29. 상수 $k(0<k<4)$와 자연수 n에 대하여

$0<x<\frac{2n+1}{2}\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{k}{4n}$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 큰 것과 가장 작은 것의 차를 a_n이라 하자. 상수 p에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\tan\frac{a_n}{2}+(-1)^n\right\}=p$$

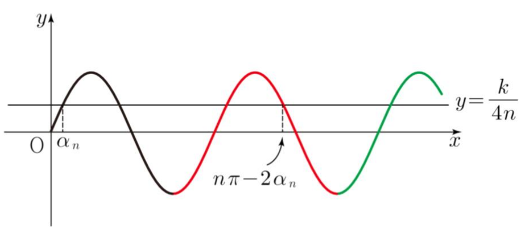
일 때, $k+p$의 값을 구하시오. [4점]

- 풀이 -

구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $\sin x$와 $\frac{k}{4n}$가 만나는 점의 x좌표를 α_n이라 하자. 즉, $\sin\alpha_n=\frac{k}{4n}$이다.

주어진 x값의 경계가 $\frac{2n+1}{2}\pi$이므로 n의 값이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어서 생각해 보자.

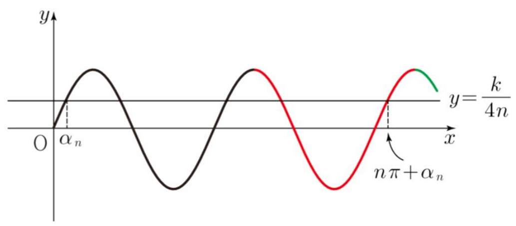
i) n이 홀수인 경우



(그림 오탈자 $n\pi-2\alpha_n\to n\pi-\alpha_n$)

주어진 구간이 그림에서 (빨간색) 단위로 변하므로 젤 큰 x좌표는 $n\pi-\alpha_n$이다. 따라서 $a_n=n\pi-2\alpha_n$이다.

ii) n이 짝수인 경우



주어진 구간이 그림에서 (빨간색) 단위로 변하므로 젤 큰 x좌표는 $n\pi+\alpha_n$이다. 따라서 $a_n=n\pi$이다.

정리하면 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\begin{cases} n\pi-2\alpha_n & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ n\pi & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

주어진 극한도 n이 짝수일 때와 홀수일 때로 나눠서 생각하자.

i) n이 홀수인 경우

$$\tan\frac{a_n}{2}=\tan\left(\frac{n\pi}{2}-\alpha_n\right)$$
$$=\frac{1}{\tan\alpha_n}$$
$$=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{k}{4n}\right)^2}}{\frac{k}{4n}}=4n\times\frac{\sqrt{1-\left(\frac{k}{4n}\right)^2}}{k}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\tan\frac{a_n}{2}+(-1)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\times\frac{4n}{k}\times\sqrt{1-\left(\frac{k}{4n}\right)^2}+(-1)\right\}$$
$$=\frac{4}{k}-1$$

이다.

ii) n이 짝수인 경우

$$\tan\frac{a_n}{2}=\tan\left(\frac{n\pi}{2}\right)=0\quad(\because n\text{은 짝수})$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\tan\frac{a_n}{2}+(-1)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\times 0+(1)\right\}=1$$

이다.

주어진 극한이 모든 자연수 n에 대해 수렴해야 하므로
n이 홀수인 경우와 짝수인 경우에 극한값이 모두 p이다.

$$\frac{4}{k}-1=1=p,\quad \therefore k=2,\ p=1$$

$\therefore$ (구하는 값) $=k+p=2+1=3$

이다.