풀이1 : 눈치코치

점 $A(a,b)$를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(b,a)$라 하자. 직선 OB위에 점 A'이 있으므로 점 B의 좌표를 (kb,ka)정도로 잡을 수 있다.

점 $A(a,b)$가 $y=\log_{16}(8x+2)$ 위에 있으므로 좌표를 대입하면

$$b=\log_{16}(8a+2)\ ,\ 16^b=8a+2 \ \cdots\cdots \ ①$$

을 얻을 수 있고, 점 $B(kb,ka)$가 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 위에 있으므로

$$ak=4^{bk-1}-\frac{1}{2} \ \cdots\cdots \ ②$$

이다. ①번 식을 센스있게 변형시켜주면

$$8a=16^b-2\ ,\ 2a=4^{2b-1}-\frac{1}{2}$$

로 바꿀 수 있다. 이 식을 ②식과 비교하면 $k=2$임을 알아낼 수 있다.

점 A의 좌표는 (a,b)이고 점 B의 좌표는 $(2b,2a)$이므로 선분 AB의 중점이 $\left(\frac{77}{8},\frac{133}{8}\right)$임을 이용하여 a와 b를 구하며 풀이는 끝이 납니다.

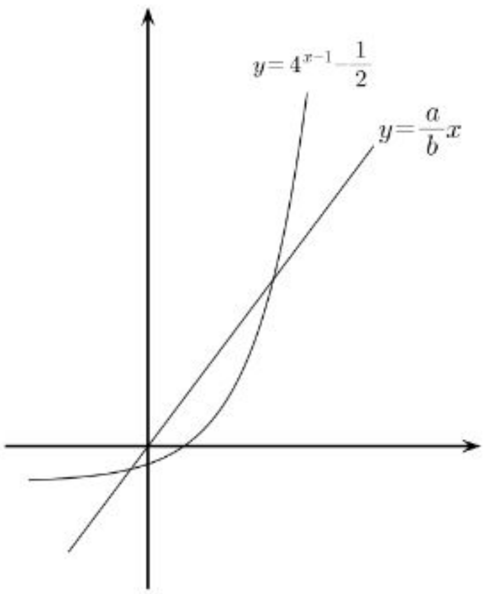
※ k**가 2이외에 다른 값은 안될까?** 라는 의문이 생겨야 정상이다.

위의 식을 문장으로 풀어보면

$y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 의 근이 (bk, ak)와 $(2b, 2a)$이다.

라고 표현이 가능하겠다. (bk, ak)와 $(2b, 2a)$을 지나는 직선은 $y=\frac{a}{b}x$이므로

$y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 와 $y=\frac{a}{b}x$의 관계에 대해 파악해보자.



$y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 의 점근선은 $y=-\frac{1}{2}$이고 $y=\frac{a}{b}x$는 $(0,0)$을 항상 지나므로 두 그래프는 두 점에서 만난다는 것을 알 수 있다. 한 점은 제 3사분면에서 다른 한 점은 제 1사분면에서 만난다. 여기서 점 B가 제 1사분면 위에 있다는 조건이 있으므로 $k=2$가 유일합니다.

풀이2 : 2026학년도 6월모의고사 22번과 비교해보기

$y=\log_{16}(8x+2)$ 위의 점 $A(a,b)$를 $y=x$ 대칭이동하기 때문에 그래프 자체를 $y=x$ 대칭시키면

$$8y=16^x-2 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

이고 이 그래프는 점 $A'(b,a)$의 자취이다.
점 B의 자취는 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 이므로 상수항을 맞추기 위해 ①식의 양변을 4로 나누어주면

$$2y=4^{2x-1}-\frac{1}{2}$$

이다. 이 식을 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 과 비교하면

x대신 $2x$, x축 방향으로 $\frac{1}{2}$배

y대신 $2y$, y축 방향으로 $\frac{1}{2}$배

임을 알 수 있다. 즉 **점 A'의 좌표는 점 B의 x좌표와 y좌표를 모두 $\frac{1}{2}$배** 해서 얻은 값이므로 점 B의 좌표는 $(2b,2a)$이다.