2027학년도 5월 더 프리미엄 모의 대학수학능력시험
수학 영역(미적분) 주요 문항 해설

공통 영역은 크게 어렵지 않은 거 같아서 따로 해설은 작성하지 않겠습니다.
미적분 주요 문항(28, 30번) 해설 작성해 보았습니다. 학습에 도움이 되시면 좋겠습니다.

ps) 문항 이미지는 제가 직접 타이핑해서 캡쳐 했습니다. ㅇㅂㅇㅋㅇㅂ로 오해마시길;;;

28. 실수 전체의 집합에서 증가하고 연속인 함수 $f(x)$와 두 상수 $a\,(a \neq 0)$, b가 모든 실수 x에 대하여

$$\sin\left(af(x)\right) + bf(x) = ax$$

를 만족시킬 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 m의 값의 집합이 $\left\{m \,\middle|\, 3m^2 - 3ma + 1 \geq 0\right\}$이다.

모든 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = mx + t$가 오직 하나의 실근을 갖는다.

점 $(k, f(k))$가 곡선 $y = f(x)$의 변곡점이 되도록 하는 모든 양수 k를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 k_n이라 하자. $k_1 \times f'(k_4)$의 값은? [4점]

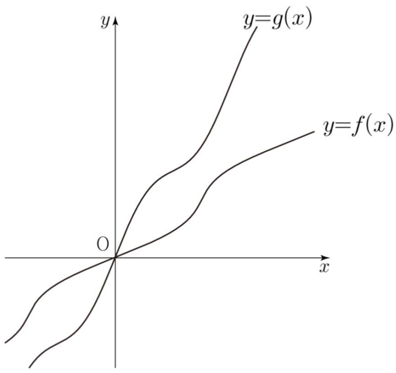
① $\dfrac{\pi}{8}$　　② $\dfrac{\pi}{4}$　　③ $\dfrac{3}{8}\pi$　　④ $\dfrac{\pi}{2}$　　⑤ $\dfrac{5}{8}\pi$

주어진 항등식에서 a를 나누면

$$\frac{1}{a}\sin\left(af(x)\right) + \frac{b}{a}f(x) = x$$

이므로 함수 $f(x)$와 $g(x) = \dfrac{1}{a}\sin ax + \dfrac{b}{a}x$는 역함수 관계이다.

이를 그림으로 표현하면 〈그림 1〉과 같다.

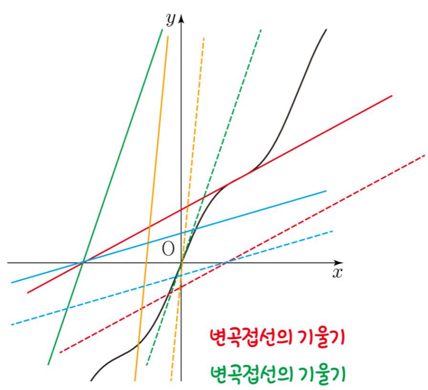


〈그림 1〉

박스 조건을 보면 '$y = g(x)$와 $y = \dfrac{1}{m}(x - t)$와 만나는 점의 개수가 1이다'로 해석해도 무방하다.

$g'(x) = \cos ax + \dfrac{b}{a}$이므로 $g(x)$의 변곡점의 x좌표는

$$x = \frac{2m}{a}\pi \ (m\text{은 정수})\text{이다.}$$



〈그림 2〉

〈그림 2〉와 같이 $\dfrac{1}{m}$이 두 변곡 접선의 기울기 사이의 수라면 모든 실수 t에 대해 교점이 1이 되지 않으므로 주어진 집합의 경계점은 변곡접선의 기울기인 $\dfrac{1}{m_1}$, $\dfrac{1}{m_2}$이다.

$3m^2 - 3am + 1 = 0$의 실근이 m_1, m_2이면 $\dfrac{1}{m_1}$, $\dfrac{1}{m_2}$ **을 실근으로 갖는 이차방정식은** $m^2 - 3am + 3 = 0$ **이다.** $g(x)$의 변곡접선의 기울기는 $\dfrac{b}{a}+1$, $\dfrac{b}{a}-1$이므로 두 식을 더해주면

$\frac{2b}{a}=\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}=3a$ 즉 $\frac{b}{a}=\frac{3a}{2}$ 임을 얻는다.

이제 $\frac{3}{2}a-1$을 $m^2-3am+3=0$에 대입해주면 $a=\frac{4}{3}$임을 얻는다.

$f(x)$의 변곡점의 넘버링은 $g(x)$의 변곡점의 넘버링과 일치하므로

k_1 =($g(x)$의 변곡점의 y좌표), $f'(k_4)$=($g(x)$의 변곡접선의 기울기의 역수)

이다. $g'(x)=\cos ax+3a$에서 $k_1=g\left(\frac{\pi}{a}\right)=\frac{b}{a^2}\pi=\frac{3}{2}\pi$이고

$$f'(k_4)=\frac{1}{g'\left(\frac{4\pi}{a}\right)}=\frac{1}{\frac{b}{a}+1}=\frac{1}{3}$$

이므로 $k_1\times f'(k_4)=\frac{3}{2}\pi\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}$, 정답은 ④이다.

(comment) 역시 교점 개수 파악하는 유형은 변곡점이 핵심이었다. 이런 유형을 해결할 때에는 직선을 마구 그려볼 게 아니라, 우리가 잘 알고 있는 교점 개수의 경계점인 변곡 접선을 기준으로 기울기를 살짝 바꿔가면서 곡선과의 교점을 파악하는 게 중요하다. 또, 이 문제에서는 고1 수학인 두 실근이 역수인 이차방정식을 알고 있으면 계산을 대폭 줄일 수 있는 문항이기도 했다. 이런 배경지식이 많으면 문항 풀이도 간결해지니 몰랐으면 이번 기회에 알아두면 좋겠다.

30. 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $g(x)$가 상수 $a\,(a>0)$과 모든 실수 x에 대하여

$$f\big(g(x)\big)=x^3e^{ax}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, $-e\times a\times\dfrac{g(0)}{f(2)}$의 값을 구하시오.
(단, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^x=0$) [4점]

(가) $g'(0)=-2$
(나) $\{g(x)\mid x\le 0\}=\{y\mid 1\le y\le 2\}$

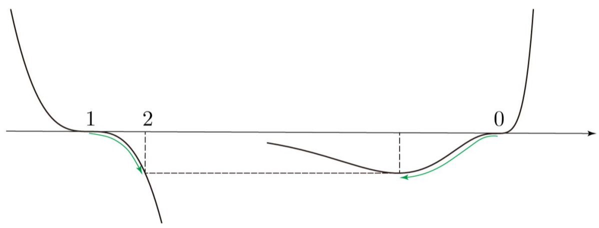
주어진 $g(x)$를 실수 t에 대하여

'곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t^3e^{at}$의 교점의 x좌표가 $g(t)$'

와 같이 바라보자.

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 가지려면 $y=x^3e^{ax}$가 $x=0$에서 삼차인수를 가지므로 f도 x축과 만나는 점에서 삼차인수를 가져야 한다. 또 $g'(0)<0$이므로 $f(x)$는 감소함수이어야 한다.
(by 합성함수의 논리)

(나)를 그래프로 해석해보면 다음과 같다.



즉, $f(x)=p(x-1)^3$이고, $f(2)$가 $y=x^3e^{ax}$의 최솟값이다.

$y'=\left(3x^2+ax^3\right)e^{ax}$이므로 $y=x^3e^{ax}$는 $x=-\dfrac{3}{a}$에서 최소이다. $\therefore p=-\dfrac{27}{a^3e^3}$

$g(x)=f^{-1}\left(x^3e^{ax}\right)$이므로

$$(g'(0))^3=\left(\lim_{x\to0}\frac{f^{-1}\left(x^3e^{ax}\right)-1}{x}\right)^3=\lim_{x\to0}\frac{\left(f^{-1}\left(x^3e^{ax}\right)-1\right)^3}{x^3e^{ax}}\times\frac{x^3e^{ax}}{x^3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^3}{p(x-1)^3}=-8$$

즉 $p=-\dfrac{1}{8}$이다. 또한 $a=\dfrac{6}{e}$이다. $f(2)=-\dfrac{1}{8}$, $g(0)=1$이므로, 따라서

$-e\times a\times\dfrac{g(0)}{f(2)}=-e\times\dfrac{6}{e}\times(-8)=48$이다.

comment) 너무너무너무너무 국밥 유형이다. 교점함수, 인수개수, 합성함수, 항등식 해석 등등 제대로 되어 있지 않으면 해결할 수 없었을 것이다. 이 문제를 해결했다면 매우 잘했지만, 해결하지 못했다면 반성하고 제대로 학습하시길 바란다.