6평대비

HALO

2027
헤일로
모의고사

수학 영역

정답 및 해설

Preview

파란 지음

‘헤일로(Halo)’는
빛이 만들어내는 후광,
즉 빛의 고리를 의미합니다.

2027학년도
헤일로 모의고사
Preview

정답 및 해설

1회 정답 및 해설

빠른 정답

번호	정답	번호	정답
공통			
01	②	12	④
02	④	13	③
03	①	14	②
04	②	15	③ 풀이 확인
05	①	16	14
06	⑤	17	3
07	③	18	12
08	③	19	16
09	②	20	37
10	①	21	105 풀이 확인
11	⑤	22	53 풀이 확인
확률과 통계		미적분	
23	①	23	④
24	④	24	⑤
25	②	25	①
26	③	26	③
27	⑤	27	②
28	④	28	④
29	7	29	4
30	935 풀이 확인	30	7 풀이 확인

풀이 확인 이라고 적힌 문제는 맞았어도 해설을 읽어보길 바랍니다.

예상 등급컷

	확률과 통계	미적분
1등급	86-84	86-84
2등급	79-78	78-76
3등급	70-69	72-70

총평

공통 NORMAL

헤일로 Preview 1회 공통 과목은 작년 수능의 기조를 최대한 반영하고자 했습니다. 수능과 유사한 유형을 바탕으로 하되, 문항마다 차별점을 두어 학습할 요소가 있도록 구성했습니다.

특히 21번의 극한 유형과 22번의 지수·로그함수 유형은 최근 평가원에서 반복적으로 다루어지고 있는 주제입니다. 정답을 맞혔더라도 풀이를 반드시 확인하며, 출제 의도와 접근 방식을 함께 정리해 두시기 바랍니다.

확률과 통계 NORMAL

헤일로 Preview 1회 확률과 통계 과목은 낯선 발문을 해석하고, 주어진 조건을 계산하기 좋은 형태로 바꾸어 내는 능력을 평가하고자 했습니다.

28번은 조건부확률을 만족하는 상황을 해석하는 것이 핵심이었고, 30번은 조건 (가), (나)를 모두 만족하는 상황을 경우의 수를 세기 편한 구조로 변형하는 것이 중요했습니다. 이러한 문항은 정답을 맞추는 것에서 끝내기보다, 문제를 어떤 관점에서 바라보아야 하는지 반드시 정리해 두는 것이 필요합니다.

미적분 EASY

헤일로 Preview 1회 미적분 과목은 낯선 발상보다는, 익숙한 조건 속에서 출제 의도를 빠르게 읽어내는지가 중요했습니다.

28번은 발문의 조건이 비교적 직접적으로 제시되어 있었으므로 계산 과정에서 실수하지 않는 것이 중요했고, 30번은 미분계수를 떠올리는 아이디어가 핵심이었습니다. 최근 평가원 기출 역시 번뜩이는 직관보다는, 주어진 상황을 엄밀하게 분류하고 끝까지 계산해 내는 힘을 요구하는 경우가 많습니다. 수능 전까지 자신의 계산 실력을 점검하고, 안정적으로 마무리하는 연습을 이어가시기 바랍니다.

Comment 서울대학교 메디컬, 25수능 미적 96점

공통은 26수능처럼 21, 22번을 제외하면 전반적으로 무난했습니다. 21번은 최근 기출에서 자주 다뤄진 극한 조건 덕분에 비교적 빠르게 접근할 수 있었지만, 22번은 기출의 지수·로그 킬러보다도 까다로워 조건의 활용 방향성을 잡는 데 시간이 많이 소모되었습니다.

확률과 통계는 계산량이 많은 문제와 아이디어를 요구하는 문제가 함께 있어 변별력이 있었습니다. 특히 30번은 여사건을 활용해야 한다는 단서가 직관적으로 보이지 않아 체감 난도가 높았습니다.

미적분은 30번을 제외하면 평이했습니다. 30번은 최근 기출(260628, 260928)들과 유사하다고 느꼈고, 두 번 미분해도 조건을 바로 쓸 수 없어 미분계수의 정의를 활용해야 한다는 점이 인상 깊었습니다.

공통

13
If 조건은 다 구한 것 같은데 뭘 해야 할지 모르겠다.
Hint 이차함수 $f(x)$의 식을 직접 구해보자. 조건 3개만 있으면 이차함수의 식을 완성할 수 있다.

14
If 조건을 다 이용한 것 같은데 선분 AC의 길이를 구하지 못했다.
Hint 코사인법칙을 이용해 선분 AC가 포함된 식 2개를 세운 후 연립해 보자.

15
If $g(x)$의 식에 절댓값이 있어서 해석이 어렵다.
Hint 정적분으로 정의된 함수이므로 우선 미분한 뒤, $x=0$을 기준으로 범위를 나누어 생각하자.

If $y=f(x)$의 그래프의 개형을 알아내지 못했다.
Hint $y=f(x)$의 그래프로 가능한 개형을 몇 가지 그려보고, 직선 $y=kx$를 움직이며 $4 \leq k \leq 5$를 만족하는 상황을 생각해 보자.

20
If 박스 (가)를 채우지 못했다.
Hint S_n+na_n을 차례대로 나열하며 더해보자.

21
If 조건 (가)를 해석하지 못했다.
Hint 모든 실수 a에 대하여 극한값이 존재하려면 (분모)$\to 0$일 때 (분자)$\to 0$이어야 한다.
우선 분모가 0이 되는 상황을 살펴보자.

If 조건 하나를 어디서 찾아야 할지 모르겠다.
Hint $g(x)$는 구간별 함수이다. $x=0$일 때도 조건 (가)가 성립하는지 확인해 보자.

22
If 기하적인 관계를 찾지 못해 포기했다.
Hint 주어진 조건을 대수적으로 해석해 보자.

If x절편이 -2인 직선이 의미하는 바를 찾지 못했다.
Hint 직선을 $y=m(x+2)$로 두고 곡선 $y=\dfrac{8^x}{k}$와 연립해 보자.

확률과 통계

28
If 모든 공의 개수의 합이 10이라는 조건을 해석하지 못했다.
Hint 시행을 1번 했을 때 들어가는 공의 개수를 살펴보자.

If 공의 개수가 같다는 조건을 해석하지 못했다.
Hint 2가 적힌 상자와 3이 적힌 상자에 들어가는 공의 개수가 서로 같은 시행과 다른 시행을 살펴보자.

29
If 남아 있는 공의 색의 가짓수가 2라는 조건을 해석하지 못했다.
Hint 한 가지 색깔의 공은 전부 꺼내야 한다는 뜻이다. 경우를 나누어 살펴보자.

30
If 조건 (가)를 해석하지 못했다.
Hint 숫자 2가 적힌 카드 세 장을 먼저 배열한 뒤, 그 사이사이에는 어떤 카드들이 얼마나 배열되어야 할지 생각해 보자.

If 조건 (나)를 해석하지 못했다.
Hint 서로 이웃한 카드에 적힌 숫자의 합이 4가 되지 않는 경우를 찾아서 여사건으로 계산하자.

미적분

28
If $h(k)=g'(k)$를 어떻게 이용해야 할지 모르겠다.
Hint 역함수 미분법을 이용해 보자.

If $h'(k)=0$을 어떻게 이용해야 할지 모르겠다.
Hint 알고 있는 역함수와 원함수에 대한 항등식을 미분하여 역함수의 이계도함수에 대한 식을 얻어보자.

29
If $n(A\cap B)=3$을 어떻게 이용해야 할지 모르겠다.
Hint 집합 A의 원소와 집합 B의 원소의 부호를 생각하며 $n(A\cap B)=3$의 의미를 이해해 보자.

30
If 항등식을 어떻게 해석해야 할지 모르겠다.
Hint 항등식의 양변을 한 번 미분한 식과 두 번 미분한 식 모두 항등식임을 이용하자.

If $f'(0)=2$를 어떻게 이용해야 할지 모르겠다.
Hint 미분계수의 정의를 생각해 보자.

공통

01
10~20초
지수법칙

풀이

$$\begin{aligned} 4^{1-\sqrt{2}} \times 2^{2\sqrt{2}-1} &= 2^{2-2\sqrt{2}} \times 2^{2\sqrt{2}-1} \\ &= 2^{(2-2\sqrt{2})+(2\sqrt{2}-1)} = 2 \end{aligned}$$

정답 ②

02
10~20초
미분계수

풀이

$$f(x)=x^3-3x^2+2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = f'(3) = 9$$

정답 ④

03
10~20초
수열의 합 일반항

풀이

$$\sum_{k=1}^{8}(a_k+2)=\sum_{k=1}^{8}k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{8}a_k+16=\frac{8\cdot 9}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{8}a_k=36-16$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{8}a_k=20$$

정답 ①

04 ●●● 10~20초
함수의 연속

풀이

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$x=1$에서의 좌극한과 우극한을 비교하자.

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x) \Rightarrow 6=3+a$$
$$\Rightarrow a=3$$

정답 ②

05 ●●● 20~30초
미분계수 곱의 미분법

풀이

$$f(x)=(2x-1)(x^2-3x+3)$$
$$\Rightarrow f'(x)=2(x^2-3x+3)+(2x-1)(2x-3)$$

$\therefore\ f'(1)=2\cdot1+1\cdot(-1)=1$

정답 ①

06 ●●● 20~30초
로그의 성질

풀이

$\log_a 2b=3 \Rightarrow 2b=a^3$ …… ㉠

$$\log_2\frac{2b}{a^2}=\log_2\frac{a^3}{a^2}=2$$
$$\Rightarrow \log_2 a=2 \Rightarrow a=4$$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$$2b=64 \Rightarrow b=32$$

이다.

$\therefore\ \log_8 ab=\log_8 128=\log_{2^3}2^7=\dfrac{7}{3}$

정답 ⑤

07 ●●● 30~40초
접선의 방정식

풀이

$$y=x^3-8x+6 \Rightarrow y'=3x^2-8$$

즉, 곡선 위의 점 $(0, 6)$ 에서의 접선의 기울기는

$$3\cdot 0^2-8=-8$$

이므로 접선의 방정식은

$$y=-8x+6$$

이다.

$\therefore$ (접선의 x 절편) $=\dfrac{3}{4}$

정답 ③

08 ●●● 30~40초
삼각함수의 성질 각변환

풀이 1

$$8\sin\theta=3\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow 8\sin\theta=3-3\sin^2\theta \quad (\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$$

$$\Rightarrow 3\sin^2\theta+8\sin\theta-3=0$$

$$\Rightarrow (3\sin\theta-1)(\sin\theta+3)=0$$

$$\Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{3} \quad (\because -1\le\sin\theta\le 1)$$

이때

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta<0$$

이므로

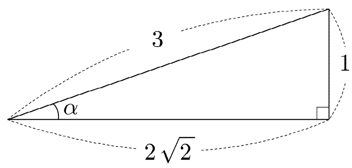
$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\frac{8}{9} \Rightarrow \cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이다.

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

풀이 2

풀이 1 에서 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$, $\cos\theta<0$ 임을 구한 후 다음과 같이 빗변의 길이가 3, 높이가 1 인 직각삼각형을 생각해 답을 구할 수도 있다.



$$\therefore \tan\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \tan\theta=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(\because \sin\theta>0,\ \cos\theta<0)$$

정답 ③

Insight

θ 가 예각이 아니더라도 직각삼각형을 활용해 계산을 줄일 수 있습니다. 이때 θ 가 예각이 아닐 수도 있다는 점을 기억하며 삼각비의 부호에 집중합시다.

09

●●● 1~2분

넓이 (정적분)

풀이

$A+C=B$ 이므로 이를 정적분으로 나타내면

$$\int_0^3 \{(x^2-2x+1)-mx\}dx = A-B+C=0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+2)x^2+x\right]_0^3=0$$

$$\Rightarrow 9-\frac{9}{2}(m+2)+3=0$$

$$\Rightarrow m+2=\frac{8}{3}$$

이다.

$$\therefore\ m=\frac{2}{3}$$

정답 ②

Insight

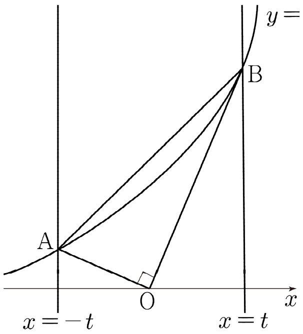
작년 6월과 재작년 6월, 9월, 수능에 모두 출제된 단골 유형입니다. 이러한 유형은 넓이 여러 개를 합쳐 하나의 정적분으로 나타내는 것이 중요합니다. 이 문제의 경우 곡선이 직선보다 위에 있는 부분인 A, C와 곡선이 직선보다 아래에 있는 부분인 B의 넓이가 같다는 점을 이용해 하나의 정적분 식으로 표현하는 것이 중요했습니다.

10 ●●● 1~2분

지수함수 그래프 도형 해석

풀이

먼저 두 점 A, B를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



정의에 따라 두 점 A, B의 좌표는

$$A(-t,\ 2a^{-t}),\quad B(t,\ 2a^{t})$$

이다. 이때 두 직선 OA, OB가 서로 수직임을 이용하면

$$\frac{2a^{-t}}{-t}\times\frac{2a^{t}}{t}=-1$$

$$\Rightarrow t^2=4 \Rightarrow t=2\ (\because\ t>0)$$

이다. 이제 삼각형 OAB의 넓이가 5임을 이용하여 a의 값을 구하면 된다.

(삼각형 OAB의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-t)^2+(2a^{-t})^2}\cdot\sqrt{t^2+(2a^t)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4+4a^{-4}}\cdot\sqrt{4+4a^4}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{4a^4+4}}{a^2}\cdot\sqrt{4+4a^4}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4+4a^4}{a^2}=5$$

편의상 $a^2=X(a>1,\ X>1)$이라고 치환하고 풀이하자.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4+4X^2}{X}=5$$

$$\Rightarrow 2X^2-5X+2=0$$

$$\Rightarrow (2X-1)(X-2)=0$$

$$\Rightarrow X=2\ (\because\ X>1)$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{2}\ (\because\ a>1)$$

$$\therefore\ a\times t=\sqrt{2}\times 2=2^{\frac{3}{2}}$$

정답 ①

11 ●●● 1~2분

속도와 거리 ㄱㄴㄷ

풀이

ㄱ. $v(2)=12-18+6=0$ (참)

ㄴ. 시각이 $t\,(t\geq 0)$일 때 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면 $v(t)$를 부정적분하여 $x(t)$를 구할 수 있다.

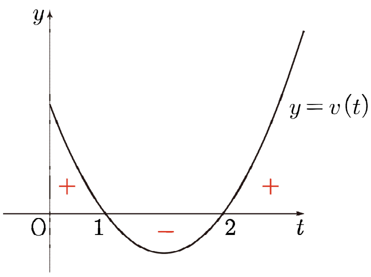
$$v(t)=3t^2-9t+6 \Rightarrow x(t)=t^3-\frac{9}{2}t^2+6t$$

($\because$ 원점에서 출발하므로 $x(0)=0$)

$\therefore$ ($t=2$일 때 점 P의 위치) $=x(2)=2$ (참)

ㄷ. 점 P의 속도 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 $v(t)=0$일 때를 살펴보자.

$$v(t)=3t^2-9t+6=0 \Rightarrow 3(t-1)(t-2)=0$$
$$\Rightarrow t=1 \text{ 또는 } t=2$$



따라서 점 P가 두 번째로 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=2$이므로 구하고자 하는 거리는 $\int_0^2 |v(t)|dt$이다.

이제 닫힌구간 $[0,\,2]$에서 $v(t)$의 부호를 이용하여 답을 구하자.

$$\therefore \int_0^2 |v(t)|dt$$
$$=\int_0^1 v(t)dt+\int_1^2 \{-v(t)\}dt$$
$$=\left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_0^1-\left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{5}{2}-0\right)-\left(2-\frac{5}{2}\right)=3 \text{ (참)}$$

정답 ⑤

12 ●●● 2~4분

수열의 합

풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})=2\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}+15$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{5}(a_{2k}-a_{2k-1})=15$$
$$\Rightarrow 5d=15 \Rightarrow d=3$$

이다.[1] 이제 $a_2=a_1+3$임을 이용하여 a_1의 값을 구하자.

$$a_1+a_2=a_1+a_1+3=6$$
$$\Rightarrow a_1=\frac{3}{2}$$

$$\therefore a_6=a_1+5d=\frac{33}{2}$$

정답 ④

PLUS

1) $\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})$로 변형하지 않고

$$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=2a_1+2a_3+\cdots+2a_9+15$$
$$\Rightarrow (a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{10}-a_9)=15$$
$$\Rightarrow 5d=15 \Rightarrow d=3$$

과 같이 나열해 d의 값을 구해도 좋다.

13 ●●● 1~2분

접선의 방정식

풀이

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$$l : y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

이다. 또한, 곡선 $y=xf(x)$ 에서
$y'=f(x)+xf'(x)$ 이므로 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선 m 의 방정식은

$$m : y=\{f(1)+f'(1)\}(x-1)+f(1)$$

이라 할 수 있다. 이를 바탕으로 조건 (가)를 해석하면

$$\begin{aligned}&(\text{직선 } l \text{ 의 } y \text{ 절편}) = -f'(1)+f(1)\\&(\text{직선 } m \text{ 의 } y \text{ 절편}) = -f(1)-f'(1)+f(1) = -f'(1)\\&\quad\Downarrow\\&-f'(1)+f(1)-\{-f'(1)\}=-4\\&\Rightarrow f(1)=-4 \quad \cdots\cdots \text{㉠}\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 또, 조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 m 이 모두 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned}&f(-1)=0, \quad \cdots\cdots \text{㉡}\\&\{f(1)+f'(1)\}(-1-1)+f(1)=0\\&\Rightarrow -f(1)-2f'(1)=0\\&\Rightarrow f'(1)=2 \ (\because \text{㉠}) \quad \cdots\cdots \text{㉢}\end{aligned}$$

이고, ㉠, ㉢을 이용하여 이차함수 $f(x)$ 의 식을 세우면

$$f(x)=a(x-1)^2+2(x-1)-4 \ (a\neq 0 \text{인 상수})$$

이다. 이 식에 ㉡을 대입하여 답을 구하자.

$$\begin{aligned}&f(-1) = 4a-8 = 0\\&\Rightarrow a=2\\&\Rightarrow f(x)=2(x-1)^2+2(x-1)-4\end{aligned}$$

$$\therefore \ f(3) = 2\cdot 2^2+2\cdot 2-4 = 8$$

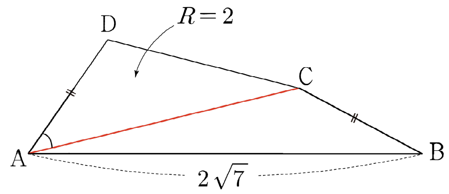
정답 ③

14 ●●● 5~10분

사인법칙 코사인법칙

풀이

먼저 주어진 조건을 도형에 표시해 보면 다음과 같다.[1)]



구하는 값이 $\overline{AC}$ 이므로 선분 AC 가 포함된 두 삼각형 ABC, ACD 의 변과 각에 대한 정보를 얻어내면 된다.

삼각형 ACD 의 외접원의 반지름의 길이가 2 이고 $\angle DAC$ 를 알고 있으므로 사인법칙을 쓰면 $\overline{CD}$ 를 구할 수 있다.

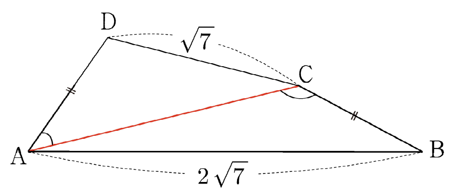
$$\begin{aligned}&\sin^2(\angle DAC)+\cos^2(\angle DAC)=1\\&\Rightarrow \sin^2(\angle DAC)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\\&\Rightarrow \sin(\angle DAC)=\frac{\sqrt{7}}{4} \quad \left(\because \ 0<\angle DAC<\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\overline{CD} = 2\cdot 2\cdot \sin(\angle DAC) = \sqrt{7}$$

또, 두 삼각형 ABC, ACD 의 넓이가 같음을 이용하면

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\sin(\angle DAC) = \frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\sin(\angle BCA)\\&\Rightarrow \sin(\angle DAC) = \sin(\angle BCA) \quad (\because \ \overline{AD}=\overline{BC})\\&\Rightarrow \sin(\angle BCA)=\frac{\sqrt{7}}{4} \quad \cdots\cdots \text{㉠}\end{aligned}$$

이다. 이후 풀이의 방향성을 알기 위해 두 삼각형 ABC, ACD 에서 아는 변과 각을 표시해 보자.



삼각형 ABC 에서는 $\angle$BCA 에서 코사인법칙을 통해 선분 AC 에 대한 정보를 얻을 수 있고,

삼각형 ACD 에서는 $\angle$DAC 에서 코사인법칙을 통해 선분 AC 에 대한 정보를 얻을 수 있다.

따라서 두 삼각형 ACD, ABC 에서 각각 코사인법칙을 써 보자. 편의상 $\overline{AD}=\overline{BC}=x$, $\overline{AC}=y\,(x>0,\ y>0)$ 라 하고 삼각형 ACD 에서 코사인법칙을 쓰면

$$\overline{AD}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\cos(\angle DAC)=\overline{CD}^2$$
$$\Rightarrow\ x^2+y^2-2\cdot\frac{3}{4}xy=7\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

이다. 다음으로 삼각형 ABC 에서 코사인법칙을 쓰면

$$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AC}\cdot\cos(\angle BCA)=\overline{AB}^2$$
$$\Rightarrow\ x^2+y^2-2\cdot\cos(\angle BCA)\cdot xy=28$$

이다. 이때 ㉠에 의해

$$\cos^2(\angle BCA)=1-\sin^2(\angle BCA)$$
$$\Rightarrow\ \cos(\angle BCA)=\pm\frac{3}{4}$$

인데 만약 $\cos(\angle BCA)=\frac{3}{4}$ 이라면

$$x^2+y^2-2\cdot\cos(\angle BCA)\cdot xy=28$$
$$\Rightarrow\ x^2+y^2-2\cdot\frac{3}{4}xy=28$$

이므로 ㉡에 모순이다.

따라서 $\cos(\angle BCA)=-\frac{3}{4}$ 이고

$$x^2+y^2-2\cdot\cos(\angle BCA)\cdot xy=28$$
$$\Rightarrow\ x^2+y^2+2\cdot\frac{3}{4}xy=28\quad\cdots\cdots\ ㉢$$

이다. 이제 ㉡과 ㉢을 연립해서 답을 구하자.

$$\begin{cases}\dfrac{㉡+㉢}{2}\ \Rightarrow\ x^2+y^2=\dfrac{35}{2}\\[2ex]\dfrac{㉢-㉡}{3}\ \Rightarrow\ xy=7\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}(x+y)^2=\dfrac{35}{2}+2\cdot7=\dfrac{63}{2}\\[2ex](x-y)^2=\dfrac{35}{2}-2\cdot7=\dfrac{7}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}x+y=\dfrac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\\[2ex]y-x=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\quad(\because\ \overline{AC}>\overline{BC})\end{cases}$$

$$\therefore\ 2y=\frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{14}\ \Rightarrow\ y=\sqrt{14}$$

정답 ②

PLUS

1) 그림에서 R은 삼각형 ACD 의 외접원의 반지름을 뜻한다.

15 ●●●★ 10~15분

정적분 절댓값 함수

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 양수 k에 대하여 함수

❶❷ $$g(x)=\int_0^x t\times(f(t)-k|t|)dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때 $f(1)$의 값은? [4점]

> 함수 $g(x)$가 ❸ 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 ❹ k의 값의 범위는 $4\le k\le 5$이다.

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

SCAN

기출 표현

❶ 정적분으로 정의된 함수

양변에 $x=0$을 대입하고 양변을 미분해 볼 수 있다.

❷ 절댓값이 포함된 함수

절댓값 안의 식의 값이 0일 때를 기준으로 범위를 나누어야겠다.

❸ 실수 전체의 집합에서 증가

모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\ge 0$임을 알 수 있다.

낯선 표현

❹ 만족하는 k의 값의 범위

k의 값의 범위가 한정적인 이유가 있을 것이다.

범위에서 양 끝의 값($k=4$, $k=5$)을 위주로 살펴보자.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

FLOW 1 범위를 나누어 함수 해석하기

주어진 $g(x)$ 의 식에 $x=0$ 을 대입하고, 미분하면

기출 표현 ❶

$g(0)=0$, $g'(x)=x\times(f(x)-k|x|)$

절댓값 안의 식의 부호에 따라 범위를 나누어 생각하자.
$g'(x)$ 의 식에 $|x|$ 가 있으므로

기출 표현 ❷

$x=0$ 을 기준으로 범위를 나누면

함수 $g'(x)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$g'(x)=\begin{cases} x\times(f(x)+kx) & (x<0) \\ x\times(f(x)-kx) & (x\geq 0) \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이때 주어진 조건에서

기출 표현 ❸

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가

$\Rightarrow$ 모든 실수 x 에 대하여 $g'(x)\geq 0$

이므로 이를 만족하려면 ㉠에서

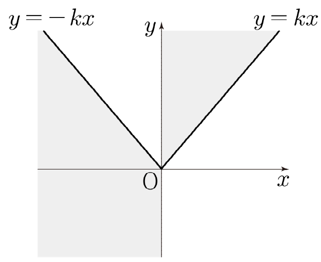
$$\begin{cases} x<0 \text{ 일 때 } f(x)+kx\leq 0 \\ x\geq 0 \text{ 일 때 } f(x)-kx\geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<0 \text{ 일 때 } f(x)\leq -kx \\ x\geq 0 \text{ 일 때 } f(x)\geq kx \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

여야 함을 알 수 있다.

FLOW 2 k 의 값의 범위로 그래프 개형 파악하기

FLOW 1 의 ㉡을 만족하는 상황을 생각해 보자.
$k>0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 가 그려지는 영역은 다음과 같다.



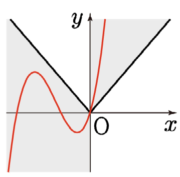
곡선 $y=f(x)$ 가 그려지는 영역을 보면 곡선 $y=f(x)$ 가 원점을 지나야 하므로

$f(0)=0$

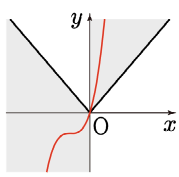
이고, $x\geq 0$ 에서 직선 $y=kx$ 보다 아래에 있지 않아야 하므로

$f'(0)\geq k$

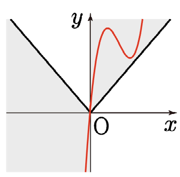
이다. 즉, 위 영역에서 그릴 수 있는 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 생각해 보면 다음과 같은 개형들을 떠올릴 수 있다.



[그림 1]



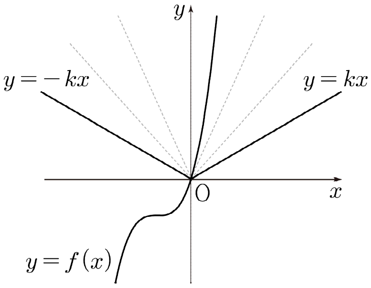
[그림 2]



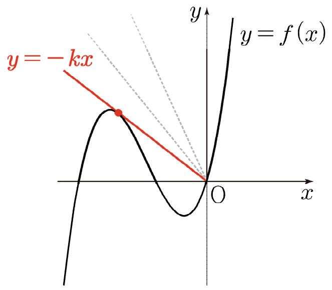
[그림 3]

모두 $x\geq 0$ 인 부분에서는 항상 $f(x)\geq kx$ 이므로 k 의 최솟값이 결정되지 않는다. 즉, 최솟값은 $x<0$ 인 부분에서 결정된다.

이때 [그림 2], [그림 3]과 같이 곡선 $y=f(x)$ 가 제2사분면을 지나지 않는 경우는 $x<0$ 에서 항상 $f(x)\leq -kx$ 이므로 k 의 최솟값이 존재하지 않는다.



따라서 곡선 $y=f(x)$는 [그림 1]과 같이 제2사분면을 지나야 하고, 곡선 $y=f(x)$가 $x<0$에서 직선 $y=-kx$와 접할 때 k의 값이 최소가 된다.



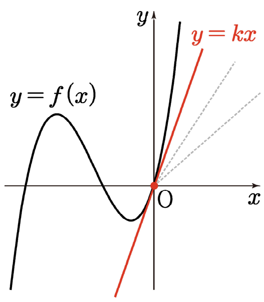
문제에서 주어진 k의 최솟값이 4이므로

낯선 표현 ❹

곡선 $y=f(x)$가 $x<0$에서 직선 $y=-4x$와 접한다

는 것을 알 수 있다.

위 개형을 바탕으로 $x \geq 0$인 부분을 다시 살펴보자.
$x \geq 0$에서 곡선 $y=f(x)$는 x의 값이 커질수록 접선의 기울기가 계속 증가하는 개형이다. 따라서 다음 그림처럼 $k=f'(0)$일 때 k의 값이 최대가 된다.



이때 문제에서 주어진 k의 최댓값이 5이므로

낯선 표현 ❹

$f'(0)=5$

임을 알 수 있다.

FLOW 3 함수 $f(x)$ 구하기

FLOW 2에서 알아낸 정보를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ \text{곡선 } y=f(x)\text{가 } x<0\text{에서 직선 } y=-4x\text{와 접한다} \\ f'(0)=5 \end{cases}$$

위 정보를 활용하여 함수 $f(x)$를 구하자.
곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=-4x$와 $x<0$에서 접하고 원점에서 만나므로

$$f(x)-(-4x)=x(x-a)^2 \ (a<0)$$

이고, 양변을 미분하면

$$f'(x)+4=(x-a)^2+2x(x-a)$$
$$\Rightarrow f'(0)+4=a^2$$
$$\Rightarrow a^2=9 \ (\because f'(0)=5)$$
$$\Rightarrow a=-3 \ (\because a<0)$$
$$\Downarrow$$
$$f(x)=x(x+3)^2-4x$$

임을 알 수 있다.

$\therefore \ f(1)=1\cdot 4^2-4=12$

정답 ③

CHECK

✔ 기출 표현

❶ 정적분으로 정의된 함수

- [x] $x=0$ 을 대입하여 $g(0)=0$ 임을 알아냈고,
  주어진 식을 미분하여 $g'(x)$ 의 식을 얻을 수 있었다.
- [x] **Recall** 260915

❷ 절댓값이 포함된 함수

- [x] $x<0$ 인 경우와 $x \geq 0$ 인 경우로 나누어
  절댓값을 없애고 $g'(x)$ 의 식을 쓸 수 있었다.
- [x] **Recall** 260915

❸ 실수 전체의 집합에서 증가

- [x] 모든 실수 x 에 대하여 $g'(x) \geq 0$ 임을 알 수 있었고,
  나아가 $f(x)$ 의 조건도 정리해볼 수 있었다.

✔ 낯선 표현

❹ 만족하는 k 의 값의 범위

- [x] k 의 최댓값과 최솟값이 존재한다는 사실로부터
  곡선 $y=f(x)$ 의 개형을 결정할 수 있었다.
  곡선 $y=f(x)$ 가 $x<0$ 에서 직선 $y=-4x$ 와
  접한다는 것과 $f'(0)=5$ 임을 알아냈다.

Recall 2026학년도 9월 15번

최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

❶❷
$$g(x)=\int_0^x (|f(t)|-|t|)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $g'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4 이다.
(나) 함수 $g(x)$ 는 $x=2$, $x=6$ 에서 극값을 갖는다.

$f(6) \times g(2)<0$ 일 때, $f(8)$ 의 값은? [4점]

① 16 ② 22 ③ 28 ④ 34 ⑤ 40

정답 ⑤

Insight

최근 '정적분으로 정의된 함수' 유형이 15번으로 계속 출제되고 있습니다. 이 유형은 모두 대입하고 미분하여 도함수를 관찰한다는 공통된 풀이 방법이 있어 비교적 접근하기 쉬워 보일 수 있습니다. 그러나 실제 문항에서는 적분식의 구조와 조건의 역할에 따라 관찰해야 할 지점이 달라집니다. 따라서 풀이 전 SCAN을 통해 식의 형태와 조건을 먼저 살피고, 미분 후 얻어지는 도함수의 의미를 해석해 봅시다.

16 ●●● 10~20초 귀납수열

풀이

$a_2 = a_1+3 = 4 \ (\because \ a_1=1)$

$a_3 = 2(a_2+3) = 14$

정답 14

17 ●●● 10~20초 부정적분

풀이

$f(x)=3x^2-8x+2$

$\Rightarrow F(x)=x^3-4x^2+2x+C$ (C는 적분상수)

이므로 $F(2)=0$을 이용하여 답을 구하자.

$F(2) = 8-16+4+C = 0 \Rightarrow C=4$

$\therefore \ F(1) = 1-4+2+C = 3$

정답 3

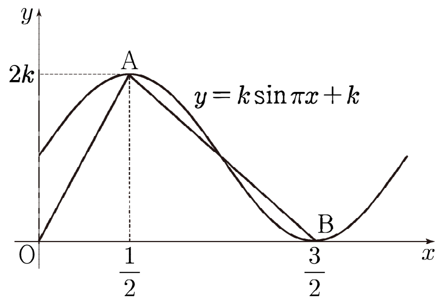
18 ●●● 10~20초 삼각함수 그래프

풀이

양수 k에 대하여 닫힌구간 $[0, 2]$에서 정의된 함수 $f(x)=k\sin\pi x+k$가

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\text{에서 최댓값 } 2k \\ x=\dfrac{3}{2}\text{에서 최솟값 } 0 \end{cases}$$

을 가짐을 이용하여 두 점 A, B를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



(삼각형 OAB의 넓이)

$= \dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cdot$(점 A와 선분 OB 사이의 거리)

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot 2k = 18$

$\therefore \ k=12$

정답 12

19 ●●● 20~30초

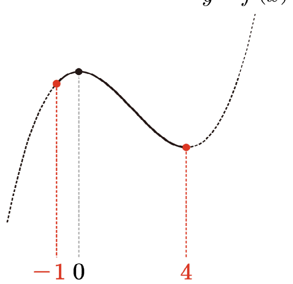
함수의 최대·최소

풀이

$f(x)=x^3-6x^2+k$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2-12x = 3x(x-4)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=4$에서 극소를 갖는다. 함수 $f(x)$의 그래프를 그려보면



이므로 닫힌구간 $[-1, 4]$에서 함수 $f(x)$는

$$\begin{cases} x=0\text{에서 최댓값 } M & \cdots\cdots ㉠ \\ x=-1 \text{ 또는 } x=4\text{에서 최솟값 } m & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

을 갖는다.

㉠ : $f(0)=k$이므로 $M=k$

㉡ : $f(-1)=-7+k,\ f(4)=-32+k$에서

$f(4)<f(-1)$이므로 $m = f(4) = -32+k$

$\Downarrow$

$M+m = k+(-32+k) = 0$

$\therefore\ k=16$

정답 16

20 ●●● 3~5분

귀납수열 나열과 규칙 파악

풀이

빈칸 문제는 빈칸 주변에 있는 조건을 이용해 빈칸을 채우면 된다. 먼저 $\boxed{(가)}$ 주변에 있는

$S_1+a_1=2a_1$

$S_2+2a_2=a_1+3a_2$

$\vdots$

$S_n+na_n=a_1+a_2+\cdots+(n+1)a_n$

에서 좌변과 우변을 각각 더하면

(좌변) $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(S_k+ka_k)$

(우변) $= (n+1)a_1+(n+1)a_2+\cdots+(n+1)a_n$

위 식으로부터 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(S_k+ka_k)=(n+1)\times S_n$이므로

$\boxed{(가)} = f(n) = n+1$

이다. 이제 $\boxed{(나)}$ 주변을 보자.

$\boxed{(가)}\times S_n=3S_{n+2} \Rightarrow (n+1)\times S_n=3S_{n+2}$

에서 양변에 $n=5$를 대입하면

$6\times S_5=3S_7 \Rightarrow S_5=\dfrac{1}{2}S_7$

이고 $a_7=S_7,\ S_7-S_5=15$이므로

$S_7-\dfrac{1}{2}S_7=15 \Rightarrow S_7 = a_7 = 30$

$\Rightarrow \boxed{(나)} = p = 30$

임을 알 수 있다.

$\therefore\ f(6)+p = 7+30 = 37$

정답 37

21 ●●● 8~12분

모든 실수에 대하여 극한값 존재 | 구간별 함수 | 절댓값

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

❶ $$g(x)=\begin{cases} x+3 & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 다음을 만족시킨다.

(가) ❷❸ 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a}\frac{g(-x)}{|g(x)|+g(x)-4}$의 값이 존재한다.

(나) ❹ $\lim_{x\to -1}\frac{g(-x)}{|g(x)|+g(x)-4}$

$=\lim_{x\to k}\frac{g(-x)}{|g(x)|+g(x)-4}=0$

$f(7)+4k$의 값을 구하시오. (단, $k\neq -1$) [4점]

SCAN

기출 표현

❶ **특정 구간의 함수가 주어진 구간별 함수**

$x<0$인 구간에서는 함수 $g(x)$가 $x+3$이라고 주어졌다.
이를 이용하여 함수가 주어지지 않은 구간을 추론하자.

❷ **모든 실수에 대하여 극한값이 존재**

(분모)$\to 0$일 때 (분자)$\to 0$이어야 극한값이 존재한다.
(분모)$\to 0$이 되는 상황을 살펴보자.

❸ **절댓값**

절댓값 안의 식의 값이 0일 때를 기준으로 범위를 나누어야겠다.

낯선 표현

❹ **(극한값)$=0$을 만족하는 실수**

$g(1)=g(-k)=0$이어야겠다.
식이 복잡하니 일단 주어진 값을 대입하자.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

FLOW 1 조건 (가) 분석하기

함수 $g(x)$가 $x\neq0$에서는 연속이므로 조건 (가)에서 $a\neq0$인 모든 실수 a에 대하여 극한값이 존재하려면 (분모)$\to0$일 때 (분자)$\to0$이어야 한다.

(분모)$\to0$인 상황을 살펴보자.

(분모)$\to0$: $|g(x)|+g(x)-4=0 \Rightarrow g(x)=2$
(분자)$\to0$: $g(-x)=0$

$\Downarrow$

기출 표현 ❷

$g(x)=2$일 때 $g(-x)=0$

이다.

$x<0$일 때 $g(x)=x+3$임을 이용하여 정보를 더 찾아보자. 먼저 $g(-1)=2$이므로

$$g(1)=f(1)=0$$

이고 $x>0$일 때 $g(-x)=-x+3=0$을 만족시키는 x는 3뿐이므로

기출 표현 ❶

$x>0$에서 $g(x)=2$, 즉 $f(x)=2$를 만족하는 x는 3뿐이거나, 존재하지 않는다. …… ㉠

FLOW 2 조건 (나) 분석하기

이제 조건 (나)를 살펴보면 우선

$$\lim_{x\to-1}\frac{g(-x)}{|g(x)|+g(x)-4}=\lim_{x\to k}\frac{g(-x)}{|g(x)|+g(x)-4}=0$$
$$\Rightarrow g(1)=f(1)=0,\ g(-k)=0$$

이어야 한다. 이때, $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{g(-x)}{|g(x)|+g(x)-4}=0$에서

$$\lim_{x\to-1}\frac{g(-x)}{|g(x)|+g(x)-4}=\lim_{x\to-1}\frac{f(-x)}{2(x+3)-4}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(-x)}{2(x+1)}=0$$
$$\Rightarrow f'(1)=0$$

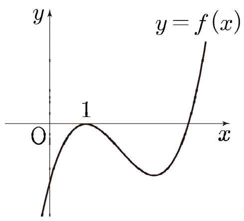
즉,

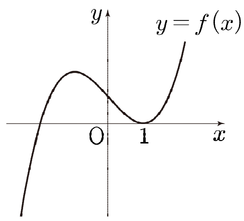
낯선 표현 ❹

$f(1)=0,\ f'(1)=0$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=1$에서 x축과 접한다.

$f(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 가능한 곡선 $y=f(x)$의 개형은 다음과 같이 두 가지가 있다.





위 개형과 ㉠을 고려하면

$0<x<1$에서 $f(x)=2$를 만족하는 x는 존재하지 않음
$\Rightarrow 0<x<1$에서 $f(x)<2$ …… ㉡

여야 하고, $y=f(x)$의 그래프는 $x>1$에서 반드시 직선 $y=2$와 만나게 되므로

$x>1$에서 $f(x)=2$를 만족하는 x는 3뿐
$\Rightarrow f(3)=2$

FLOW 3 추가 정보 찾기: $x=0$ 에서의 극한값

FLOW 2 에서 구한 $f(1)=0$, $f'(1)=0$을 이용하여

$$f(x)=\alpha(x-1)^2(x-\beta)\ \ (\alpha>0)$$

이라고 식을 세울 수 있지만, 구한 정보가
$f(3)=2$ 뿐이므로 다른 정보를 하나 더 찾자.

FLOW 1 에서 조건 (가)를 살펴볼 때 $g(x)$ 의 함수가 바뀌는 지점에서 극한값이 존재하는지는 확인하지 않았다.
$x=0$ 에서 $\dfrac{g(-x)}{|g(x)|+g(x)-4}$ 의 좌극한과 우극한을 비교하자.

$$\begin{aligned}(\text{좌극한}) &= \lim_{x\to 0-}\frac{g(-x)}{|g(x)|+g(x)-4}\\ &= \lim_{x\to 0-}\frac{f(-x)}{|x+3|+(x+3)-4}\\ &= \frac{f(0)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{우극한}) &= \lim_{x\to 0+}\frac{g(-x)}{|g(x)|+g(x)-4}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{-x+3}{|f(x)|+f(x)-4}\\ &= \frac{3}{|f(0)|+f(0)-4}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \frac{f(0)}{2}=\frac{3}{|f(0)|+f(0)-4}$$

식에 $|f(0)|$ 이 있으므로

기출 표현 ❸

$f(0)$ 의 부호에 따라 범위를 나누어 생각해 보자.

$f(0)<0$ 인 경우,

$$\frac{f(0)}{2}=-\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ f(0)=-\frac{3}{2}$$

이고, $f(0)\geq 0$ 인 경우

$$\frac{f(0)}{2}=\frac{3}{2f(0)-4}$$

$$\Rightarrow\ 2\{f(0)\}^2-4f(0)-6=0$$

$$\Rightarrow\ 2\{f(0)-3\}\{f(0)+1\}=0$$

$$\Rightarrow\ f(0)=3\ \ (\because\ f(0)\geq 0)$$

$\Rightarrow$ ㉡에 의해 $f(0)\leq 2$ 여야 하므로 모순[1)]

이다. 즉,

$$f(0)=-\frac{3}{2}$$

임을 알 수 있다. 이제 이를 활용하여 $f(x)$의 식을 완성하자.

$$f(0)=-\alpha\beta=-\frac{3}{2},\ f(3)=4\alpha(3-\beta)=2$$

$$\Rightarrow\ \alpha=\frac{2}{3},\ \beta=\frac{9}{4}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)=\frac{2}{3}(x-1)^2\left(x-\frac{9}{4}\right)$$

FLOW 4 k의 값 구하기

이제 k의 값을 구해보자. 조건 (나)에서 $g(-k)=0$이고, $g(-3)=0$, $g\left(\frac{9}{4}\right)=0$이므로 $k=3$ 또는 $k=-\frac{9}{4}$이다.

(ⅰ) $k=3$인 경우

$$\lim_{x\to3}\frac{g(-x)}{|g(x)|+g(x)-4}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{-x+3}{f(x)+f(x)-4}\quad(\because\ f(3)>0)$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{-(x-3)}{2\{f(x)-2\}}$$

이때 $f(3)=2$이므로 $\lim_{x\to3}\frac{-(x-3)}{2\{f(x)-2\}}$의 값은 0이 될 수 없다. 따라서 조건을 만족하지 않는다.

(ⅱ) $k=-\frac{9}{4}$인 경우

$$\lim_{x\to-\frac{9}{4}}\frac{g(-x)}{|g(x)|+g(x)-4}=\lim_{x\to-\frac{9}{4}}\frac{f(-x)}{2(x+3)-4}$$
$$=0$$

이므로 조건을 만족한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=-\frac{9}{4}$임을 알 수 있다.

$$\therefore\ f(7)+4k=\frac{2}{3}\cdot6^2\cdot\frac{19}{4}-9$$
$$=114-9$$
$$=105$$

정답 105

PLUS

1) ㉡에서는 $0<x<1$에서 $f(x)<2$라고 하였지만 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(0)\le2$이다.

CHECK

✔ 기출 표현

❶ 특정 구간의 함수가 주어진 구간별 함수

☑ $x<0$에서 $g(x)=x+3$임을 이용해 $f(x)=2$를 만족할 수 있는 x의 값을 크게 제한시켰다.

❷ 모든 실수에 대하여 극한값이 존재

☑ (분모)$\to0$이면 (분자)$\to0$임을 이용하여 $g(x)$에 대한 조건을 구할 수 있었다.

☑ **Recall** 261121

❸ 절댓값

☑ $|f(0)|$이 포함된 식에서 $f(0)$의 부호에 따라 경우를 나누어 $f(0)$의 값을 구했다.

✔ 낯선 표현

❹ (극한값)$=0$을 만족하는 실수

☑ $x\to-1$인 극한에서 $f(1)=0$, $f'(1)=0$을 알아냈다. 이를 이용하여 곡선 $y=f(x)$의 개형을 추릴 수 있었다.

Recall 2026학년도 수능 21번

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<t)\\ f(x) & (x\ge t)\end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) ❷ 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재한다.

(나) $\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m의 집합은 $\left\{g(-1),\ -\frac{7}{2}g(1)\right\}$이다.

$g(-5)$의 값을 구하시오. (단, $g(-1)\ne-\frac{7}{2}g(1)$) [4점]

정답 65

22 ●●● 8~12분

지수함수 그래프 로그함수 그래프

양수 k에 대하여 두 곡선

❶ $y=\dfrac{8^x}{k}$, $y=-\log_2(k(x+2))$

가 만나는 점을 A, 점 A를 지나고 ❷ x 절편이 -2 인 직선이 곡선 $y=\dfrac{8^x}{k}$ 과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=-\log_2(k(x+2))$ 와 만나는 점을 C라 하자. 직선 AC의 ❷ y 절편이 2 일 때, $7\times\log_2\dfrac{7}{k}$ 의 값을 구하시오. [4점]

SCAN

낯선 표현

❶ 밑이 다른 지수/로그함수

밑이 다른 지수/로그함수이기에 평행, 대칭이동 관계가 없고 261122처럼 확대 축소 관계로 해석하기도 어려워 보인다. 초월방정식 해석이 중요한 문제일 수도 있겠다.

❷ x 절편, y 절편

두 함수의 기하적 관계를 찾기 어렵기 때문에 이 조건도 대수적으로 해석해야 할 수도 있겠다.

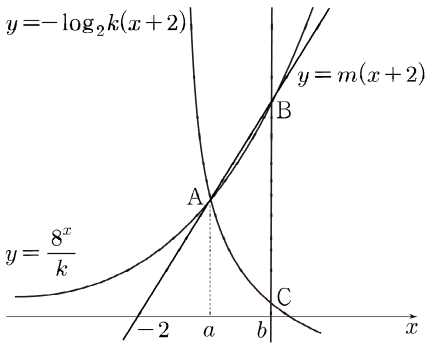
NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

FLOW 1 주어진 조건을 통해 직선 AC 의 방정식 구하기

먼저 세 점 A, B, C 를 좌표평면 위에 나타내면[1)]



이다. 편의상 두 점 A, B 의 좌표를

$$\mathrm{A}\left(a,\ \frac{8^a}{k}\right),\ \mathrm{B}\left(b,\ \frac{8^b}{k}\right)$$

이라 하고[2)] x 절편이 -2 인 직선 AB 의 방정식을

낯선 표현 ❷

$y=m(x+2)$ $(m>0)$

라 하자. 두 점 A, B 는 직선 $y=m(x+2)$ 위에 있으므로

$$\begin{cases} \dfrac{8^a}{k}=m(a+2) & \cdots\cdots\ ㉠ \\ \dfrac{8^b}{k}=m(b+2) & \cdots\cdots\ ㉡ \end{cases}$$

이다. 한편, 점 C 는 점 B 와 x 좌표가 같고 곡선 $y=-\log_2 k(x+2)$ 위에 있으므로

$$\mathrm{C}(b,\ -\log_2 k(b+2))$$

라 할 수 있다.

이때 ㉡을

$$㉡ \Rightarrow \frac{8^b}{m}=k(b+2)$$

와 같이 변형하면 점 C 의 y 좌표를 다르게 표현할 수 있다.

낯선 표현 ❶

$\mathrm{C}(b,\ -\log_2 k(b+2))$

$\Rightarrow \mathrm{C}\left(b,\ -\log_2 \dfrac{8^b}{m}\right)$

$\Rightarrow \mathrm{C}(b,\ -3b+\log_2 m)$

마찬가지로, 점 A 도 곡선 $y=-\log_2 k(x+2)$ 위에 있으므로

$\mathrm{A}(a,\ -\log_2 k(a+2))$

$\Rightarrow \mathrm{A}\left(a,\ -\log_2 \dfrac{8^a}{m}\right)$ ($\because$ ㉠)

$\Rightarrow \mathrm{A}(a,\ -3a+\log_2 m)$

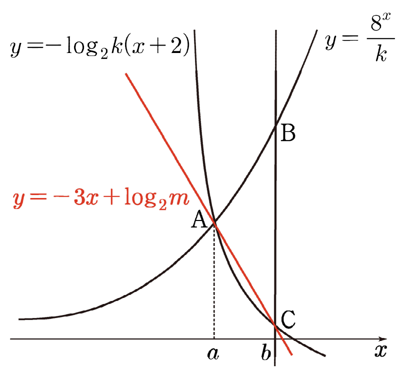
이때 두 점 A, C 의 좌표를 보면

$\mathrm{A}(a,\ -3a+\log_2 m)$, $\mathrm{C}(b,\ -3b+\log_2 m)$

$\Rightarrow$ 두 점 A, C 는 직선 $y=-3x+\log_2 m$ 위에 있다.

$\Rightarrow$ 직선 AC 의 방정식은 $y=-3x+\log_2 m$

임을 알 수 있다.



FLOW 2 점 A 의 좌표를 통해 답 구하기

이때 직선 AC 의 y 절편은 2 이므로

$$\log_2 m = 2 \ \Rightarrow\ m = 4$$

이다. 즉,

$$\text{(직선 AB 의 방정식)} : y = m(x+2) \ \Rightarrow\ y = 4x+8$$
$$\text{(직선 AC 의 방정식)} : y = -3x+\log_2 m \ \Rightarrow\ y = -3x+2$$

이고, 점 A 는 두 직선 $y=4x+8$, $y=-3x+2$ 의 교점이므로

$$4x+8 = -3x+2 \ \Rightarrow\ x = -\frac{6}{7} \ \Rightarrow\ \mathrm{A}\left(-\frac{6}{7},\ \frac{32}{7}\right)$$

이다. 이제 점 A 가 곡선 $y=\dfrac{8^x}{k}$ 위에 있음을 이용하여 답을 구하면 된다.

$$\frac{8^{-\frac{6}{7}}}{k} = \frac{32}{7} \ \Rightarrow\ \frac{7}{k} = 2^{\frac{53}{7}}$$

$$\therefore\ 7\times\log_2\frac{7}{k} = 7\times\frac{53}{7} = 53$$

정답 53

PLUS

1) 점 A 가 점 B 의 오른쪽에 있도록 그리고 시작할 수도 있다. 물론 실제로 k 의 값을 구해보면 본문처럼 점 A 가 점 B 의 왼쪽에 있는 개형이 맞지만, 풀이 시작 단계에서는 알 수 없으므로 우선 임의로 개형을 고정하고 시작해도 상관없다.
2) 점 A 의 좌표를 $(a,\ -\log_2 k(a+2))$ 와 같이 로그로 표현할 수도 있었지만, 점 B 의 좌표가 $\left(b,\ \dfrac{8^b}{k}\right)$ 과 같이 지수로 표현되므로 점 A 의 좌표도 $\left(a,\ \dfrac{8^a}{k}\right)$ 이라고 나타냈다.
   지수 또는 로그 중 하나로 통일해야 계산이 더 편리하다.

CHECK

✓ 낯선 표현

❶ 밑이 다른 지수/로그함수

☑ 주어진 조건을 이용하여 식을 조작했더니 직선 AC 의 방정식이 $y=-3x+\log_2 m$임을 알 수 있었다.

❷ x 절편, y 절편

☑ x 절편이 -2 라는 조건을 통해 직선 AB 의 방정식을 $y=m(x+2)$ 라 할 수 있었다. 이를 통해 얻은 식과 주어진 로그함수 식을 보고 풀이의 방향성을 잡았다.

Insight

최근 지수/로그함수 문제는 고난도로 출제되고 있습니다. 특이한 점은 근래에 출제된 지수/로그함수 문제의 핵심이 매번 달랐다는 점입니다. 이 문항 또한 초월방정식을 사용한다는 점을 제외하고는 기출의 아이디어와 겹치지 않아 풀이가 어려웠을 것입니다. 이러한 문제를 해결하기 위해 가장 중요한 것은 유연한 태도입니다. 지수/로그함수 문제를 풀이하기 전 SCAN을 통해 다양한 풀이 방향성을 생각하며 유연하게 대응해 봅시다.

23

●●● 10~20초

같은 것이 있는 순열

풀이

$$\frac{5!}{2!1!1!1!}=60$$

정답 ①

24

●●● 20~30초

확률 사건의 독립

풀이

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{3} \Rightarrow \mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$$

이므로 확률의 덧셈정리를 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B) &= \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\ &= \frac{2}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)\ (\because\ A,\ B\text{는 독립})\\ &= \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{14}{15}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(B)=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$$

정답 ④

25

●●● 1~2분

이항정리

풀이

$$(x^2+2)^5(x^2-1)=(x^2+2)^5\times x^2-(x^2+2)^5$$

이므로

$$\begin{aligned}&((x^2+2)^5(x^2-1)\text{의 전개식에서 } x^6\text{의 계수})\\ &=((x^2+2)^5\text{의 전개식에서 } x^4\text{의 계수})\\ &\quad-((x^2+2)^5\text{의 전개식에서 } x^6\text{의 계수})\end{aligned}$$

이다. 따라서 $(x^2+2)^5$의 전개식의 일반항

$${}_5\mathrm{C}_r\times(x^2)^r\times 2^{5-r}$$

을 통해 x^4과 x^6의 계수를 구하면 다음과 같다.

$$((x^2+2)^5\text{의 전개식에서 } x^4\text{의 계수})={}_5\mathrm{C}_2\times 2^3=80$$
$$((x^2+2)^5\text{의 전개식에서 } x^6\text{의 계수})={}_5\mathrm{C}_3\times 2^2=40$$

$$\therefore\ ((x^2+2)^5(x^2-1)\text{의 전개식에서 } x^6\text{의 계수})=80-40=40$$

정답 ②

26 ●●● 2~3분

확률 여사건

풀이

두 수의 곱이 짝수이기 위해서는 두 수 중 적어도 하나가 짝수여야 하므로 여사건을 이용해

$1-$(두 수가 모두 홀수일 확률)

을 계산하자.

상자 1개를 던졌을 때 바닥에 닿은 면에 적힌 수가 홀수일 확률은 $\frac{3}{4}$이므로 상자 2개를 던졌을 때 바닥에 닿은 면에 적힌 수가 모두 홀수일 확률은

$$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$$

이다.

$\therefore$ (구하고자 하는 확률) $=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$

정답 ③

27 ●●● 5~8분

원순열

풀이

2학년 학생들끼리는 서로 이웃하지 않아야 하므로 먼저 1, 3학년 학생을 배치하고, 그 사이사이에 2학년 학생을 배치하자.

1학년 학생 2명은 서로 이웃해야 하므로 하나의 묶음으로 생각하자. 1학년 학생 묶음 1개와 3학년 학생 3명을 원 모양의 탁자에 배치하는 방법의 수는

$$\frac{4!}{4}=6$$

이고 1학년 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는

$$2!=2$$

이다.

이제 2학년 학생을 배치하자. 1학년 학생 묶음 1개와 3학년 학생 3명의 사이사이에 총 4개의 빈자리가 생기고, 이 빈자리에 2학년 학생 3명을 배치하는 방법의 수는

$${}_4P_3=24$$

이다.

$\therefore$ (전체 경우의 수) $=6\times2\times24=288$

정답 ⑤

28 ●●● 8~10분

조건부확률

16 개의 공과 1 부터 6 까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 여섯 개의 빈 상자가 있다. 두 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 두 개의 주사위를 모두 던져
> 나온 눈의 수가 같으면
> 나온 눈의 수가 적힌 상자에 공을 3 개 넣고,
> 나온 눈의 수가 다르면
> 나온 눈의 수 중 큰 수의 약수가 적힌 상자에
> 공을 각각 1 개씩 넣는다.

이 시행을 3 번 반복한 후 여섯 개의 상자에 들어 있는 ❶ 모든 공의 개수의 합이 10 일 때, 2 가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수와 3 이 적힌 상자에 들어 있는 ❷ 공의 개수가 같을 확률은? [4점]

① $\frac{23}{71}$ ② $\frac{47}{142}$ ③ $\frac{24}{71}$ ④ $\frac{49}{142}$ ⑤ $\frac{25}{71}$

SCAN

기출 표현

❶ 모든 공의 개수의 합이 10 일 때~

조건부확률임에 유의해야겠다.

모든 공의 개수의 합이 10 인 경우를 먼저 살펴보자.

❷ 공의 개수가 같다

공의 개수가 달라지는 상황을 생각해 보자.

2 가 적힌 상자에 공을 넣는 경우, 3 이 적힌 상자에 공을 넣는 경우, 두 상자 모두 공을 넣는 경우를 유심히 살펴보자.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

FLOW 1 시행 파악하기

사건 A: 시행을 3번 반복한 후 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 10이 되는 사건

사건 B: 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수와 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 같은 사건

이라고 하면 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ 이다.

$\mathrm{P}(A)$를 구하기 위해 우선 시행을 파악하자.
두 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수가 a, b인 경우를 (a, b)라 하면

$a=b$인 경우에는 a가 적힌 상자에 공을 3개 넣는다.

	(a, b)	공이 들어가는 상자에 적힌 수	상자에 넣는 공의 개수
$a=b$	6가지	a	3

$a\neq b$인 경우에는 다음과 같이 공을 넣는다.

a, b 중 큰 수	(a, b)	공이 들어가는 상자에 적힌 수	상자에 넣는 공의 개수
6	10가지	1, 2, 3, 6	4
5	8가지	1, 5	2
4	6가지	1, 2, 4	3
3	4가지	1, 3	2
2	2가지	1, 2	2

위 표를 바탕으로 시행을 1번 했을 때 상자에 넣는 공의 개수가 2, 3, 4일 확률을 각각 구해보자.

(i) 상자에 넣는 공의 개수가 2인 경우
$a\neq b$이고, a, b 중 큰 수가 2 또는 3 또는 5인 경우가 해당한다. 표를 참고하면 경우의 수는

$$2+4+8=14$$

이고, 두 개의 주사위를 던졌을 때 나오는 경우의 수는 36이므로 확률은 $\dfrac{14}{36}$ 이다.

(ii) 상자에 공을 3개 넣는 경우

$$\begin{cases} a=b\text{이거나,} \\ a\neq b\text{이고 } a,\ b \text{ 중 큰 수가 } 4 \end{cases}$$

인 경우가 해당하므로 경우의 수는

$$6+6=12$$

이다. 따라서 확률은 $\dfrac{12}{36}$ 이다.

(iii) 상자에 공을 4개 넣는 경우
$a\neq b$이고, a, b 중 큰 수가 6인 경우가 해당하므로 경우의 수는 10이다. 따라서 확률은 $\dfrac{10}{36}$ 이다.

FLOW 2 P(A) 구하기

각 시행에서 상자에 넣는 공의 개수는

2 또는 3 또는 4

이므로 시행을 3번 반복한 후 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 10이 되는 경우는 상자에 공을

기출 표현 ❶

$$\begin{cases} 2개,\ 4개,\ 4개 \quad \cdots\cdots \ ㉠ \\ 또는\ 3개,\ 3개,\ 4개 \quad \cdots\cdots \ ㉡ \end{cases}$$

넣어야 한다.

FLOW 1 에서 구한 확률을 바탕으로 ㉠, ㉡의 확률을 구하면 다음과 같다.

㉠ : 공을 2개, 4개, 4개 넣는 경우

$$\frac{14}{36}\times\frac{10}{36}\times\frac{10}{36}\times\frac{3!}{2!}=\frac{14\times10^2\times3}{36^3}$$

㉡ : 공을 3개, 3개, 4개 넣는 경우

$$\frac{12}{36}\times\frac{12}{36}\times\frac{10}{36}\times\frac{3!}{2!}=\frac{12^2\times10\times3}{36^3}$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}(A)=\frac{14\times10^2\times3}{36^3}+\frac{12^2\times10\times3}{36^3}$$

FLOW 3 P$(A\cap B)$ 구하기

이제 사건 A를 만족하면서 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수와 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 같은 경우를 ㉠, ㉡의 경우에서 각각 생각해 보자.

㉠ : 공을 2개, 4개, 4개 넣는 경우

공을 4개 넣는 경우는 1, 2, 3, 6이 적힌 상자에 공을 1개씩 넣는 경우뿐이므로

기출 표현 ❷

2, 3이 적힌 상자에 추가되는 공의 개수가 동일

하다.

이때 공을 2개 넣는 경우 중에서 2, 3이 적힌 상자에 추가되는 공의 개수가 동일해지는 경우는

$a\neq b$이고, a, b 중 큰 수가 5인 경우

만 해당하고, 이 확률은 $\frac{8}{36}$이다.

따라서 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수와 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 같을 확률은

$$\frac{8}{36}\times\frac{10}{36}\times\frac{10}{36}\times\frac{3!}{2!}=\frac{8\times10^2\times3}{36^3}$$

이다.

㉡ : 공을 3개, 3개, 4개 넣는 경우

공을 4개 넣는 경우는 1, 2, 3, 6이 적힌 상자에 공을 1개씩 넣는 경우뿐이므로 2, 3이 적힌 상자에 추가되는 공의 개수가 동일하다.

즉, 공을 3개 넣는 시행을 2번 했을 때 2, 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 동일해지는 경우는

$$\begin{cases} (2,2),\ (3,3)의\ 시행이\ 각각\ 1번씩 \\ 또는\ (1,1),\ (4,4),\ (5,5),\ (6,6)\ 중\ 2번 \end{cases}$$

과 같이 두 가지가 있다. 각각의 확률을 구하면

$(2, 2)$, $(3, 3)$의 시행이 각각 1번씩

$$\Rightarrow \frac{1}{36}\times\frac{1}{36}\times 2!$$

$(1, 1)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$ 중 2번

$$\Rightarrow \frac{4}{36}\times\frac{4}{36}$$

이므로 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수와 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 같을 확률은

$$\left(\frac{1}{36}\times\frac{1}{36}\times 2!+\frac{4}{36}\times\frac{4}{36}\right)\times\frac{10}{36}\times\frac{3!}{2!}$$
$$=\frac{2\times 10\times 3}{36^3}+\frac{4^2\times 10\times 3}{36^3}$$

이다.

따라서 ㉠, ㉡을 정리하면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8\times 10^2\times 3}{36^3}+\frac{2\times 10\times 3}{36^3}+\frac{4^2\times 10\times 3}{36^3}$$

이다.

$$\therefore \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{8\times 10^2\times 3}{36^3}+\frac{2\times 10\times 3}{36^3}+\frac{4^2\times 10\times 3}{36^3}}{\frac{14\times 10^2\times 3}{36^3}+\frac{12^2\times 10\times 3}{36^3}}$$
$$=\frac{8\times 10+2+4^2}{14\times 10+12^2}$$
$$=\frac{98}{284}=\frac{49}{142}$$

정답 ④

CHECK

✔ 기출 표현

❶ 모든 공의 개수의 합이 10일 때~

☑ 해당하는 경우가 ㉠, ㉡ 두 가지뿐이므로 각각의 확률을 구하고, 조건부확률의 분자에 해당하는 확률도 ㉠, ㉡ 안에서 구할 수 있었다.

❷ 공의 개수가 같다

☑ 상자에 공을 4개 넣는 경우는 2, 3이 적힌 상자에 추가되는 공의 개수가 같다는 점을 이용했다.

☑ **Recall** 261128(확통)

Recall 2026학년도 수능 확통 28번

16개의 공과 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 여섯 개의 빈 상자가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때,
> k가 홀수이면
> 1, 3, 5가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣고,
> k가 짝수이면
> k의 약수가 적힌 상자에 공을 각각 1개씩 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 여섯 개의 상자에 들어 있는 모든 공의 개수의 합이 홀수일 때, 3이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 2가 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수보다 ❷ 1개 더 많을 확률은? [4점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

정답 ②

Insight

상당히 많은 경우를 고려해야 하는 조건부확률 문항이지만, 2026학년도 수능에서 한 번 연습한 적이 있는 소재이기 때문에 크게 낯설지는 않았을 것입니다. 두 상자에 들어간 공의 개수의 균형이 유지되거나 깨지는 상황만 잘 관찰했다면 오히려 2026학년도 수능보다 수월하게 풀 수 있습니다. 시행이 복잡할수록 구조와 특징을 충분히 파악한 뒤 확률 계산으로 넘어가도록 합시다.

29 ●●● 2~4분 확률

풀이

전체 경우의 수는 10개의 공 중 4개를 고르는 방법의 수이므로

$$(\text{전체 경우의 수}) = {}_{10}\mathrm{C}_4 = 210$$

이다.

주머니에 남아 있는 공의 색의 가짓수가 2이려면 한 가지 색깔의 공을 전부 꺼내야 한다. 이때 공을 4개 꺼내므로 파란 공을 전부 꺼내는 경우는 존재하지 않고,

$$\begin{cases} \text{빨간 공을 전부 꺼내는 경우} \\ \text{노란 공을 전부 꺼내는 경우} \end{cases}$$

만 존재한다. 공을 4개 꺼내므로 빨간 공과 노란 공을 동시에 전부 꺼낼 수는 없고 각각의 경우만 계산하면 된다.

(i) 빨간 공을 전부 꺼내는 경우
빨간 공 2개를 꺼내고, 나머지 8개의 공 중 2개를 더 꺼내야 하므로 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2=28$이다.

(ii) 노란 공을 전부 꺼내는 경우
노란 공 3개를 꺼내고, 나머지 7개의 공 중 1개를 더 꺼내야 하므로 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_1=7$이다.

(i), (ii)에서 주머니에 남아 있는 공의 색의 가짓수가 2인 경우의 수는 $28+7=35$이므로

$$(\text{구하고자 하는 확률}) = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$$

이다.

$\therefore\ p+q = 6+1 = 7$

정답 7

30 ●●●★ 8~10분

중복조합 여사건

숫자 1 이 적힌 카드 2 장, 숫자 2 가 적힌 카드 3 장, 숫자 3 이 적힌 카드 6 장이 있다. 이 11 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 숫자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 숫자 2 가 적힌 카드 중 임의로 두 장을 택했을 때, ❶ 두 카드 사이에 홀수가 적힌 카드가 두 장 이상 있다.

(나) ❷ 서로 이웃한 카드에 적힌 숫자의 합이 4 가 되는 경우가 있다.

SCAN

기출 표현

❶ 카드 사이에 카드가 2 장 이상 있다

숫자 2 가 적힌 카드의 양 끝과 사이사이에 들어갈 카드의 개수를 정해야겠다.
중복조합을 통해 계산할 수 있겠다.

낯선 표현

❷ 이웃한 카드에 적힌 숫자의 합이 4 인 경우가 있다

카드에 적힌 숫자에 따라 경우를 나누어 익숙한 조건으로 바꾸자.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

FLOW 1 조건 (가), (나) 분석하기

숫자 1, 2, 3이 적힌 카드를 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$과 같이 나타내자.

먼저 조건 (가)를 살펴보자. 숫자 2가 적힌 카드를 제외한 카드는 모두 홀수가 적혀 있으므로 조건 (가)는

$\boxed{2}$의 사이에는 $\boxed{2}$가 아닌 카드가 2장 이상 있다 …… ㉠

고 바꾸어 쓸 수 있다.

이때 조건 (나)에서 카드에 적힌 숫자의 합이 4인 이웃한 카드가 있으려면

$\boxed{2}$, $\boxed{2}$가 이웃하거나
$\boxed{1}$, $\boxed{3}$이 서로 이웃

해야 하지만, ㉠에 의해 $\boxed{2}$는 서로 이웃할 수 없으므로 조건 (나)는

$\boxed{1}$, $\boxed{3}$이 서로 이웃하는 경우가 존재한다

고 해석할 수 있다.

$\boxed{1}$, $\boxed{3}$이 이웃하는 경우가 존재하는 경우의 수를 계산하기보다는 전체 경우의 수에서 $\boxed{1}$, $\boxed{3}$이 이웃하지 않는 경우의 수를 빼는 것이 계산하기 쉬울 것 같으므로 여사건으로 생각하여

낯선 표현 ❷

(조건 (가)를 만족하는 경우의 수)
−(조건 (가)를 만족하지만
 조건 (나)는 만족하지 않는 경우의 수)

를 계산하자.

FLOW 2 조건 (가)를 만족하는 경우의 수 구하기

조건 (가)를 만족하는 경우의 수를 구해보자.

FLOW 1의 ㉠에서 $\boxed{2}$는 서로 이웃할 수 없으므로

3장의 $\boxed{2}$를 먼저 배치하고,
그 사이와 양 끝에 나머지 카드 8장을 배치

하면 된다. 다음과 같이 구역을 나누어 생각하자.

A $\boxed{2}$ B $\boxed{2}$ C $\boxed{2}$ D

우선 나머지 카드 8장에 적힌 숫자를 구분하지 말고 배치하자. 구역 A, B, C, D에 들어가는 카드의 개수를 a, b, c, d라 하면 조건 (가)에 의해

기출 표현 ❶

$a \geq 0,\ b \geq 2,\ c \geq 2,\ d \geq 0$

이고, $a+b+c+d=8$이므로 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$${}_4\mathrm{H}_4 = {}_7\mathrm{C}_4 = 35$$

이다. 이때 8장의 카드 중 2장은 $\boxed{1}$이고, 6개는 $\boxed{3}$이므로 카드에 적힌 숫자를 결정하는 방법의 수는

$$\frac{8!}{2!\,6!} = 28$$

이다.

따라서 조건 (가)를 만족하는 경우의 수는

$$35 \times 28 = 980$$

이다.

FLOW 3 조건 (나)를 만족하지 않는 경우의 수 구하기

조건 (가)를 만족하지만 조건 (나)는 만족하지 않는 경우의 수를 구해보자.

$\boxed{1}$, $\boxed{3}$ 이 네 구역 A, B, C, D 중 하나에 함께 들어간다면 $\boxed{1}$, $\boxed{3}$ 이 서로 이웃하는 경우가 반드시 생긴다. 따라서 이웃하지 않으려면

각 구역에 $\boxed{1}$ 만 있거나 $\boxed{3}$ 만 있어야 함

을 알 수 있다. 이때 두 구역 B, C에는 카드가 2장 이상 들어가야 한다는 점을 고려하면

$$\begin{cases} \text{네 구역 중 하나에 } \boxed{1} \text{ 이 2장 들어가는 경우} \\ \text{구역 A, D에 } \boxed{1} \text{ 이 각각 1장씩 들어가는 경우} \end{cases}$$

가 있음을 알 수 있다.

(i) 구역 A 또는 D에 $\boxed{1}$ 이 2장 들어가는 경우

구역 A에 $\boxed{1}$ 이 2장 들어간다면

$a=2,\ b\geq 2,\ c\geq 2,\ d\geq 0$ 이고

$b+c+d=6$ 이므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$$

이고, 구역 D에 $\boxed{1}$ 이 2장 들어가는 경우의 수도 동일하게 6이므로 (i)의 경우의 수는

$6+6=12$ 이다.

(ii) 구역 B 또는 C에 $\boxed{1}$ 이 2장 들어가는 경우

구역 B에 $\boxed{1}$ 이 2장 들어간다면

$a\geq 0,\ b=2,\ c\geq 2,\ d\geq 0$ 이고

$a+c+d=6$ 이므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = 15$$

이고, 구역 C에 $\boxed{1}$ 이 2장 들어가는 경우의 수도 동일하게 15이므로 (ii)의 경우의 수는

$15+15=30$ 이다.

(iii) 구역 A, D에 $\boxed{1}$ 이 각각 1장씩 들어가는 경우

$a=1,\ b\geq 2,\ c\geq 2,\ d=1$ 이고 $b+c=6$ 이므로

순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$${}_2\mathrm{H}_2 = {}_3\mathrm{C}_2 = 3$$

이다.

따라서 조건 (가)를 만족하지만 조건 (나)는 만족하지 않는 경우의 수는

$$12+30+3=45$$

이다.

$\therefore$ (구하고자 하는 경우의 수) $= 980-45 = 935$

정답 935

CHECK

✔ 기출 표현

❶ 카드 사이에 카드가 2장 이상 있다

☑ 2가 적힌 카드의 양 끝과 사이사이에 들어갈 카드의 개수를 정하는 방법의 수를 중복조합을 이용해 계산할 수 있었다.

☑ **Recall** 240629(확통)

✔ 낯선 표현

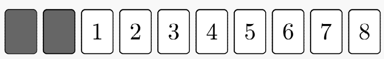
❷ 합이 4인 이웃한 카드가 있다

☑ 여사건을 이용하여 전체 경우의 수에서 1, 3이 이웃하지 않는 경우의 수를 빼서 계산했다.

Recall 2024학년도 6월 확통 29번

그림과 같이 2장의 검은색 카드와 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 흰색 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 검은색 카드는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 흰색 카드에 적힌 수가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽에서 오른쪽으로 배열되도록 카드가 놓여 있다.
(나) ❶ 검은색 카드 사이에는 흰색 카드가 2장 이상 놓여 있다.
(다) 검은색 카드 사이에는 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 1장 이상 놓여 있다.



정답 25

Insight

그동안 확률과 통계에서 배웠던 경우의 수를 구하는 방법은 상당히 제한적입니다. 하지만 모든 문제는 우리가 배운 범위 내에서 풀 수 있도록 설계되어 있기 때문에, 고난도 문제일수록 낯선 조건을 얼마나 잘 변형하여 내가 아는 상황으로 재구성할 수 있느냐가 관건이 됩니다. 따라서 문제를 풀 때는 어떤 조건이든 익숙한 상황으로 바꿀 수 있다는 자신감을 가지고 접근하도록 합시다.

23

10~20초

수열의 극한

풀이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n+1}+9^n}{3^{n+1}+9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 9^n+9^n}{3\cdot 3^n+9^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\frac{3}{3^n}+1}=4$$

정답 ④

24

10~20초

음함수 미분

풀이

음함수 미분법을 이용해 양변을 x에 대해 미분하자.
$x>0$, $y>0$일 때

$$\frac{d}{dx}\{y+\ln(xy)\}=\frac{d}{dx}(4x)$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(y+\ln x+\ln y)=\frac{d}{dx}(4x)$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{y}=4$$

이므로 $x=\frac{1}{2}$, $y=2$를 대입하면

$$\frac{dy}{dx}+2+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{2}=4$$
$$\Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\frac{dy}{dx}=2 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{4}{3}$$

이다. 즉, 곡선 $y+\ln(xy)=4x$ 위의 점 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 접선의 방정식은

$$y-2=\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$$

이다.

$\therefore$ (접선의 y절편) $=\frac{4}{3}$

정답 ⑤

25 ●●● 30~40초

삼각함수 미분 극대·극소

풀이

함수 $f(x)$가 극댓값, 극솟값을 가질 때의 x좌표를 구하기 위해 $f(x)$의 도함수를 구하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin x + x\cos x - \sin x \\ &= x\cos x \end{aligned}$$

이다. 함수 $f(x)$는 $0 < x \le 2\pi$에서 정의됐기에 도함수 $f'(x) = x\cos x$의 부호 변화는 $y = \cos x$의 부호 변화와 같다.

$$f'(x) = x\cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{함수 } f(x)\text{는 } x = \dfrac{\pi}{2}\text{에서 극댓값을 갖는다.} \\ \text{함수 } f(x)\text{는 } x = \dfrac{3\pi}{2}\text{에서 극솟값을 갖는다.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \mathrm{B}\left(\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\therefore \text{(직선 AB의 기울기)} = \frac{\dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)}{\dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{3\pi}{2}\right)} = -2$$

정답 ①

26 ●●● 2~3분

급수 수렴 조건 소거 꼴

풀이

주어진 급수가 S에 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{na_n - n^2}{n+2} - \frac{2n-4}{n}\right) = 0$$

이다. 이때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n-4}{n} = 2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n - n^2}{n+2} = 2$$

여야 한다. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 $a_n = pn + q$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{pn^2 + qn - n^2}{n+2} = 2 \Rightarrow p = 1,\ q = 2$$

임을 알 수 있다. 이제 a_1과 S의 값을 구하자.

$$a_n = n + 2 \Rightarrow a_1 = 3$$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+2} - \frac{2n-4}{n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(2 + \frac{-4}{n+2} - 2 + \frac{4}{n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n} - \frac{4}{n+2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{k} - \frac{4}{k+2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(4 + \frac{4}{2} - \frac{4}{n+1} - \frac{4}{n+2}\right) = 6 \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 + S = 3 + 6 = 9$$

정답 ③

Insight

미적분에서 학습한 급수 계산은 등비급수와 소거되는 형태뿐입니다. 따라서 등비급수가 아니라면 소거되는 형태를 만들어야 한다는 목적을 가지고 풀이하는 것이 좋습니다.

27 ●●● 5~8분

삼각함수 덧셈정리 | 삼각함수 미분

풀이

먼저 함수 $f(x)$의 도함수를 구해보면

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{\tan x}$$

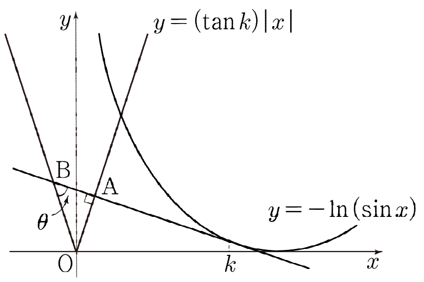
이다. 따라서 함수 $f(x)$의 그래프 위의 점 $(k, f(k))$에서의 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{\tan k}(x-k)-\ln(\sin k)$$

이고 함수 $y=f'\left(\frac{\pi}{2}+k\right)|x|$는

$$y=-\frac{1}{\tan\left(k+\frac{\pi}{2}\right)}|x| \Rightarrow y=(\tan k)|x|$$

이다. 두 함수의 그래프와 두 점 A, B를 좌표평면 위에 나타내면



이다. 이때 $\tan k\times\left(-\frac{1}{\tan k}\right)=-1$ 이므로 삼각형 OAB는 $\angle$OAB가 직각인 직각삼각형이다.

한편, $\angle \mathrm{OBA}=\theta$라 하면

$$\tan\theta = \frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{AB}}} \quad \left(\because \ \angle \mathrm{OAB}=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{4}{3} \quad (\because \ 3\overline{\mathrm{OA}}=4\overline{\mathrm{AB}})$$

이다.

또한, θ는 두 직선

$$\begin{cases} y=-(\tan k)x \\ y=-\dfrac{1}{\tan k}(x-k)-\ln(\sin k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{기울기가 } -\tan k \text{ 인 직선} \\ \text{기울기가 } -\dfrac{1}{\tan k} \text{ 인 직선} \end{cases}$$

이 만드는 예각이므로

$$\tan\theta = \frac{\left|-\tan k+\frac{1}{\tan k}\right|}{1+1} = \frac{4}{3}$$

이다.[1] 이때 $\frac{\pi}{4}<k<\frac{\pi}{2}$에서 $\tan k>1$ 이므로

$$\tan k > \frac{1}{\tan k} \Rightarrow -\tan k+\frac{1}{\tan k}<0$$

이고, 편의상 $\tan k=t\ (t>0)$로 치환하면

$-t+\frac{1}{t}<0$ 이므로

$$\left|-t+\frac{1}{t}\right|=\frac{8}{3} \Rightarrow t-\frac{1}{t}=\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow t^2-\frac{8}{3}t-1=0$$

$$\Rightarrow (t-3)\left(t+\frac{1}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow t=3 \quad (\because \ t>0)$$

임을 알 수 있다.

$$\therefore \ f'(k) = -\frac{1}{\tan k} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{3}$$

정답 ②

PLUS

1) 두 직선이 만드는 예각을 ★ 이라 할 때, 두 직선의 기울기를 각각 m_1, m_2라 하면

$$\tan ★ = \frac{|m_1-m_2|}{1+m_1m_2}$$

임을 이용한 것이다.

28 ●●●★ 12~15분

역함수 미분

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=ae^{x}+\frac{x}{2}$ 와 함수 $f(x)$ 의 ❶ 역함수 $g(x)$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를

❷ $h(x)=f'(x)\{g'(x)\}^{2}$

이라 하자. 상수 k에 대하여 함수 $h(x)$ 는 ❸ $x=k$에서 극값 $g'(k)$ 를 가질 때, $a\times k$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2e^{3}}$ ② $\frac{5}{2e^{3}}$ ③ $\frac{7}{2e^{3}}$ ④ $\frac{9}{2e^{3}}$ ⑤ $\frac{11}{2e^{3}}$

SCAN

기출 표현

❶ 역함수 $g(x)$

역함수 미분법을 사용하는 것이 문제 의도일 것이다.

❸ $x=k$에서 극값 $g'(k)$

$h(k)=g'(k)$, $h'(k)=0$을 이용하자.

상황에 따라 기하적으로 해석할 수도 있다.

낯선 표현

❷ 낯선 $h(x)$의 정의

함수 $h(x)$ 에 대한 정의가 낯설다. $f'(x)$와 $g'(x)$로 정의되어 있으므로 먼저 $f(x)$와 $g(x)$의 개형을 파악하자.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

FLOW 1 $f(x)$ 와 $g(x)$ 해석하기

함수 $h(x)$ 를 해석하기 전에 먼저

낯선 표현 ❷

함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대해 해석

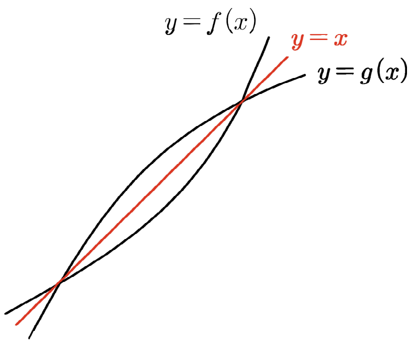
해보자.

함수 $f(x)$ 의 도함수와 이계도함수를 구해보면

$$\begin{cases} f'(x) = ae^x + \dfrac{1}{2} > 0 \ (\because \ a > 0) & \cdots\cdots ㉠ \\ f''(x) = ae^x > 0 \ (\because \ a > 0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ { 함수 $f(x)$ 는 실수 전체 집합에서 증가
함수 $f(x)$ 는 실수 전체 집합에서 아래로 볼록

임을 알 수 있다. 함수 $g(x)$ 의 그래프는 함수 $f(x)$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭시킨 것이므로 그림을 그려보면



$\Rightarrow$ { 함수 $g(x)$ 는 실수 전체 집합에서 증가
함수 $g(x)$ 는 실수 전체 집합에서 위로 볼록

$\Rightarrow \ g'(x) > 0, \ g''(x) \le 0 \quad \cdots\cdots ㉡$

임을 알 수 있다.1)

FLOW 2 $h(k) = g'(k)$ 이용하기

함수 $h(x)$ 는 $x=k$ 에서 극값 $g'(k)$ 를 가지므로

기출 표현 ❸

$$\begin{cases} h(k) = g'(k) \\ h'(k) = 0 \end{cases}$$

이다. 먼저 $h(k) = g'(k)$ 를 정리하면

$f'(k)\{g'(k)\}^2 = g'(k)$

$\Rightarrow \ g'(k) = 0$ 또는 $f'(k)g'(k) = 1$

$\Rightarrow \ f'(k)g'(k) = 1 \ (\because ㉡)$

이다. 이때 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이므로

기출 표현 ❶

$$g'(k) = \frac{1}{f'(g(k))}$$

이라 할 수 있다.

$f'(k)g'(k) = 1$

$\Rightarrow \ f'(k) = f'(g(k))$

$\Rightarrow \ g(k) = k$ ($\because$ ㉠ $\Rightarrow$ f' 은 일대일함수)

$\Rightarrow \ f(k) = k$ ($\because$ g 는 f 의 역함수)

FLOW 3 $h'(k)=0$ 이용하기

$h'(k)=0$ 을 이용하기 위해 함수 $h(x)$ 를 미분하면

$$h'(x)=f''(x)\{g'(x)\}^2+2f'(x)g'(x)g''(x)$$

이고, 양변에 $x=k$를 대입하면

$$h'(k)=f''(k)\{g'(k)\}^2+2f'(k)g'(k)g''(k)$$

임을 알 수 있다.

마찬가지로 $f(x)$ 에 대한 식으로 정리하는 것이 좋지만 $g''(k)$ 에 대한 관계식을 모른다는 문제가 있다. 따라서 $g''(k)$ 에 대한 관계식을 얻기 위해 알고 있는 항등식

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

을 한 번 더 미분하여 $g''(k)$ 에 대한 관계식을 구하자. 편의상

$$f'(g(x))g'(x)=1$$

이라 정리하고 양변을 미분하면

$$f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)=0$$

이다. 위 식에 $x=k$를 대입하면

$$\begin{aligned}&f''(g(k))\{g'(k)\}^2+f'(g(k))g''(k)=0\\ \Rightarrow\ &f''(k)\{g'(k)\}^2+f'(k)g''(k)=0\ (\because\ g(k)=k)\\ \Rightarrow\ &f'(k)g''(k)=-f''(k)\{g'(k)\}^2 \ \cdots\cdots \ ㉢\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}h'(k)&=f''(k)\{g'(k)\}^2+2f'(k)g'(k)g''(k)\\&=f''(k)\{g'(k)\}^2-2f''(k)\{g'(k)\}^3\ (\because\ ㉢)\\&=f''(k)\{g'(k)\}^2\{1-2g'(k)\}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}&h'(k)=0\\ \Rightarrow\ &f''(k)=0 \text{ 또는 } g'(k)=0 \text{ 또는 } g'(k)=\frac{1}{2}\\ \Rightarrow\ &g'(k)=\frac{1}{2}\ (\because\ ㉠,\ ㉡)\\ \Rightarrow\ &f'(k)=2\ (\because\ f'(k)g'(k)=1)\end{aligned}$$

이다. 이제 $f(k)=k$, $f'(k)=2$를 이용하여 답을 구하면 된다.

$$\begin{cases} f(k)=k \Rightarrow ae^k+\frac{1}{2}k=k \Rightarrow ae^k=\frac{1}{2}k \\ f'(k)=2 \Rightarrow ae^k+\frac{1}{2}=2 \Rightarrow ae^k=\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow k=3 \Rightarrow a=\frac{3}{2e^3}\ \left(\because\ ae^k=\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore\ a\times k=\frac{3}{2e^3}\times 3=\frac{9}{2e^3}$$

정답 ④

PLUS

1) $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 교점이 없거나 교점이 1개이도록 그려도 같은 결론을 얻을 수 있다.

☑ CHECK

✔ 기출 표현

❶ 역함수 $g(x)$

☑ 역함수 미분법을 통해 식을 정리했다. 또한 식을 정리하는 과정에 역함수의 이계도함수가 나와 알고 있는 항등식을 미분해서 식을 얻었다.

❸ $x=k$ 에서 극값 $g'(k)$

☑ $h(k)=g'(k)$, $h'(k)=0$ 을 이용했다.

✔ 낯선 표현

❸ 낯선 $h(x)$ 의 정의

☑ $h(x)$ 는 f', g' 으로 정의되어 있으므로 f', f'', g', g'' 에 대한 조건을 구했다.
이를 통해 식을 정리할 때 경우를 줄일 수 있었다.

Insight

최근 수능은 어려운 기하적 해석이 아닌 알고 있는 관계식을 적절히 변형하는 문제가 늘어나고 있습니다. 이는 주로 지수/로그나 적분 퍼즐 등의 형태로 등장했습니다. 하지만 역함수 미분 또한 대수 고난도 문제를 내기 좋은 재료입니다. 이 기회에 역함수 미분에 대해 점검해 보시길 바랍니다.

29 ●●● 5~8분

등비급수 수렴 조건

풀이

두 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(-4)^n}$ 이 각각 수렴하고 $\dfrac{1}{a_n}$ 은 공비가 $\dfrac{1}{r}$ 인 등비수열, $\dfrac{a_n}{(-4)^n}$ 은 공비가 $-\dfrac{r}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\begin{cases} -1<\dfrac{1}{r}<1 \Rightarrow r<-1 \text{ 또는 } r>1 \\ -1<-\dfrac{r}{4}<1 \Rightarrow -4<r<4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -4<r<-1 \text{ 또는 } 1<r<4$$

이다. 또한, 등비급수 합 공식을 이용하면

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\right)\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(-4)^n}\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{a_1}}{1-\frac{1}{r}}\times\frac{-\frac{1}{4}a_1}{1+\frac{r}{4}}$$
$$=\frac{r}{1-r}\times\frac{1}{4+r}$$

이므로

$$\frac{r}{1-r}\times\frac{1}{4+r}=\frac{r}{6}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1-r}\times\frac{1}{4+r}=\frac{1}{6}\ (\because\ r\neq 0)$$
$$\Rightarrow (1-r)(4+r)=6$$
$$\Rightarrow r^2+3r+2=0$$
$$\Rightarrow r=-2\ (\because\ -4<r<-1 \text{ 또는 } 1<r<4)$$

이다. 이제 집합 A, B의 원소를 나열해 보면

$$A=\left\{\frac{1}{a_1}, -\frac{1}{2a_1}, \frac{1}{4a_1}, -\frac{1}{8a_1}, \frac{1}{16a_1}, -\frac{1}{32a_1}\right\}$$
$$B=\left\{-\frac{a_1}{4}, -\frac{a_1}{8}, -\frac{a_1}{16}, -\frac{a_1}{32}, -\frac{a_1}{64}, -\frac{a_1}{128}\right\}$$

인데 첫째항이 자연수이므로 집합 A의 음수인 원소는 3개고 집합 B의 원소는 모두 음수이다. 따라서

$$n(A\cap B)=3$$
$\Rightarrow$ 집합 A의 음수인 원소는 모두 집합 B의 원소다. …… ㉠

편의상 집합 A의 음수인 원소를 α_1, α_2, $\alpha_3\,(\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3)$이라 하고, 집합 B의 원소를 β_1, β_2, $\cdots$, $\beta_6\,(\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_6)$이라 하자.

$$\left\{-\frac{1}{2a_1}, -\frac{1}{8a_1}, -\frac{1}{32a_1}\right\}=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$

$$\left\{-\frac{a_1}{4}, -\frac{a_1}{8}, -\frac{a_1}{16}, -\frac{a_1}{32}, -\frac{a_1}{64}, -\frac{a_1}{128}\right\}$$
$$=\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6\}$$

이때 α_1, α_2, α_3은 공비가 $\dfrac{1}{4}$ 인 등비수열을 이루고 β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, β_6은 공비가 $\dfrac{1}{2}$ 인 등비수열을 이룬다는 점을 생각하면 $\alpha_1=\beta_1$ 또는 $\alpha_1=\beta_2$여야 ㉠을 만족시킬 수 있음을 알 수 있다.

β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6		
α_1		α_2		α_3			
	α_1		α_2		α_3		
		α_1		α_2		α_3	
			α_1		α_2		α_3
				α_1		α_2	
					α_1		α_2

$$\alpha_1=\beta_1 \text{ 또는 } \alpha_1=\beta_2$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2a_1}=-\frac{a_1}{4} \text{ 또는 } -\frac{1}{2a_1}=-\frac{a_1}{8}$$
$$\Rightarrow a_1^2=2 \text{ 또는 } a_1^2=4 \Rightarrow a_1=2\ (\because\ a_1\text{은 자연수})$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{1}{a_1}}{1-\frac{1}{r}}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3} \Rightarrow p+q=4$$

정답 4

30

●●●★ 8~10분

합성함수 미분 항등식

실수 전체의 집합에서 ❶ 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 삼차함수 $g(x)$가 있다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 상수 a가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

❷ $$a\left(f(x)\right)^2\left(e^{f(x)}-1\right)=e^{g(x)}-e$$

이다.

(나) $f(0)=0$, $f'(0)=2$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$이고 $8a-g(1)=pe+q$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

SCAN

기출 표현

❶ 이계도함수를 갖는 함수

이계도함수를 갖는다고 주어졌으니 풀이 중 f를 두 번 미분하는 과정이 있을 것이다.

❷ 항등식 해석

항등식은 적절한 값을 대입할 수 있고 미분해도 항등식, 적분해도 항등식이다. 한편, 240628이나 260628의 형태와 유사하니 기출처럼 좌변의 성질(극값, 변곡점 등)이 우변에도 나타나야 한다는 점을 이용하는 문제일 수도 있다.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이 1

FLOW 1 항등식 두 번 미분하기

조건 (나)를 보면

$$f(0)=0,\ f'(0)=2$$

이므로 $x=0$에서의 상황을 관찰해야 한다.

문제에서 주어진 항등식

$$a\left(f(x)\right)^2\left(e^{f(x)}-1\right)=e^{g(x)}-e \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$(\text{㉠의 좌변})|_{x=0}=0\ (\because\ f(0)=0)$$
$$(\text{㉠의 우변})|_{x=0}=e^{g(0)}-e$$
$$\Rightarrow g(0)=1$$

임을 알 수 있다.

한편, 함수 $f(x)$가 이계도함수를 갖기에

기출 표현 ❶, ❷

㉠의 양변을 한 번 미분해서 나온 항등식과
두 번 미분해서 나온 항등식 양변에도 $x=0$을 대입

해 볼 수 있다. 이때 주어진 항등식의 좌변을

$$ax^2\left(e^x-1\right)\circ f(x)$$

로 보자. 편의상 $h(x)=ax^2\left(e^x-1\right)$이라 하고 $h(x)$를 먼저 미분해 보면

$$h'(x)=2ax\left(e^x-1\right)+ax^2e^x$$
$$h''(x)=2a\left(e^x-1\right)+2axe^x+2axe^x+ax^2e^x$$
$$=2a\left(e^x-1\right)+4axe^x+ax^2e^x$$

이다.

이제 ㉠의 양변을 미분하면

$$\{h(f(x))\}'=\{e^{g(x)}-e\}'$$
$$\Rightarrow f'(x)h'(f(x))=g'(x)e^{g(x)} \quad \cdots\cdots \text{㉠}'$$

이고, 양변에 $x=0$을 대입하면

$$(\text{㉠}'\text{의 좌변})|_{x=0}=0\ (\because\ h'(0)=0)$$
$$(\text{㉠}'\text{의 우변})|_{x=0}=g'(0)e$$
$$\Rightarrow g'(0)=0$$

임을 알 수 있다.

이어서 항등식의 양변을 한 번 더 미분하면

$$f''(x)h'(f(x))+\{f'(x)\}^2h''(f(x))$$
$$=g''(x)e^{g(x)}+\{g'(x)\}^2e^{g(x)} \quad \cdots\cdots \text{㉠}''$$

이고, 양변에 $x=0$을 대입하면

$$(\text{㉠}''\text{의 좌변})|_{x=0}=0\ (\because\ h'(0)=0,\ h''(0)=0)$$
$$(\text{㉠}''\text{의 우변})|_{x=0}=g''(0)e\ (\because\ g'(0)=0)$$

$$\Rightarrow g''(0)=0$$

임을 알 수 있다.

지금까지 삼차함수 $g(x)$에 대해 얻은 정보를 정리하면 $g(0)=1,\ g'(0)=0,\ g''(0)=0$이므로 함수 $g(x)$를

$$g(x)=kx^3+1\ (k\neq 0\text{인 상수})$$

이라 할 수 있다.

FLOW 2 $f'(0)=2$ 이용하기

항등식을 두 번 미분해 $x=0$을 대입하는 동안 $f'(0)=2$를 이용하지 않았으므로 다른 방식으로 $f'(0)=2$를 이용해야 한다. 이때, 미분계수의 정의에 의해

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

이므로 항등식의 양변을 x^3으로 나눌 생각을 할 수 있다.
㉠의 양변을 x^3으로 나누면

$$a\cdot\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\frac{e^{kx^3+1}-e}{x^3}\quad(x\neq 0)$$

이므로 양변에 $\lim\limits_{x\to 0}$을 취하면

$$\lim_{x\to 0}a\cdot\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{kx^3+1}-e}{x^3}$$

이다. 좌변의 값부터 계산해 보면

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}a\cdot\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2\frac{e^{f(x)}-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}a\cdot\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}\\&=a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^3}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}\\&=a\cdot\{f'(0)\}^3\cdot 1\ \Rightarrow\ 8a\end{aligned}$$

이다. 이어서 우변의 값을 계산해 보면

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{kx^3+1}-e}{x^3}\ \Rightarrow\ e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{kx^3}-1}{x^3}\ \Rightarrow\ ke$$

이다. 따라서

$$8a=ke\ \Rightarrow\ k=\frac{8a}{e}$$

이다.

FLOW 3 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$을 통해 답 구하기

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}a\big(f(x)\big)^2\big(e^{f(x)}-1\big)=a(-1)^2\big(e^{-1}-1\big)$$

임을 알 수 있다. 즉, $\lim\limits_{x\to-\infty}a\big(f(x)\big)^2\big(e^{f(x)}-1\big)$이 수렴하므로 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{g(x)}-e$도 수렴해야 한다.

한편, $g(x)$는 삼차함수이므로

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\infty\ \text{ 또는 }\ \lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$$

인데 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{g(x)}-e$가 수렴하기 위해서는 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$이다.

$$\lim_{x\to-\infty}(\text{㉠의 좌변})=a\big(e^{-1}-1\big)$$
$$\lim_{x\to-\infty}(\text{㉠의 우변})=-e$$

$$\Rightarrow\ a\big(e^{-1}-1\big)=-e$$
$$\Rightarrow\ a=\frac{e^2}{e-1},\ k=\frac{8e}{e-1}\quad\left(\because\ k=\frac{8a}{e}\right)$$

$$\therefore\ 8a-g(1)=\frac{8e^2}{e-1}-\frac{8e}{e-1}-1=8e-1$$
$$\Rightarrow\ p+q=7$$

풀이 2

FLOW 1 항등식 양변을 x^3 으로 나누기

$g(0)=1$ 을 구한 이후 두 번 미분하는 과정 없이 ㉠의 양변을 x^3 으로 나눠 풀이할 수도 있다.

$$\lim_{x\to 0} a\cdot\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \frac{e^{f(x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{g(x)}-e}{x^3}$$

좌변의 값은 **풀이 1** 의 **FLOW 2** 와 똑같이 계산하면 $8a$ 임을 얻는다.

좌변이 수렴하므로 우변도 수렴해야 한다는 점을 이용하면

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{e^{g(x)}-e}{x^3}\\&= e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{g(x)-1}-1}{x^3}\\&= e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{g(x)-1}-1}{g(x)-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x^3}\end{aligned}$$

이다. 이때 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{g(x)-1}-1}{g(x)-1}=1$ 이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x^3} \text{ 이 수렴}$$
$$\Rightarrow g(x)=kx^3+1 \ (\because \ g(x)\text{ 는 삼차함수})$$

임을 얻을 수 있다. 이어서 우변의 값을 계산해 보면

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{kx^3+1}-e}{x^3} = e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{kx^3}-1}{x^3} = ke$$

이다. 따라서

$$8a=ke \ \Rightarrow \ k=\frac{8a}{e}$$

이다. 이후 풀이 과정은 **풀이 1** 의 **FLOW 3** 과 같다.

정답 7

CHECK

✔ 기출 표현

❶ 이계도함수를 갖는 함수

- [x] 항등식을 두 번 미분해 양변에 $x=0$ 을 대입했다.
- [x] **Recall** 260628(미적)

❷ 항등식 해석

- [x] $f'(0)=2$ 를 이용하기 위해 양변을 x^3 으로 나누고 $\lim_{x\to 0}$ 을 씌웠다. 이때 좌변이 수렴하면 우변도 수렴함을 이용하면 두 번 미분하는 과정이 없어도 풀이할 수 있었다.
- [x] **Recall** 260628(미적)

Recall

2026학년도 6월 미적 28번

실수 전체의 집합에서 ❶ 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times e^b$ 의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여

❷ $\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$

이다.

(나) $f(-3)f(3)<0$, $f'(2)>0$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

정답 ①

Insight

비록 작년 수능에 등장하지 않았지만 항등식 해석은 작년 6월, 9월에 모두 출제된 주제로 충분한 대비가 필요합니다. 특히 항등식을 해석할 때는 좌변의 성질(극값, 변곡점 등)이 우변에도 나타나야 한다는 점을 유의하는 것이 좋습니다. 이 문항은 좌변의 극한이 수렴하면 우변의 극한도 수렴해야 한다는 점을 핵심으로 출제했습니다.