 어려운 문제는 아니었을 것이다. 이러한 기출문제는 많이 출제되었기 때문에 만약 이 문제가 어려웠다면 반복하여 기출학습을 하도록 하자.

12번: ③

먼저 주어진 상황을 그래프로 표현해보면 다음과 같다.



두 점 P와 Q는

$$\overline{AP}=\overline{BP},\ \overline{AQ}=\overline{BQ}$$

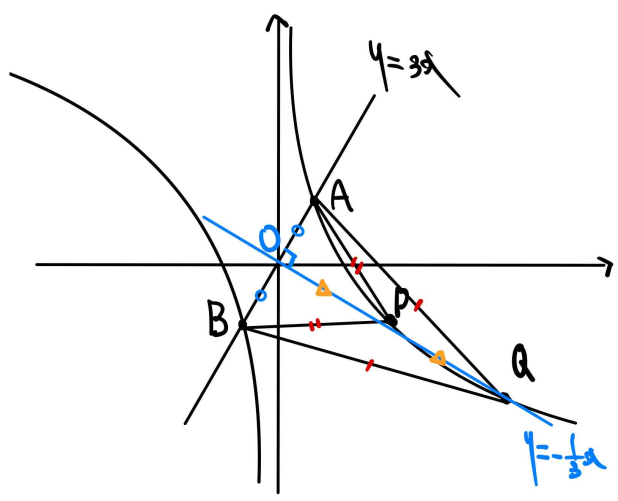
즉, 이등변삼각형의 성질에 의해
선분 AB의 수직이등분선 위에 놓여져 있어야 한다.

두 곡선 $y=-\log_a x$와 $y=\log_a(-x)$은 원점 대칭 관계이므로
선분 AB의 중점은 원점이므로 선분 AB의 수직이등분선의 자취는

$$y=mx \ \Rightarrow \ 3\times m=-1 \ \Rightarrow \ m=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore y=-\frac{1}{3}x$$

이고, $\triangle ABQ=2\times\triangle ABP$이므로 $\overline{OQ}=2\times\overline{OP} \ \Rightarrow \ \overline{OP}=\overline{PQ}$이다.
이 상황을 그래프로 표현하면 다음과 같다.



$\overline{OQ}=2\times\overline{OP}$에 의해
점 P를 $P\left(k, -\frac{1}{3}k\right)$라고 놓으면, $Q\left(2k, -\frac{2}{3}k\right)$이고,
각각을 대입하면

$$-\log_a k=-\frac{1}{3}k,\quad -\log_a 2k=-\frac{2}{3}k$$

$$\Rightarrow \ \log_a k=\frac{1}{3}k \ \cdots\ (\mathrm{I}),\quad \log_a 2k=\frac{2}{3}k$$

$$\Rightarrow \ \frac{2}{3}k=2\log_a k=\log_a 2k$$

$$\Rightarrow \ \log_a k^2=\log_a 2k \ \Rightarrow \ \therefore k=2$$

(I)에 $k=2$를 대입하면

$$\log_a 2=\frac{2}{3} \ \Rightarrow \ a^{\frac{2}{3}}=2 \ \Rightarrow \ \therefore a=2^{\frac{3}{2}}\text{이고,}$$

$$(\overline{PQ})^2=(2k-k)^2+\left(-\frac{2}{3}k+\frac{1}{3}k\right)^2=\frac{10}{9}k^2$$

$$\Rightarrow \ \therefore (\overline{PQ})^2=\frac{5}{9}\times 2^3$$

따라서 구하는 값인 $a\times(\overline{PQ})^2=\frac{5}{9}\times 2^{\frac{9}{2}}$이다.

13번: ③

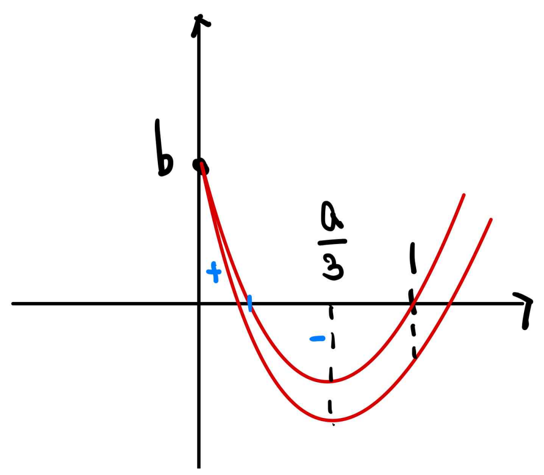
함수 $f(x)$를 미분하면

$$f'(x)=3x^2-2ax+b$$

이다. 박스 조건이 의미하는 바는 열린구간 $(0, 1)$에서
$f'(x)$의 부호가 오직 한 번만 변해야 한다는 것과 같다.

$f'(0)=b>0$이므로 다음과 같이 $f'(x)$의 개형을 나눌 수 있다.

I) 이차함수 $f'(x)$의 축 $x=\frac{a}{3}$가 1보다 작은 경우



이와 같은 경우 그림으로 알 수 있듯이
$f'\left(\frac{a}{3}\right)<0,\quad f'(1)\leq 0$를 만족시켜야 한다.

그런데 $f'(1) \le 0$가 성립하면 자동적으로 $f'\left(\frac{a}{3}\right) < 0$가 성립하기 때문에 $f'\left(\frac{a}{3}\right) < 0$는 따지지 않아도 된다.

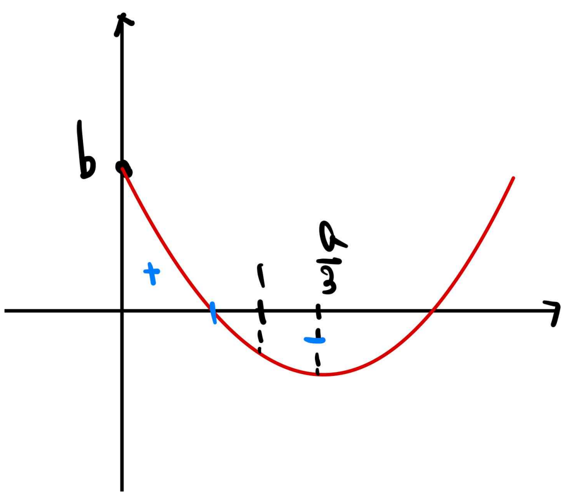
$$f'(1) = 3 - 2a + b \le 0 \quad \cdots (ㄱ)$$
$$\Rightarrow \ b \le 2a - 3$$

$\frac{a}{3} < 1$인 경우를 따지는 상황이므로
최종적으로 만족시켜야 할 부등식은 모두

$$a < 3, \quad b \le 2a - 3$$

이다. $a = 1 \ \Rightarrow \ b \le -1 \quad$ (X), $a = 2 \ \Rightarrow \ b \le 1 \quad$ (1개)

II) 이차함수 $f'(x)$의 축 $x = \frac{a}{3}$가 1보다 크거나 같은 경우



이와 같은 경우 그림으로 알 수 있듯이
$f'(1) < 0$만 만족시키면 된다.

(ㄱ)에서 등호만 뺀 식이 $f'(1) < 0$이므로 $b < 2a - 3$이다.

$\frac{a}{3} \ge 1$인 경우를 따지는 상황이므로
최종적으로 만족시켜야 할 부등식은 모두

$$a \ge 3, \quad b < 2a - 3$$

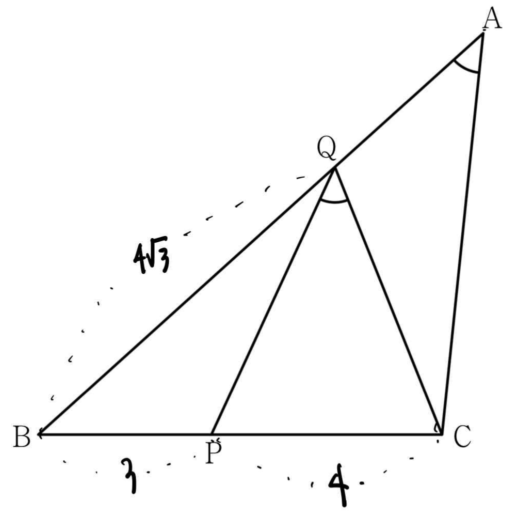
이다.

$$a = 3 \ \Rightarrow \ b < 3 \quad (2개),$$
$$a = 4 \ \Rightarrow \ b < 5 \quad (4개),$$
$$a = 5 \ \Rightarrow \ b < 7 \quad (5개)$$

I)와 II)에 의해 $1 + 2 + 4 + 5 = 12$이다.

14번: ①

먼저 도형 위에 주어진 정보를 표현하면 다음과 같다.



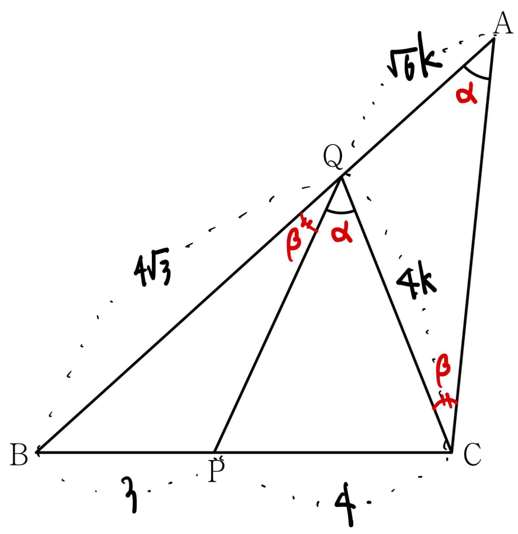
삼각형 QCA에서 $\sin(\angle QAC) : \sin(\angle QCA) = 4 : \sqrt{6}$을

사인 비가 길이의 비로 바뀔 수 있다는 점을 이용하여

$$\overline{QC} = 4k, \quad \overline{AQ} = \sqrt{6}k \text{로 놓을 수 있다.}$$

지금까지 우리는 $\angle QAC = \angle PQC$라는 조건을 쓰지 않았다는 점을 생각하여 $\angle QAC = \alpha$, $\angle QCA = \beta$라 하면

$$\angle AQC = \pi - (\alpha + \beta) \ \Rightarrow \ \angle BQC = \alpha + \beta \text{ 인데,}$$
$$\angle PQC = \alpha \text{이므로 } \therefore \angle BQP = \beta$$



이 사실을 얻어내면 $\overline{BP} = 3$, $\overline{PC} = 4$라는 조건과 더불어

$\sin(\angle QAC) : \sin(\angle QCA) = 4 : \sqrt{6}$라는 조건을 한번 더 사용할 수

있게 되어 사인법칙을 적용할 수 있다.

삼각형 QBP와 삼각형 QPC의 외접원의 반지름을
각각 R_1, R_2라 하면 사인법칙에 의해

$$R_1 : R_2 = \frac{\overline{\mathrm{BP}}}{2\sin(\angle \mathrm{BQP})} : \frac{\overline{\mathrm{PC}}}{2\sin(\angle \mathrm{PQC})}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{6}} : \frac{4}{4} \quad \Rightarrow \quad \therefore R_1 : R_2 = 3 : \sqrt{6}$$

이다. $\sin(\angle \mathrm{BPQ}) = \sin(\angle \mathrm{QPC})$이므로 사인법칙을 적용하면,

$$\frac{\overline{\mathrm{BQ}}}{\sin(\angle \mathrm{BPQ})} : \frac{\overline{\mathrm{QC}}}{\sin(\angle \mathrm{QPC})} = 3 : \sqrt{6}$$
$$\Rightarrow \quad 4\sqrt{3} : 4k = 3 : \sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad \therefore k = \sqrt{2}$$

이로써 삼각형 QBC과 선분 AQ의 길이가 $2\sqrt{3}$으로 결정이 됐다.

구하는 값이 $\overline{\mathrm{AC}}^2$이므로 $\angle \mathrm{BQC} = \theta$라고 놓으면,

삼각형 QBC에서 코사인법칙을 이용하여 각을 구하고
삼각형 QCA에서 다시 한번 코사인법칙을 이용하여 $\overline{\mathrm{AC}}^2$를 구할 수 있다.

삼각형 QBC에서 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{BQ}}^2 + \overline{\mathrm{QC}}^2 - \overline{\mathrm{BC}}^2}{2 \times \overline{\mathrm{BQ}} \times \overline{\mathrm{QC}}}$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{48 + 32 - 49}{2 \times 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{2}} = \frac{31}{32\sqrt{6}}$$

삼각형 QCA에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AQ}}^2 + \overline{\mathrm{QC}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{AQ}} \times \overline{\mathrm{QC}} \cos(\pi - \theta)$$
$$\Rightarrow \quad \overline{\mathrm{AC}}^2 = 12 + 32 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} \times \left(-\frac{31}{32\sqrt{6}}\right)$$

$\therefore \overline{\mathrm{AC}}^2 = \dfrac{119}{2}$이다.

15번: ②

먼저 두 함수 $g(x)$와 $h(x)$의 연속성을 따져보자.

함수 $g(x)$는 구간이 $|x| = 1$을 기준으로 나뉘어져 있으므로
$x = -1$ or 1에서 불연속일 수 있다.

함수 $h(x)$는 $x = a$에서 연속성을 따져봐야하는데

$$\lim_{x \to a-} h(x) = h(a) = 2a + 2, \quad \lim_{x \to a+} h(x) = -a^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2 + 2a + 2 = 0 \text{인 실수 } a\text{가 존재하지 않으므로}$$

함수 $h(x)$는 $x = a$에서 반드시 불연속이다.

이제 극한식을 해석해보자.

먼저 $\alpha = 0$일 때, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - h(x)}{x}$의 값이 존재하기 위해서는

$$\lim_{x \to 0} (g(x) - h(x)) = 0 \ \Rightarrow \ g(0) = \lim_{x \to 0} h(0)$$

라는 사실을 얻을 수 있다. $\displaystyle\lim_{x \to 0} h(x)$의 값이 존재하면 함수 $h(x)$의 특성상 반드시 그 함수값도 같을 수 밖에 없기 때문에

$$g(0) = h(0) \ \cdots \ \text{(i)}, \ a \neq 0$$

라는 사실 또한 얻을 수 있다.

$\alpha \neq 0$일 때, $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{g(x) - h(x)}{x} = \frac{g(\alpha) - h(\alpha)}{\alpha}$라는 말은
$\dfrac{1}{x}$은 0이 아닌 모든 실수 x에 대해서 연속이므로 결국

'함수 $g(x) - h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.'

라는 말과 같다.

함수 $h(x)$는 $x = a$에서 반드시 불연속이므로 $g(x) - h(x)$가 연속이기 위해서는 반드시

'함수 $g(x)$ 또한 $x = a$에서 불연속이어야 한다.'

함수 $g(x)$가 불연속일 수 있는 x는 $x = -1$ or 1뿐이므로

상수 a의 값을 $a = 1$이거나 $a = -1$인 경우로 나누어 볼 수 있다.

I) $a=1$인 경우

함수 $g(x)-h(x)$의 $x=1$에서의 연속성을 따져보자.

$$\lim_{x\to 1-}(g(x)-h(x))=f(1)-4,$$
$$g(1)-h(1)=1-4=-3$$
$$\lim_{x\to 1+}(g(x)-h(x))=1-(-1)=2$$

$g(1)-h(1)\neq \lim\limits_{x\to 1+}(g(x)-h(x))$이므로

함수 $g(x)-h(x)$는 $x=1$에서 불연속이다 $\cdots$ (모순)

II) $a=-1$인 경우

함수 $g(x)-h(x)$의 $x=-1$에서의 연속성을 따져보자.

$$\lim_{x\to -1-}(g(x)-h(x))=-1,$$
$$g(1)-h(1)=-1$$
$$\lim_{x\to 1+}(g(x)-h(x))=f(-1)+1$$
$$f(-1)+1=-1 \Rightarrow f(-1)=-2 \ \cdots \text{(ii)}$$

이처럼 함수 $g(x)-h(x)$가 $x=-1$에서 연속이 가능하므로
(II)가 정답인 케이스이다.

이제 마지막으로 $g(x)-h(x)$의 $x=1$에서의 연속성을 따져보자.

함수 $h(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$g(x)$ 또한 $x=1$에서 연속이다.
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1-}f(x)=1 \ \Rightarrow \ f(1)=1 \ \cdots \text{(iii)}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 식을 모두 종합해보면

$$f(0)=0,\ f(-1)=-2,\ f(1)=1$$

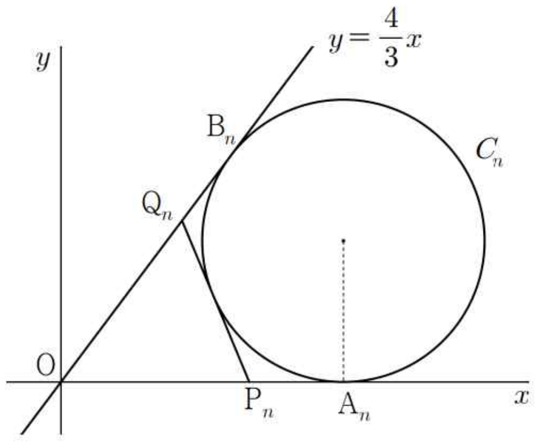
이므로 $f(x)=x(x-1)(x-k)+x$로 놓을 수 있고

$$f(-1)=2(-1-k)-1=-2$$
$$\Rightarrow \ k=-\frac{1}{2}$$

구하는 값인 $f(a+4)=f(3)=3\times 2\times \frac{7}{2}+3 \Rightarrow \therefore f(a+4)=24$이다.

20번: 32

그냥 빈칸이 하라는 대로 풀이를 따라가 보자.



원 C_n의 중심의 x좌표를 b_n이라 할 때, 점과 직선 사이의 거리 공식에 의해
($4x-3y=0$와 (b_n, a_n)까지의 거리)$=$
(C_n의 중심과 B_n 사이의 거리)

$$\frac{|4b_n-3a_n|}{5}=a_n \Rightarrow b_n=-\frac{1}{2}a_n \text{ or } 2a_n$$

b_n은 양수이므로) $b_n=\boxed{(가)=2}\times a_n$이다.

원의 성질에 의해 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$과 C_n이 접하는 점을 R_n이라 하면, 원의 성질 중에서 원과 접선 사이의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{A}_n}$, $\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{Q}_n}$가 된다.

따라서 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{Q}_n}$이므로 l_n의 값을 구하는 것은 $\overline{\mathrm{OA}_n}+\overline{\mathrm{OB}_n}$의 값을 구하는 것과 같다.

또다시 원과 접선 사이의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{OA}_n}=\overline{\mathrm{OB}_n}$
즉, $l_n=2\times\overline{\mathrm{OA}_n}=2b_n \Rightarrow l_n=4a_n$이다.

$l_4=8$이므로 ($a_4=2$, $a_1=1 \Rightarrow a_4-a_1=3d=1$
$\Rightarrow d=\frac{1}{3}$이다. 따라서 $a_n=\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}$이므로

수열 $\{l_n\}$의 일반항은 $\boxed{(나)=\frac{4}{3}n+\frac{8}{3}}$이다.

$$\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{a_n l_{n+1}}=\left(\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{d}\sum_{n=1}^{9}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right.$$
$$=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right))=\boxed{(다)=\frac{9}{16}}$$

이다.

$p=2$, $q=\frac{9}{16}$, $f(n)=\frac{4}{3}n+\frac{8}{3}$이므로 $\therefore \frac{f(25)}{p\times q}=32$이다.

21번: 136

먼저 주어진 항등식에 대입해야 할 것들을 대입해 보자.

$x=-1$을 대입하면, $\int_{-1}^{-1}|g(t)-g(3)|dt=f(-1)+4$

$\Rightarrow f(-1)=-4$

또한 적분되는 함수인 $|g(t)-g(3)|$는 연속함수이므로

'적분함수는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.'

$x=0$을 대입하면, $f(0)+4=-f(0) \Rightarrow f(0)=-2$이고,

미분계수 또한 같아야 하므로 $f'(0)=-f'(0) \Rightarrow f'(0)=0$이다.

이제 양변을 미분해서 항등식 해석을 해보자.

$$|g(x)-g(3)|=\begin{cases} f'(x) & (x<0) \\ -f'(x) & (x>0) \end{cases}$$

$x=3$을 대입하면, $f'(3)=0$이다.

항등식 해석을 마저 이어가 보면,

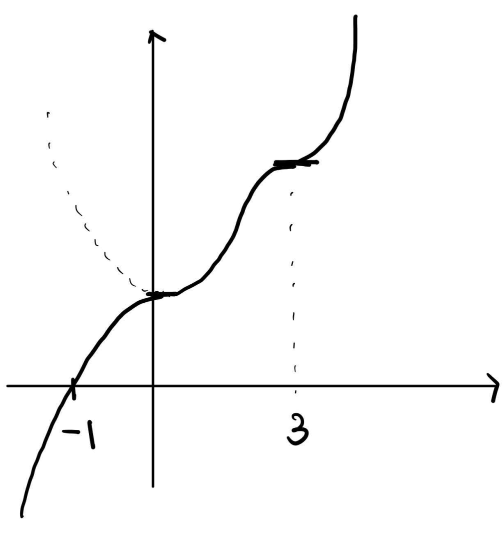
$|g(x)-g(3)|\geq 0 \ \cdots$ (I)이므로

원래 함수는 증가함수여야 한다.

이를 통해 $x<0$일 때, $f'(x)\geq 0$이고
$x>0$일 때, $f'(x)\leq 0$이므로

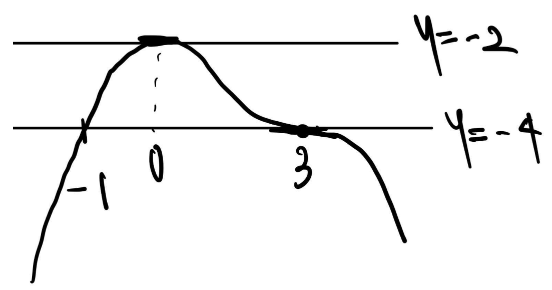
사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수라는 것을 알 수 있다.

따라서 함수 $g(x)$의 그래프를 다음과 같이 그릴 수 있다.



다음과 같이 (I)에 의하여 $g(x)$는 $x=3$에서 삼중근을 갖는다는 것 또한 알 수 있다.

$g(x)$의 개형과 사차함수 3:1 비율관계에 의해 함수 $f(x)$의 개형을 다음과 같이 그릴 수 있다.



이를 바탕으로 함수 $f(x)$의 식을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(x)=a(x+1)(x-3)^3-4$$
$$f(0)=-27a-4=-2 \ \Rightarrow \ a=-\frac{2}{27}$$
$$\Rightarrow \therefore f(x)=-\frac{2}{27}(x+1)(x-3)^3-4$$

$$f(5)=-\frac{2}{27}\times 6\times 8-4=-\frac{68}{9},$$
$$f(6)=-\frac{2}{27}\times 7\times 27-4=-18$$

구하는 값인 $f(5)\times f(6)=\left(-\frac{68}{9}\right)\times(-18)=136$이다.

22번: 73

먼저 함수 $g(x)$와 $h(x)$를 해석해보자.

함수 $g(x)$는 이차함수 $f(x)$와 일차함수 $3x-23$ 중에서 더 큰 값을 함수값으로 선택하겠다는 말 정도로만 해석하면 된다.

함수 $h(x)$는 함수값 자체가 2 또는 3밖에 없다 정도로만 해석하면 된다.

이제 (가) 조건을 해석해보자.

$g(n)$의 $h(n)$제곱근 중에서 음의 실수가 존재하기 위한 조건을 찾기 위해서

$h(n)=2$인 경우와 $h(n)=3$인 경우 정도로 케이스 분류를 해주도록 하자.

먼저 $h(n)=2$인 경우에는,

$g(n)=0$이 되면 $g(n)$의 $h(n)$제곱근은 0만 존재
$g(n)<0$이 되면 $g(n)$의 $h(n)$제곱근 중에서 실수인 것이
존재하지 않는다.

$g(n)>0$이 되면 $g(n)$의 $h(n)$제곱근은 양수 음수 모두 존재하므로

$h(n)=2$이면 $g(n)>0$이 되어야 한다.

다음으로 $h(n)=3$인 경우에는,

$g(n)$의 부호에 관계없이 항상 실수 하나가 존재하므로
음의 실수가 되기 위해서는 그냥 $g(n)<0$이 되면 된다.

(가) 조건으로 얻을 수 있는 정보를 정리하면

$h(n)=2 \rightarrow g(n)>0 \;\cdots\; \text{(I)}$

$h(n)=3 \rightarrow g(n)<0 \;\cdots\; \text{(II)}$

이다.

이제 (나) 조건을 해석해보자.

$g(n)$의 $h(n)$제곱근 중에서 정수인 것이 하나만 나올 수 있는지를
(I)와 (II)인 경우에서 모두 따져보자.

1) (I)인 경우

이 경우는 $g(n)$의 $h(n)$제곱근은 총 두 개가 나오게 되는데,

$g(n)$의 $h(n)$제곱근 중에서 하나가 정수라면, 나머지 하나는
$-$정수 꼴이 될 것이다. (둘 다 정수인데 부호가 서로 반대라는 뜻)

따라서 이 경우는 정수가 두 개가 나온다. ⋯ (모순)

$g(n)$의 $h(n)$제곱근 중에서 하나가 정수가 아니라면, 나머지 하나는
$-$정수가 아닌 수 꼴이 될 것이다.

따라서 이 경우는 정수가 나오지 않는다. ⋯ (모순)

따라서 (I)인 경우는 모순이다.

2) (II)인 경우

이 경우는 $g(n)$의 $h(n)$제곱근이 한 개 나오게 되니까

그 하나가 정수이면 조건을 만족시킨다. ⋯ (정답 상황)

(II)인 경우에 정답이 나오므로 $g(n)$이 음수일 때만
다음 조건이 성립한다.

따라서 우리는 $g(n)$의 $h(n)$제곱근인 $\sqrt[3]{g(n)}$이

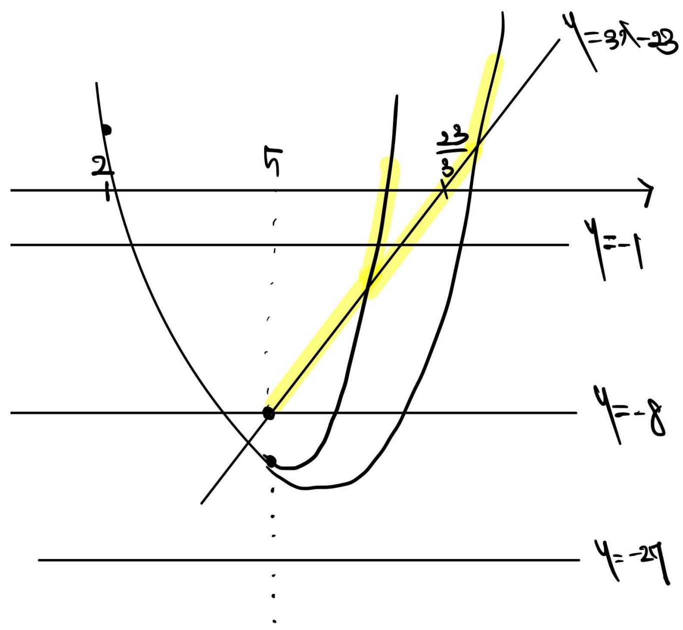
$\sqrt[3]{g(n)}=-1,\ -2,\ -3,\ \cdots\cdots$
$\Rightarrow\ g(n)=-1,\ -8,\ -27,\ \cdots\cdots$

를 만족시키는 자연수 n의 개수가 4라고 조건을 해석하면 된다.

$g(x)$의 그래프를 그리기 전에 나머지 조건을 몽땅 다 파악하자.

$h(2)=2$이므로 (I)에 의해 $g(2)>0$라는 것을 알 수 있고,
$f(5)<-8$라는 조건 또한 그래프를 그릴 때 고려한다면,

$g(x)$의 그래프를 대략적으로 다음과 같이 그릴 수 있다.



함수 $g(x)$가 $f(x)$와 $3x-23$ 중에서 큰 값이라는 말은

함수 $g(x)$가 아무리 작아야 $3x-23$라는 말과 같다.

즉 $x>\dfrac{23}{3}$일 때는 반드시 $g(x)>0$이다.

$g(n)=-1,\ -8,\ -27,\ \cdots\cdots$을 만족시키기 위해서는
일단 $g(n)$이 음수가 되어야 한다는 점을 생각하여 $g(n)$이 음수가
될 수 있는 자연수 n의 값을 모두 써보면, 위의 그래프에 의해

$n=3, 4, 5, 6, 7$뿐이고,

이 5개 중에서 4개의 자연수가
$g(n)=-1,\ -8,\ -27,\ \cdots\cdots$을 만족시킨다고 볼 수 있다.

케이스를 나누기 전에 위의 그래프를 조금만 더 유심히 살펴보면

일단 $n=5$일 때는 반드시 성립할 수 밖에 없다는 점을 안다.

그리고 $g(2)>0$임을 생각하면 $g(n)$의 최솟값이 아무리 작아야

$3\times2-23=-17$임을 알 수 있다.

따라서 $g(n)=-27, -64\cdots\cdots$의 실근은 존재하지 않는다.

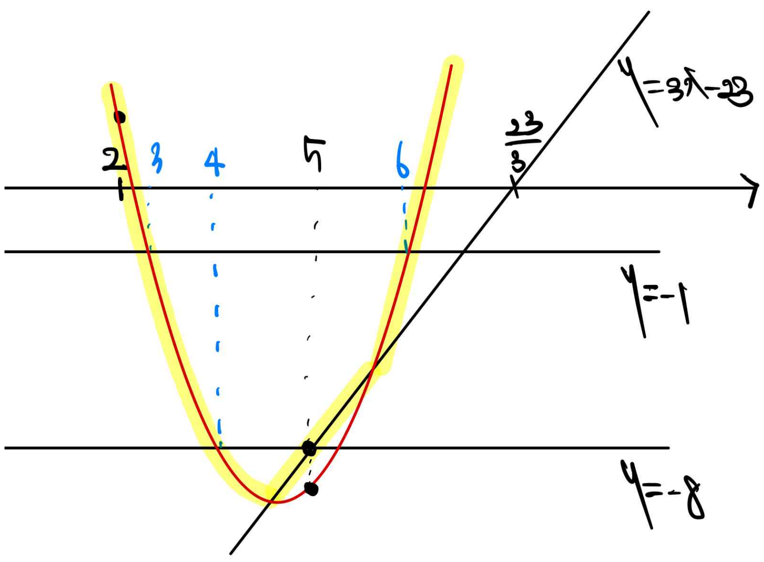
또한 $x>5$일 때부터는 $g(x)$가 증가할 수 밖에 없으므로
나머지 방정식인 $g(n)=-1$에서 실근 $n=6$, $n=7$이 모두 나올 수 없다는 것 또한 알 수 있다.

따라서 가능한 모든 n의 값의 경우를

$n=3, 4, 5, 6$, $n=3, 4, 5, 7$

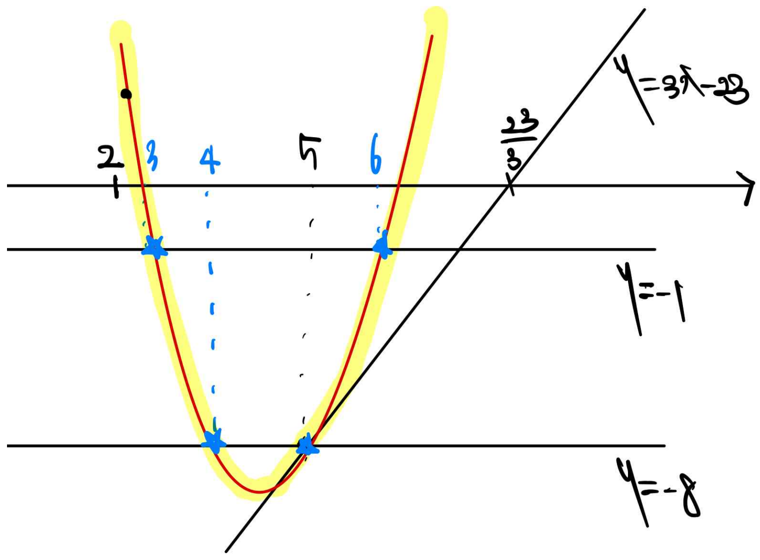
이렇게 두 가지로 나눌 수 있다.

i) $n=3, 4, 5, 6$인 경우



이런 식으로 대략적으로 그림을 그리면 왠지 될 것만도 같다.

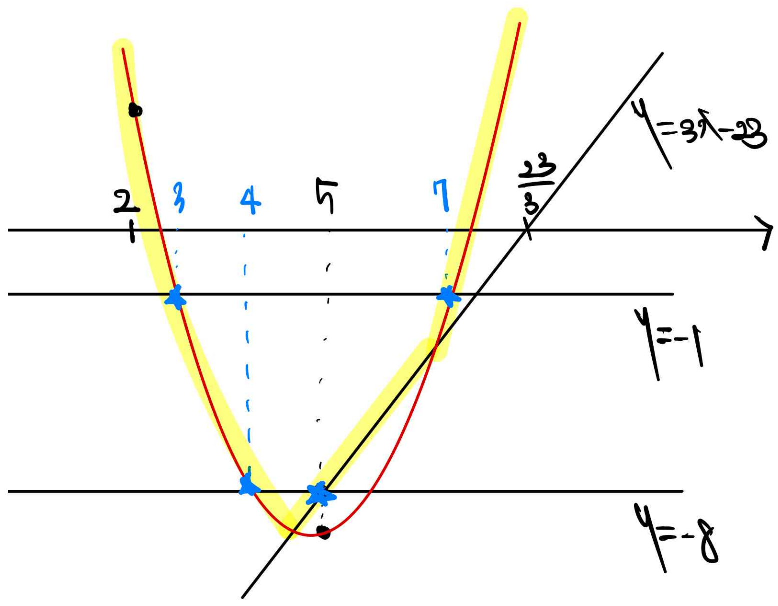
하지만 이차함수의 대칭성을 생각하여 다시 그래프를 그려주면,



이차함수 대칭축이 $x=\dfrac{9}{2}$가 되므로 $f(4)=f(5)=-8$이 되어서

$f(5)<-8$라는 조건에 위배된다. $\cdots$ (모순)

ii) $n=3, 4, 5, 7$인 경우



이번엔 $f(3)=f(7)=-1$이므로 $f(4)=f(6)=-8$가 되어
이차함수의 대칭축도 $x=5$로 $f(5)<-8$라는 조건을
만족시키게 된다. $\cdots$ (정답 상황)

이제 이차함수 $f(x)$와 함수 $h(x)$만 결정하면 된다.

$$f(x)=a(x-5)^2+b$$

$$f(4)=a+b=-8,$$
$$f(3)=4a+b=-1,$$
$$\Rightarrow a=\frac{7}{3},\ b=-\frac{31}{3}$$

이로써 $f(x)$는 $f(x)=\dfrac{7}{3}(x-5)^2-\dfrac{31}{3}$으로 결정이 되었다.

Funny Funny

$1 \le n \le 2$일 때, $g(n) > 0$이므로 $h(n) = 2$
$3 \le n \le 7$일 때, $g(n) < 0$이므로 $h(n) = 3$
$8 \le n \le 10$일 때, $g(n) > 0$이므로 $h(n) = 2$이다.

$x > 7$일 때, $f(x) > 3x - 23$이므로 $g(x) = f(x)$이다.

구하는 값인

$$g(10) + \sum_{k=1}^{10} h(k) = \left(\frac{7}{3} \times 25 - \frac{31}{3}\right) + (2 \times 2 + 3 \times 5 + 2 \times 3)$$
$$= 48 + 25 = 73$$이다.

공통 총평

공통 시험지는 전반적으로 매우 쉬웠다.
특히 공통 수학II 문항인 15번과 21번 모두 무난한 난이도로 출제되었다. 하지만 12, 13번과 같은 일반 4점 문항의 난이도가 작년 평가원에 비해 꽤 많이 올라가서 중상위권 학생들이 얼마나 풀 수 있는지 한 번 점검해 보기 좋을 것이라고 생각한다.
한편, 22번의 경우에는 완전 마이너한 단원에서 출제됨과 동시에 기존 거듭제곱근 문제의 형식과는 완전히 새로운 조건이 제시되어서 상당히 당황할 법하기에 정답률 자체는 낮았을 것이나 막상 문제에 들어가면 해석 난이도가 그렇게 어려운 문제는 아니었다. 낯선 조건도 쫄지 않고 해석해보면 좋겠다.

26번: ②

일단 비례식 조건을 이용하여 길이들을 각각

$$\overline{B_1D_1}=k,\quad \overline{B_1E_1}=2k,\quad \overline{OA_2}=5l,\quad \overline{OC_2}=4l$$

로 놓을 수 있다. 직사각형 평행 성질을 이용하면

$$\overline{OA_1}=2k+4l=5 \ \cdots\ (ㄱ),\quad \overline{OC_1}=k+5l=4\ \cdots\ (ㄴ)$$

$$2\times(ㄴ)-(ㄱ)=6l=3 \Rightarrow l=\frac{1}{2}$$

$$k+5\times\frac{1}{2}=4 \Rightarrow k=\frac{3}{2}$$

첫째항 $S_1=\overline{B_1D_1}\times\overline{B_1E_1}=\frac{9}{2}$이고 길이 비가 $1:l$이므로

넓이 비는 $1:l^2$이다. 따라서 공비 $r=\frac{1}{4}$이다.

$$\frac{\frac{9}{2}}{1-\frac{1}{4}}=6\text{이다.}$$

27번: ⑤

먼저 점 P의 좌표를 구해보자.

$$(\sin 2t)x=\sqrt{x^2-t^2}\geq 0\ \cdots\ (ㄱ)$$

$$\Rightarrow x^2(1-\sin^2 2t)=t^2 \Rightarrow x^2\cos 2t=t^2$$

$$\Rightarrow x=t\sec 2t \quad \because (ㄱ)$$

따라서 $P(t\sec 2t, t\tan 2t)$이다.

이제 $\frac{dy}{dx}$를 구해보자.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\tan 2t+2t\sec^2 2t}{\sec 2t+2t\sec 2t\tan 2t}$$

이 식에 $t=\frac{\pi}{8}$을 대입하면 $\dfrac{1+2\times\frac{\pi}{8}\times 2}{\sqrt{2}+2\times\frac{\pi}{8}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}(\pi+2)}{\pi+4}$이다.

28번: ①

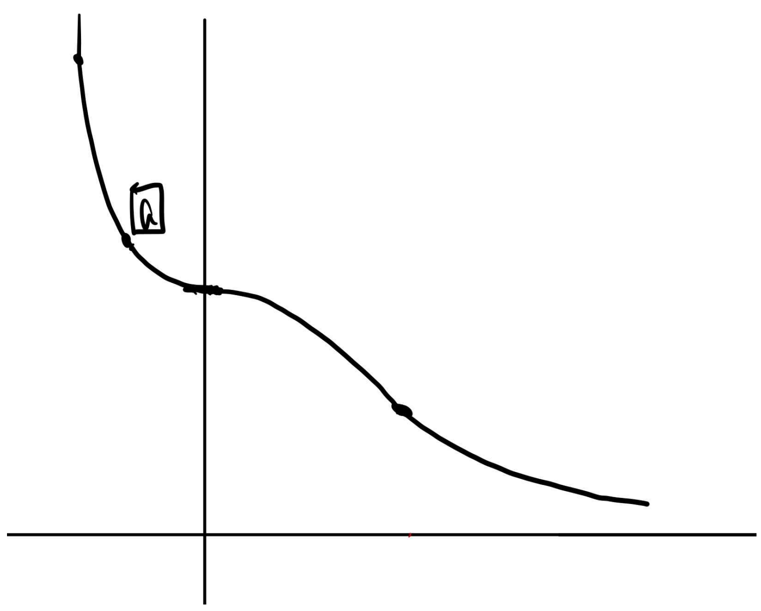
그래프를 그리기 위해서 $f(x)$를 미분해주면

$$f(x)=\frac{x^2+2x+2}{e^{x-a}}=(x^2+2x+2)e^{-x+a}$$

$$\Rightarrow f'(x)=(-x^2-2x-2)e^{-x+a}+(2x+2)e^{-x+a}$$

$$=-x^2e^{-x+a}\leq 0$$

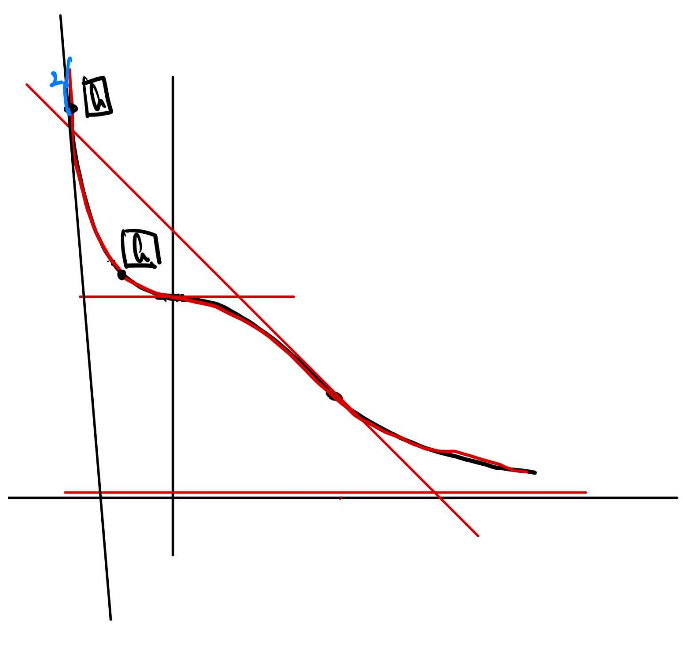
이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이와 같이 점 A의 위치를 임의로 잡고 조건을 만족시키는지 확인하면 된다.

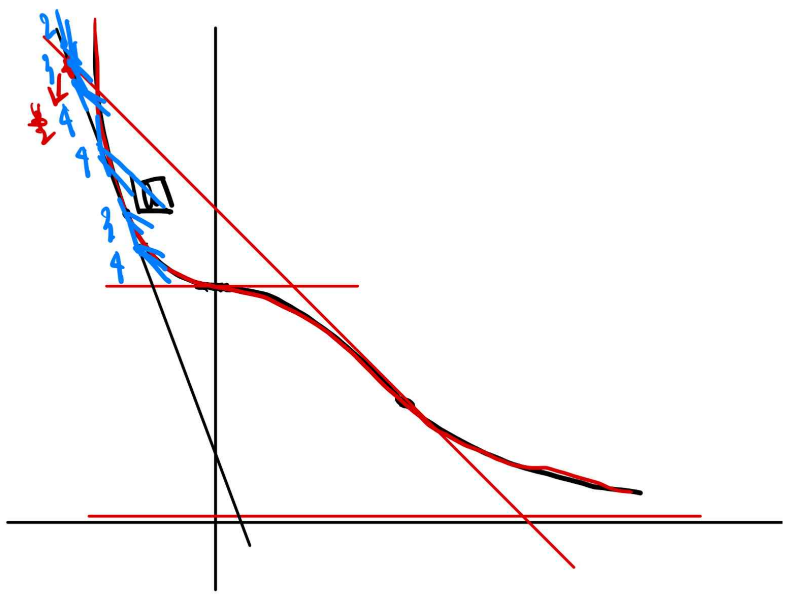
함수 $g(t)$의 값이 바뀌는 순간의 경계는 변곡접선과 점근선인데 그것을 지금부터 빨간 색 선으로 표시하고 $g(t)$가 불연속이 되는 경계를 잘 살펴보자.

먼저 $\lim_{t\to a} g(t)=4$가 성립해야 하므로 다음과 같은 케이스는 성립하지 않는다. $\because \lim_{t\to a} g(t)=2$



$\Rightarrow \therefore a>$(변곡접선과의 교점의 x좌표)

그 다음 a가 불연속의 최솟값이라는 점에 주목하면 다음과 같은 케이스는 성립하지 않는다.

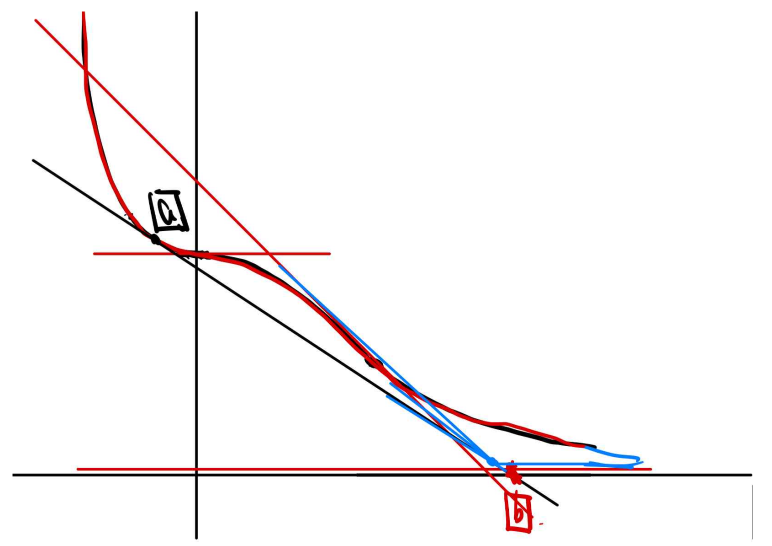


이를 통해 a에서의 접선의 기울기가 위와 같은 변곡접선의 기울기보다 가파르면 안된다는 사실을 얻을 수 있다.

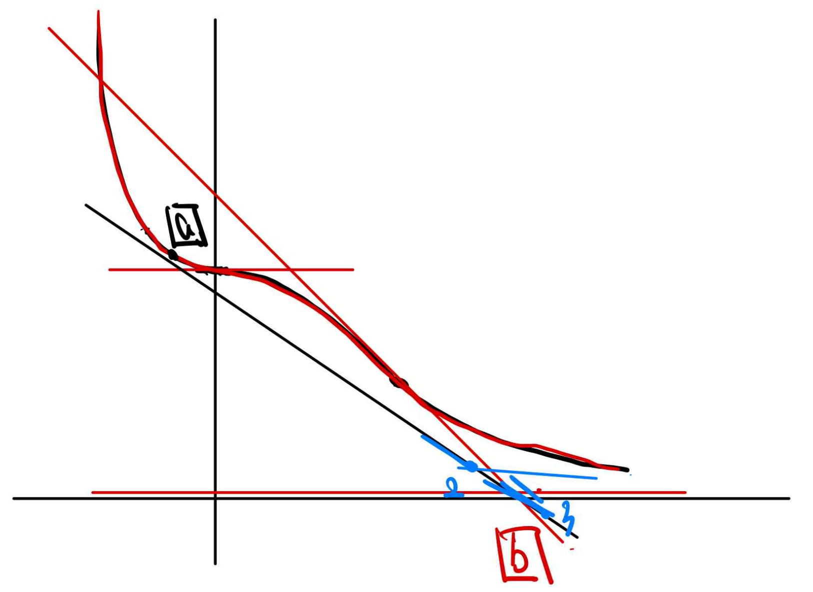
> **참고**
>
> 현재 문제에서 묻고 있는 것은 불연속 점의 최댓값과 최솟값 뿐이므로 그 사이에 있는 불연속 양상은 파악할 필요가 없다.

<참고>에 의해 최댓값 b가 위치할 수 있는 경우를 생각하여 전체 경우를 다음 네 가지 경우만으로 나눌 수 있다.

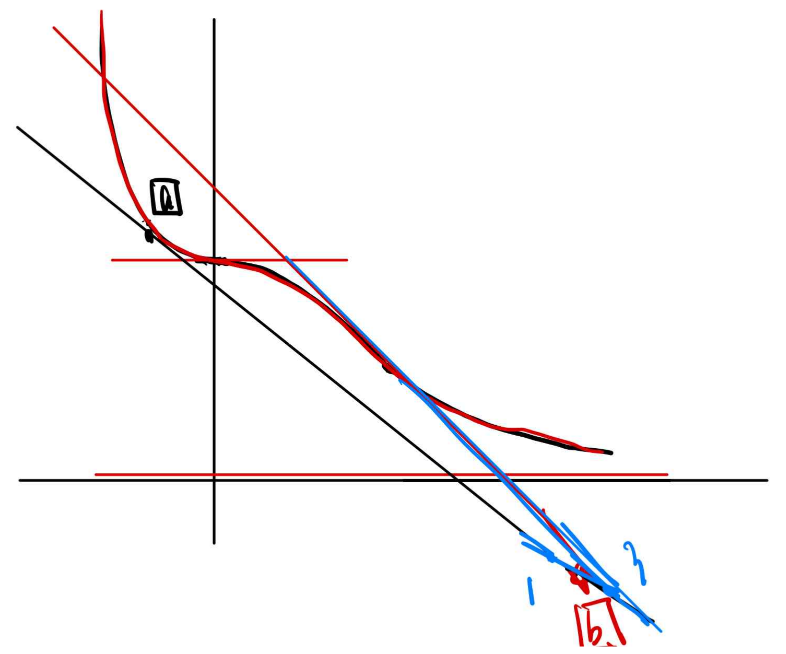
1)



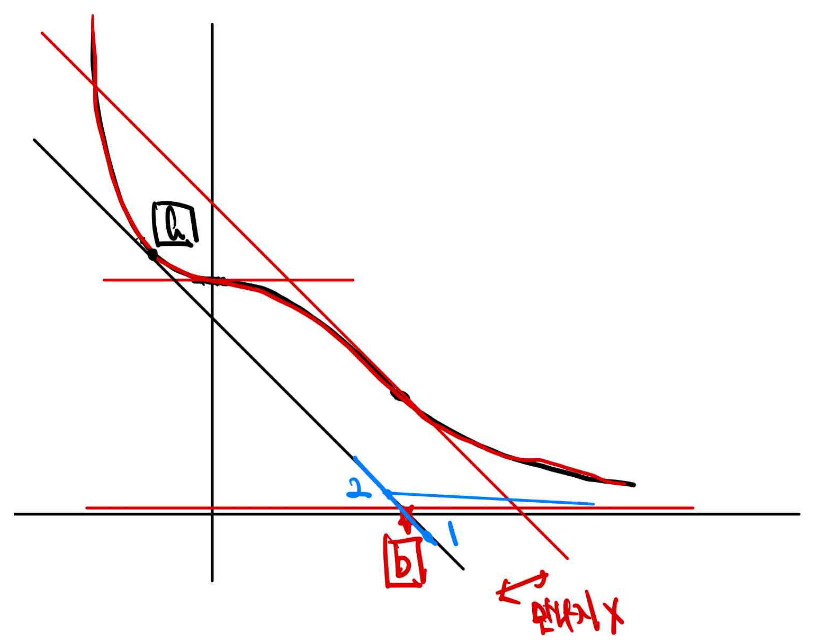
2)



3)



4)



1)의 경우에는 $\lim_{t\to b+} g(t)=3$, $\lim_{t\to b-} g(t)=4$이므로 성립하지 않는다.

2)의 경우에는 $\lim_{t\to b+} g(t)=3$, $\lim_{t\to b-} g(t)=2$이므로 성립하지 않는다.

3)의 경우에는 $\lim_{t\to b+} g(t)=3$, $\lim_{t\to b-} g(t)=1$이므로 성립하지 않는다.

4)의 경우에는 $\lim_{t\to b+} g(t)=1$, $\lim_{t\to b-} g(t)=2$이므로 성립한다.

즉, **변곡접선의 기울기와 a에서의 접선의 기울기가 일치할 경우가 정답 상황이라는 것이다.** $\cdots$ (ㄱ)

이제 $g(a)$와 $g(b)$의 값을 구해보자.

다음 그래프를 확인해보면, $g(a)=3$, $g(b)=1$임을 어렵지 않게 얻어 낼 수 있다.

$$\therefore\ g(a)g(b)=3$$

이제 $\left(\dfrac{b}{a+1}-1\right)e^a$의 값을 구해보자.

(ㄱ)에 의한 조건을 아직 사용하지 않았으므로 이 조건을 사용하기 위해 이계도함수를 구해주면,

$$f''(x)=x^2e^{-x+a}-2xe^{-x+a}=x(x-2)e^{-x+a}$$

이므로 변곡점의 x좌표 중 큰 것은 2라는 것을 알았다.

(ㄱ)에 의해 $f'(a)=f'(2)$이므로

$$f'(a)=f'(2)\ \Rightarrow\ -a^2=-4e^{a-2}$$

$$\Rightarrow\ \therefore\ \frac{e^a}{a^2}=\frac{e^2}{4}\quad\cdots\ (ㄴ)$$

b의 좌표는 $(a,f(a))$에서의 접선의 x절편이므로

$$y=-a^2(x-a)+a^2+2a+2$$

$$\Rightarrow\ 0=-a^2(b-a)+a^2+2a+2$$

$$\Rightarrow\ b=a+1+\frac{2}{a}+\frac{2}{a^2}$$

$$\Rightarrow\ \therefore\ \frac{b}{a+1}-1=\frac{2}{a^2}\quad\cdots\ (ㄷ)$$

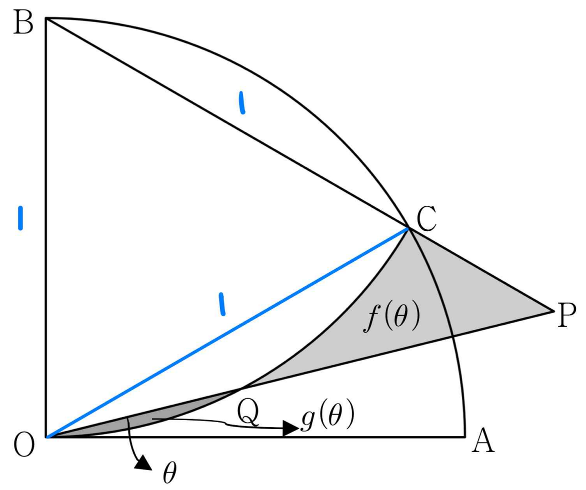
(ㄴ), (ㄷ)에 의해 $\left(\dfrac{b}{a+1}-1\right)e^a=\dfrac{2}{a^2}e^a=2\times\dfrac{e^2}{4}=\dfrac{e^2}{2}$이다.

구하는 값인 $g(a)g(b)\times\left(\dfrac{b}{a+1}-1\right)e^a=\dfrac{3}{2}e^2$이다.

Funny Funny

29번: 59

먼저 부채꼴 위에 점 C가 있으므로 중심으로부터 C를 잇는 보조선을 그어보자.



점 C는 중심이 B인 원 위의 점이기도 하기 때문에
삼각형 OCB은 각 변의 길이가 모두 1인 정삼각형이다.

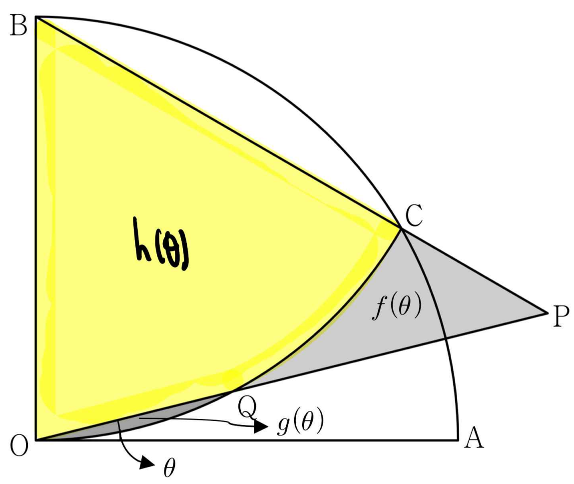
따라서 $\angle \mathrm{PBO}=\dfrac{\pi}{3}$이다.

이제 구하는 값을 보면

문제에서 원하는 것은 $f'(\theta)-g'(\theta)$임을 알 수 있다.

그런데 $f(\theta)$와 $g(\theta)$를 따로 따로 구해서 뺀다고 생각을 한다면
문제가 너무 복잡해지기에

$f(\theta)$와 $g(\theta)$를 구하기 위해 필요한 각도와 길이에 관한 정보를 최대한 줄여야 한다.



다음과 같이 노란색으로 색칠한 영역을 $h(\theta)$로 놓으면,
$f(\theta)-g(\theta)$를

$$f(\theta)-g(\theta)=(f(\theta)+h(\theta))-(g(\theta)+h(\theta))$$
$$=(\text{삼각형 OPB의 넓이})-(\text{부채꼴 BOC의 넓이})$$

로 바꿀 수 있다.

(삼각형 OPB의 넓이)$=S(\theta)$라 하고,

(부채꼴 BOC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times 1^2\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$

이므로 $f(\theta)-g(\theta)=S(\theta)-\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow f'(\theta)-g'(\theta)=S'(\theta)$이다.

$$\therefore f'(\alpha)-g'(\alpha)=S'(\alpha)$$

이제 $S(\theta)$를 구해보자.

삼각형 OPB에 대해서 지금 알고 있는 정보는

$$\overline{\mathrm{OB}}=1,\ \angle \mathrm{PBO}=\frac{\pi}{3},\ \angle \mathrm{BOP}=\frac{\pi}{2}-\theta,\ \angle \mathrm{OPB}=\frac{\pi}{6}+\theta$$

이다. $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times 1\times\overline{\mathrm{OP}}\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$로 구할 수 있고

$\overline{\mathrm{OP}}$는 사인법칙을 이용하여 구할 수 있다.

$$\frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}\Rightarrow\overline{\mathrm{OP}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}$$

$$\Rightarrow S(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}$$

이제 도함수를 구해보면

$$S'(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{-\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)-\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}$$

이다.

$$-\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)-\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)$$
$$=-\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\cos\theta+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\sin\theta\right)$$

이므로 덧셈정리에 의해 이 값은 $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

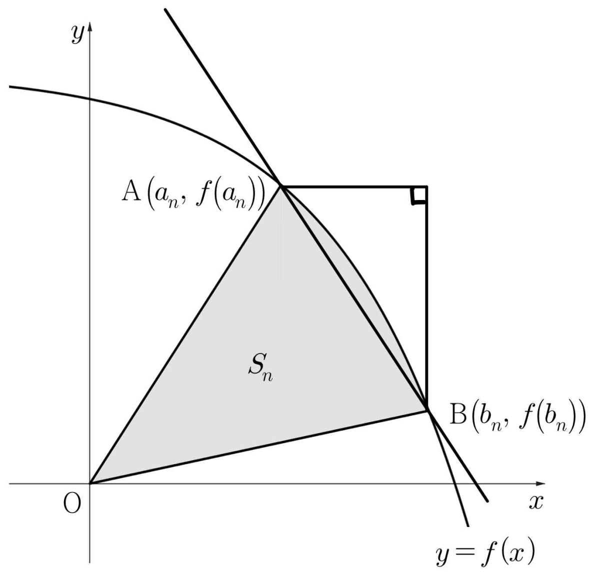
$$\therefore\ S'(\theta)=-\frac{3}{8}\times\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}$$

$$\Rightarrow S'(\alpha)=-\frac{3}{8}\times\frac{1}{\frac{4}{9}}=-\frac{27}{32}\Rightarrow p=32,\ q=27$$

$$\Rightarrow\ \therefore\ p+q=59\text{이다.}$$

30번: 50

먼저 직선 AB의 기울기 조건과 선분 AB의 길이 조건를 사용하기 위해 다음과 같이 보조선을 그어 보면,



(직선 AB의 기울기)$=-n$, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{1+n^2}$
$\Rightarrow$ 점 A, B의 x좌표 차: 1
점 A, B의 y좌표 차: n

임을 알 수 있고 이를 통해

$$b_n-a_n=1 \quad \cdots \text{ (I)}, \quad f(b_n)-f(a_n)=-n \quad \cdots \text{ (II)}$$

임을 알 수 있다.

이 관계식을 이용하여 주어진 식을 정리하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(b_n)^2-(a_n)^2}{f(b_n)-f(a_n)}=-20 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+1}{-n}=-20$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=10 \quad \cdots \text{ (i)}$$

$$(\text{구하는 값})=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{f(b_n)}{f(a_n)}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{f(a_n)-f(b_n)}{f(a_n)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{f(a_n)} \quad (\because \text{(I), (II)})$$

이제 S_n을 구해보자.

S_n을 직접적으로 구하기 위해서는
함수 $f(x)$를 구해서 적분해야 하는데, $f(x)$에 대한 정보는

$$f(0)>0, \quad f'(x)<0, \quad f''(x)<0$$

뿐이므로 $f(x)$를 직접 구할 수 없다.

대신 $f(x)$에 대한 정보를 통해 S_n을 부등식으로 나타내어 샌드위치 정리를 적용해야겠다는 생각을 할 수 있다.

먼저 $f''(x)<0$를 이용하면,

함수 $f(x)$는 위로 볼록인 함수임을 알 수 있다.

볼록성은 직선과의 위치 관계와 관련이 있다는 사실을 생각해보면

$$a_n \le x \le b_n \text{에서 } f(x) \ge (\text{직선 AB}) \quad \cdots \text{ (ㄱ)}$$

임을 알 수 있다.

다음으로 $f'(x)<0$를 이용하면,

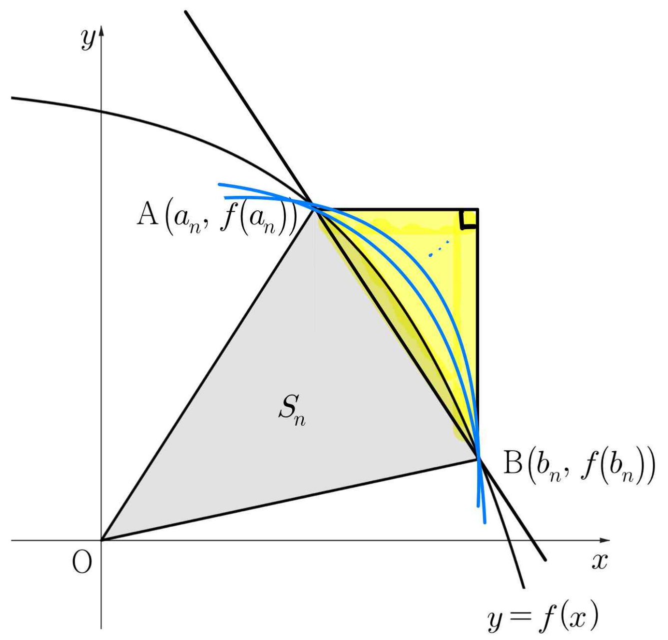
함수 $f(x)$는 감소함수임을 알 수 있고, 이를 이용한다면,

$$a_n \le x \le b_n \text{에서 } f(b_n) \le f(x) \le f(a_n) \quad \cdots \text{ (ㄴ)}$$

임을 알 수 있다.

이제 S_n에 대한 부등식을 세우기 위해 S_n과 가장 가까운 주변 도형인 삼각형 OAB를 T_n으로 놓으면,

(ㄱ)에 의해서는 $S_n > T_n$임을 알 수 있고
(ㄴ)에 의해서는 다음 그림을 함께 고려해 본다면,
$S_n < T_n + \dfrac{n}{2}$임을 알 수 있다.



이와 같이 파란선의 함수와 같이 감소함수이며 위로 볼록하기만 한다면 노란색으로 칠한 범위를 절대 벗어날 수 없다.

그 노란색 범위는 삼각형의 넓이인 $\frac{n}{2}$이므로

$S_n < T_n + \frac{n}{2}$이 성립하는 것이다.

$$\Rightarrow \therefore S_n - \frac{n}{2} < T_n < S_n$$

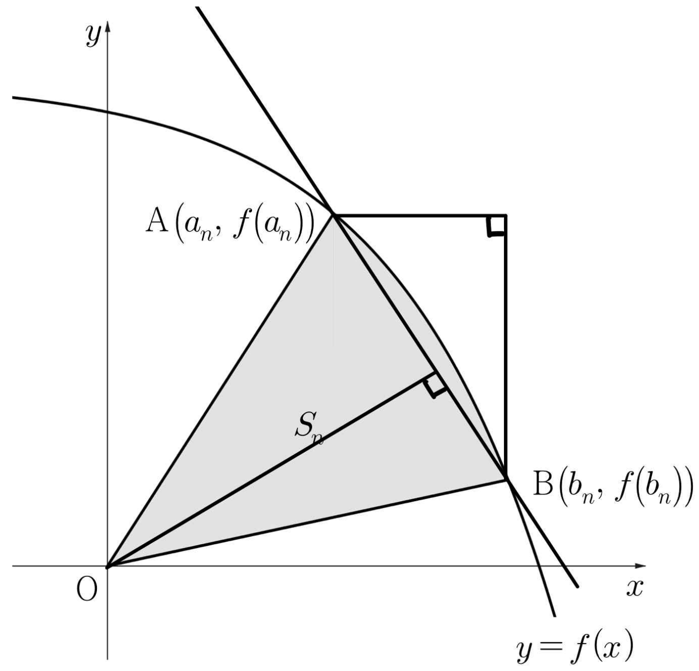
양변을 n^2으로 나누고 $n \to \infty$를 쓰면

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{n^2} - \frac{1}{2n}\right) < \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2} < \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$$

$$\Rightarrow 4 \le \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2} \le 4 \quad \Rightarrow \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2} = 4$$

이다.

이제 T_n을 구해보자.



다음 그림과 같이 원점에서 직선 AB에 수선의 발을 내리면,

$T_n = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times d$라고 쓸 수 있다.

직선 AB의 방정식은 $y = -n(x-a_n)+f(a_n)$이므로

$d = \frac{|na_n + f(a_n)|}{\sqrt{1+n^2}}$이고, $na_n + f(a_n)$의 부호를 따져보면

$na_n + f(a_n)$은 직선 AB의 y절편이다.

(ㄱ)에 의해 $a_n \le x \le b_n$에서 $f(x) \ge$(직선 AB)이지만
$x < a_n$에서는 $f(x)$의 볼록성에 의해 $f(x) <$(직선 AB)이다.

$x=0$일 때, $a_n > 0$이므로 $0 < f(0) <$(직선 AB의 y절편)이다.

따라서 $na_n + f(a_n)$는 양수이다.

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times d = \frac{1}{2} \times \sqrt{1+n^2} \times \frac{na_n + f(a_n)}{\sqrt{1+n^2}} \\ &= \frac{1}{2} \times (na_n + f(a_n)) \end{aligned}$$

로 정리가 되고 양변을 n^2으로 나누고 $n \to \infty$를 쓰면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2} = \frac{1}{2} \times \left(\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{n^2}\right) = 4$$

$$\Rightarrow \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{n^2} = -2 \quad (\because \text{(i)})$$

구하는 값인 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{f(a_n)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 100 \times \left|-\frac{1}{2}\right| = 50$이다.

미적분 총평

미적분 시험지는 매우 어려웠다. 문항 자체의 난도도 높은 편이라고 볼 수 있지만 체감 난도를 높인 가장 큰 요인은 바로 '낯섦'이라고 생각한다. 26번 프랙탈부터 30번까지 하나도 익숙한 느낌이 없고 낯선 문제만 가득하였다. 물론 경우에 따라서 기존 삼도극과 같은 기출문제를 빼먹지 않고 학습한 학생들은 29번에서 수월함을 느낄 수 있으나, 그렇지 못한 학생들은 상당히 어렵게 느낄 수 밖에 없다. 솔직히 출제자인 나도 이 정도의 시험지를 통해서는 현재 본인의 객관적인 미적분 실력을 판단하기 어렵다고 생각한다. 여기서 얼마나 틀리느냐에 너무 연연하지 말고 '낯선 시험지에 대한 값진 경험을 했다.' 정도로만 생각해도 무방하다. 만약 본인이 멘탈이 너무 나가서 오답 조차 하기 싫다고 한다면, 오답마저 안 해도 된다고 생각한다. 그럼에도 본인이 객관적인 미적분 실력을 굳이굳이 파악해보고 싶다면, 다음과 같이 정리할 수 있다.

(4점 기준)

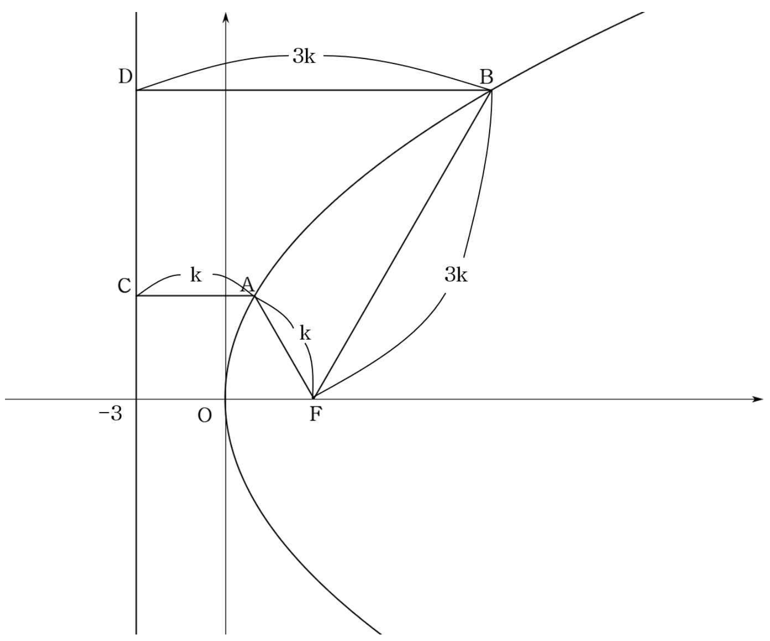
다 맞았다: 너는 논술로 의대를 가라
1개 틀렸다: 매우 잘하고 있다. 앞으로도 꾸준히 공부하면 수학 만점 받을 수 있을 것이다.
2개 틀렸다: 낫베드. 잘하고 있다. 최소한 기출문제는 꼼꼼히 보고 적용할 수 있는 실력을 갖춘 것.
3개 틀렸다: 약간 아쉽긴 하지만 그렇다고 확통(기하)런을 할 정도는 아니다. 희망의 끈을 놓지 말고 미적을 열심히 공부해보자.

Funny Funny

27번: ⑤

문제에서 포물선 위의 점 A와 B가 주어졌다. 포물선 위의 점이 주어지면 먼저 해야 할 일은 포물선 위의 점과 포물선의 준선까지 잇는 것이다. A, B에서 준선까지 이은 선분과 준선과의 교점을 각각 C, D라고 하자. 다음으로 해야 할 것은 나와 있는 길이 비를 표시하는 일이다. 길이 비가 1:3이라고 주어졌으므로 표시하도록 하자.

초점과 준선의 위치 역시 표시할 수 있다.



다음 조건으로는 $\angle\mathrm{AFO}$와 $\angle\mathrm{BFO}$의 관계가 나와 있다.

$\angle\mathrm{AFO}+\angle\mathrm{BFO}=\pi$만으로는 명확하게 의미하는 것이 무엇인지가 보이지 않는다. 따라서 식을 변형해보자.

$\angle\mathrm{AFO}=\pi-\angle\mathrm{BFO}$로 식을 변경하면 A에서 x축에 내린 수선의 발을 A′, B에서 x축에 내린 수선의 발을 B′라 할 때, $\angle\mathrm{AFA'}$과 $\angle\mathrm{BFB'}$의 각이 같다는 사실을 알 수 있다. 따라서 삼각형 AFA′과 삼각형 BFB′은 모두 직각삼각형이므로 AA 닮음 임을 알 수 있다. 즉 두 삼각형은 $1:3$ 닮음이므로 A′F과 FB와의 길이 비를 통해서 k값을 확정 지어보자.

$6-k:3k-6=1:3$ 따라서 $k=4$이므로

$\mathrm{A}(1,2\sqrt{3})$, $\mathrm{B}(9,6\sqrt{3})$임을 알 수 있다.

구해야 할 것은 AFB의 외접원의 반지름의 길이이므로

선분 AB의 길이와 $\angle\mathrm{AFB}$를 이용하여 사인법칙을 사용하자.

$\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{7}$, $\angle\mathrm{AFA'}$과 $\angle\mathrm{BFB'}$는 모두 $\frac{\pi}{3}$이므로

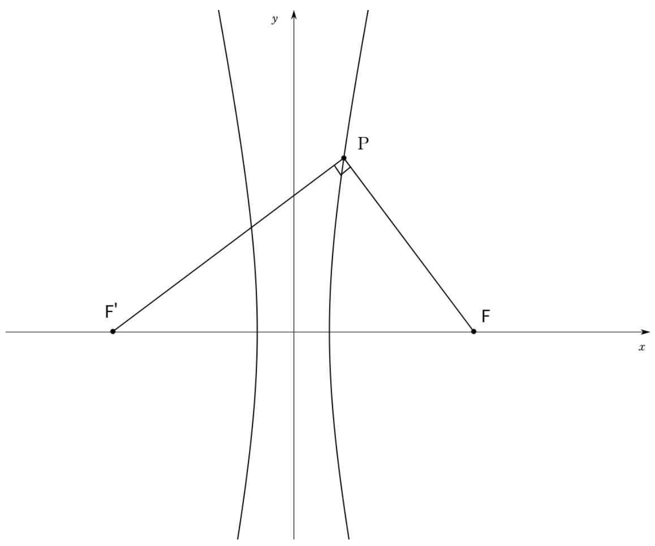
$\angle\mathrm{AFB}=\frac{\pi}{3}$이다. $\frac{4\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$ 이므로 $R=\frac{4\sqrt{21}}{3}$

문제 코멘트

특별할 거 없이 주어진 조건들을 전부 활용하면 풀리는 문제이다. 그나마 변별 포인트는 $\angle\mathrm{AFO}$와 $\angle\mathrm{BFO}$ 관계를 식 변형을 통해 $\angle\mathrm{AFA'}$과 $\angle\mathrm{BFB'}$의 관계로 바꾸는 작업이다. 그 후에는 세 각이 모두 60도임을 확인하고 항상 하던 대로 사인법칙.

28번: ①

문제를 읽어보면 쌍곡선 C 위의 점 P와 초점과의 관계가 나와있다. 쌍곡선의 초점의 좌표만이 나와 있으므로 이 조건을 엮어서 쌍곡선을 결정지어야 할 것으로 보인다.

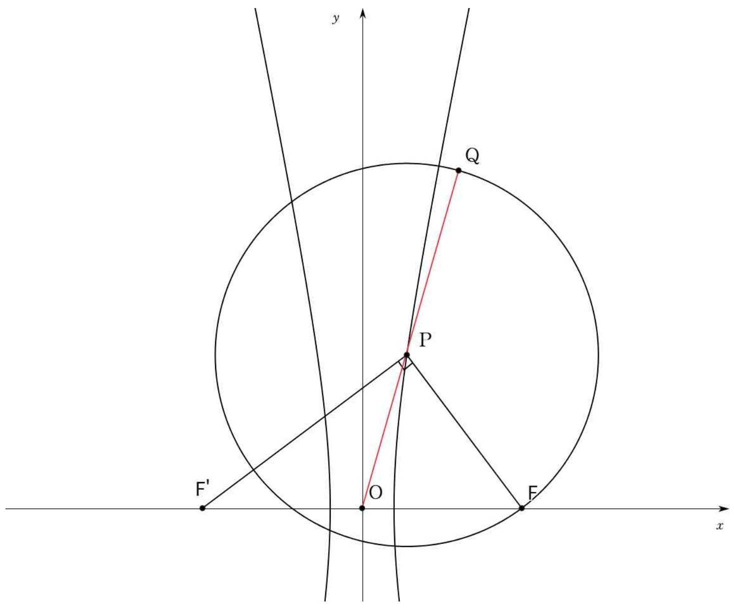


주어진 조건대로 그림을 그리면 다음과 같다. 이제 (가) 조건을 보도록 하자 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PF}}|$라 하였으므로 선분 PF의 길이와 같은 길이 위의 점, 즉 P를 중심으로 하고 점 F를 지나는 원의 자취가 Q의 자취라는 사실을 알 수 있다. (나) 조건의 경우 F와 F′의 중점이 원점 O임이 명확함으로 $|\overrightarrow{\mathrm{QF}}+\overrightarrow{\mathrm{QF'}}|=2|\overrightarrow{\mathrm{QO}}|$로 바꾸어 생각해보자. 따라서 선분 QO 길이의 최댓값은 11이다.

그러면 선분 QO의 길이가 최댓값인 상황은 어떤 상황일까?

그림과 같이 점 Q, P, O가 일직선 위에 있게 되는 상황일 때가 선분 QO 길이의 값이 최대가 되게 된다.

(단, Q는 제1사분면 위에 존재할 때)



삼각형 F'PF는 직각삼각형이다. 따라서 선분 FO의 길이와 PO의 길이는 5로 같다. 즉 선분 QP의 길이는 6이다. $\overline{FF'}=10$, $\overline{PF}=6$ 이므로 피타고라스에 의해서 선분 PF'의 길이는 8이다.

즉 $\overline{PF'}-\overline{PF}=2a$ $2a=2$이다. 따라서 쌍곡선 C의 주축의 길이는 2이다.

문제 코멘트

(가) 조건을 통해 점 Q가 원의 자취임을 파악한 후, 직각삼각형을 이용하여 선분 FO와 PO가 같음을 보였으면 선분 QP의 길이를 통해 선분 FP의 길이를 구할 수 있다. 피타고라스로 PF'의 길이를 구한 후 쌍곡선의 정의를 활용하면 되는 문제였다. 이렇게 두 개의 단원을 엮어서 문제를 내는 경우는 어렵지 않게 출제된다.
겉보기 난이도에 지레 겁먹지 말고 주어진 대로만 진행해보도록 하자.

29번: 8

타원 C에 대한 단축의 길이만 주어졌다. 따라서 타원의 방정식을 결정할 수는 없는 상황이다. 타원을 결정하기 위해서 A에서 그은 접선의 접점이 P, P'이라는 사실과 선분 PP'의 길이가 $4\sqrt{2}$라는 사실을 이용해야 할 것으로 보인다.

선분 PP'의 중점을 M이라 할 때 선분 PM의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 점 P의 좌표를 $(k, 2\sqrt{2})$라고 둘 수 있다.

타원의 장축의 길이를 $2a$라 하면 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$이라 할 수 있다. 점 P는 타원 위의 점이므로 $\dfrac{k^2}{3}+\dfrac{8}{a^2}=1$이 성립한다. 또한, 접점공식을 활용하면 점 P에서의 접선의 방정식은 $\dfrac{k}{3}x+\dfrac{2\sqrt{2}y}{a^2}=1$이다. 이 접선이 $A(3, 0)$를 지나므로 $k=1$ 임을 알 수 있다. 따라서 $a^2=12$이므로 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{12}=1$이라고 결정지을 수 있다.

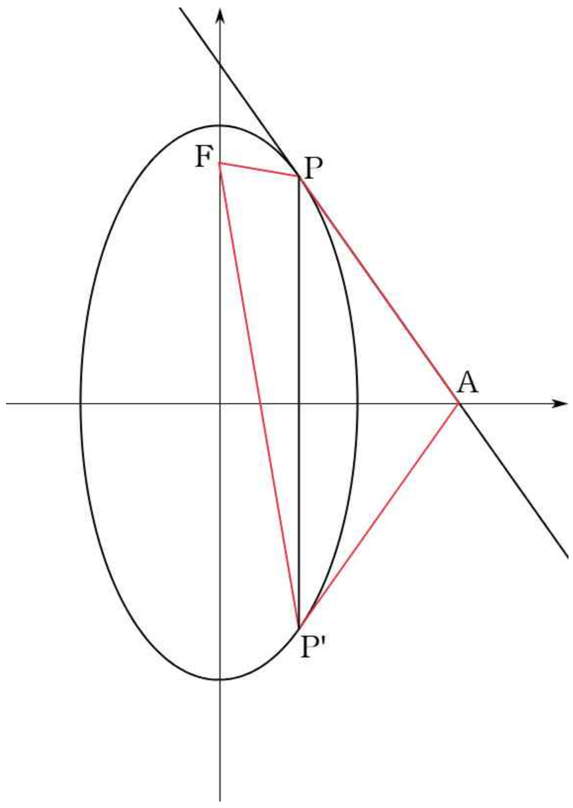
구해야 하는 것은 사각형 PFP'A 의 둘레의 길이이다. 삼각형 PMA의 길이 중 $\overline{PM}=2\sqrt{2}$, $\overline{MA}=2$ 를 알고 있으므로 피타고라스를 이용하면 $\overline{PA}=2\sqrt{3}$임을 알 수 있다. 선분 PA와 P'A 는 대칭이므로 두 선분의 합은 $4\sqrt{3}$이다. 선분 PF와 P'F의 길이의 합은 타원의 대칭성을 통해 타원의 장축 길이와 같음을 알 수 있다. 따라서 타원의 장축 길이는 $4\sqrt{3}$,

구하고자 하는 사각형 PFP'A의 둘레의 길이는

$4\sqrt{3}+4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ 따라서 a의 값은 8이다

Funny Funny

참고



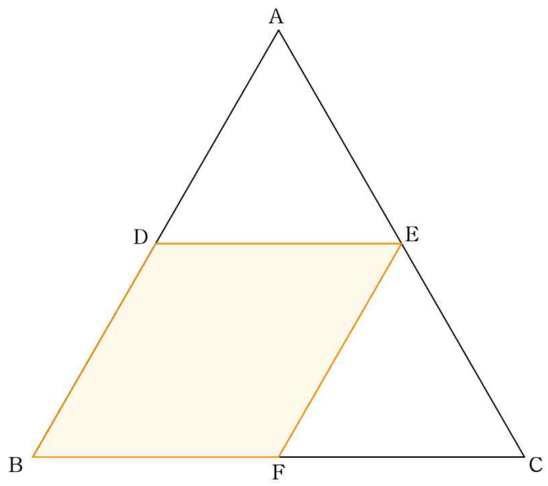
문제 코멘트

> 타원의 방정식이 직접 주어지지 않고 식을 세워 찾아내야 하는 문제이다. 현재 기조상 29번 이차곡선 문제에서 이차곡선의 식을 직접 주지 않고 찾아내어 연립해야 하는 문제가 많이 출제되는 만큼 잊어서는 안 되는 주제이다. 그 후에는 타원의 대칭성을 활용하면 길이 관계를 쉽게 파악하여 답을 구해낼 수 있다.

30번: 669

주어진 도형은 간단해 보이지만 (가), (나) 조건은 까다로워 보인다. 하나씩 해석해 보도록 하자. (가) 조건에서 P점의 자취를 줬다. 따라서 P점의 자취를 그려보는 것이 우선일 것이다.

선분 AB의 중점을 D, 선분 AC의 중점을 E, 선분 BC의 중점을 F라 할 때, (가) 조건에 의해서 점 P는 평행사변형 BFED의 둘레 또는 내부에 있는 점이다.

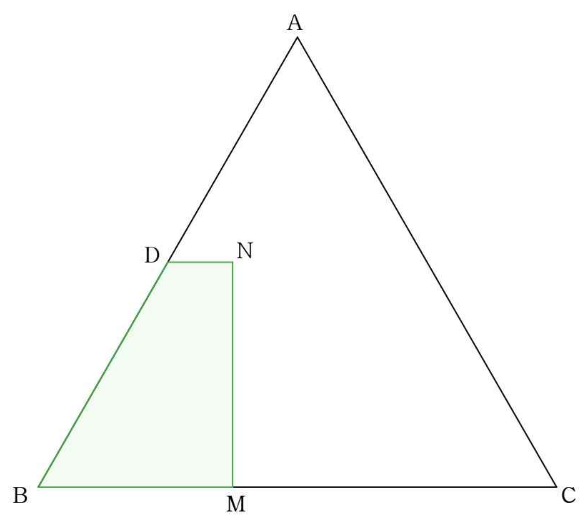


(나) 조건은 복잡해 보인다. 우선 생각해 봐야 할 점은 비슷한 벡터가 존재하느냐인데 $\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{AP}$는 관련성이 있어 보인다.

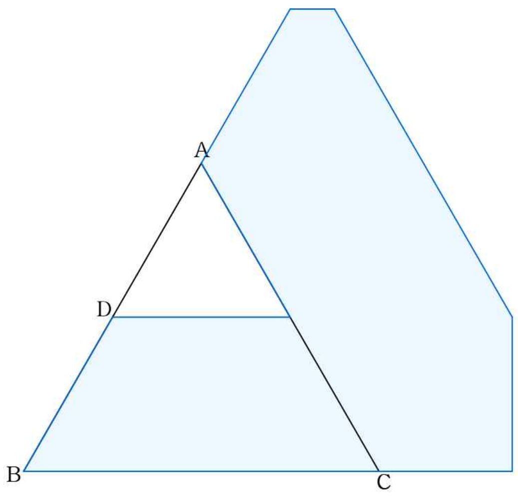
시점이 전부 P이므로 $\overrightarrow{AP}$의 시점을 P로 바꿔보도록 하자.

그러면 $\overrightarrow{PA}$로 묶을 수 있다.

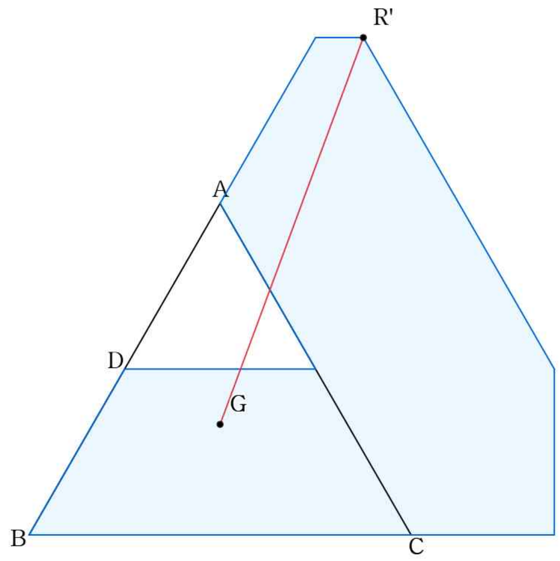
$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB})=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}\geq 8$ 따라서 (가), (나) 조건을 전부 만족하는 P의 자취는 다음과 같다.



이제 점 R의 자취를 구해보도록 하자. 점 R은 점 P의 자취를 점 Q의 자취만큼 이동시킨 도형의 자취이다.



따라서 파란색 면적만큼의 자취를 갖는다. 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때 $|\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{BR}+\overrightarrow{CR}|^2=9|\overrightarrow{GR}|^2$ 따라서 R의 자취 중에서 점 G와의 거리의 최댓값을 구하면 된다. 최댓값을 가질 때의 R을 R′이라 할 때 다음과 같은 상황일 때가 $\overrightarrow{GR'}$이다.



따라서 $9|\overrightarrow{GR'}|^2=9\times\left\{\left(\frac{14}{\sqrt{3}}\right)^2+9\right\}=588+81=669$

문제 코멘트

도형의 자취를 파악하는 것이 중요한 문제였다. 30번인 만큼 조건해석이나 도형의 자취를 그리는 것이 까다롭긴 하나 주어진 대로 따라가면 어려운 문제는 아니었을 것이다. 이러한 기출문제는 많이 출제되었기 때문에 만약 이 문제가 어려웠다면 반복하여 기출학습을 하도록 하자.

기하 총평

〔원작자 Comment〕

기하의 난이도는 전반적으로 쉽다. 25수능과 25학년도 6평에 비해서 모두 쉬우며 25학년도 9평보다 살짝 어려운 정도이다.
기하 27번의 경우에는 포물선의 정의를 이용하여 길이 비를 사용하면 쉽게 닮음 삼각형 2개가 보이게 되고, 이를 이용하면 어렵지 않게 해결이 가능했을 것이다.
28번의 경우에는 이차곡선과 벡터의 단원 결합 문제지만 어렵지 않았을 것이다. 선분 PF의 길이를 구하는 것이 관건이었는데, 점 Q가 원의 자취임을 파악했으면 그 후에는 늘 하던 대로 진행하면 되는 문제였다.29번의 경우에는 타원의 방정식이 직접 주어지지 않았으므로 스스로 미지수를 놓고 작성을 하여야겠다는 생각이 들어야 한다. 점 P 역시 미지수가 필요하지만, 이 과정대로 진행하다 보면 미지수가 전부 결정되는 상황이 나오게 되고 그 뒤에는 타원의 대칭성을 활용하여 해결할 수 있다. 30번의 경우에는 (가) 조건과 (나) 조건을 해석하고 나면 각 도형의 자취를 그려낼 수 있을 것이다. 그 후에 삼각형의 무게중심과의 거리의 최댓값을 잡아내면 해결할 수 있을 것이다. 계산량은 있지만, 현재 기하 30번에서 긴 계산을 요구하는 문제가 출제되고 있으므로
이 정도까진 대비할 수 있도록 하자.

〔공통, 미적 제작자 Comment〕

원작자의 Comment는 2026수능 6월 모평 대비 즉, 2025년 6월 전에 작성하신 것이므로 제가 대신 Comment를 이어서 작성하겠습니다. 더 덧붙일 말은 특별한 것이 아니라 최신 26학년도 시험지와 비교한 난이도 측정에 관한 것인데요.

이 시험지는 26학년도 6평보다는 어렵고
26학년도 9평과 수능보다는 쉬운 정도입니다.