

해설을 통해 생각의 길을 익히는 시간



SOLUTION

02



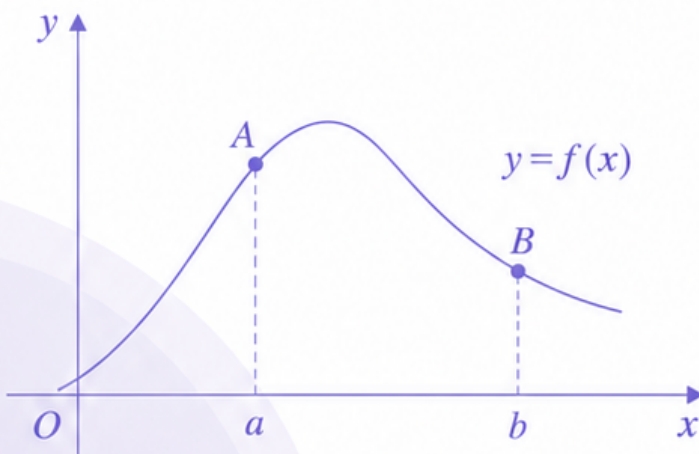
CHAPTER

02

2회차 해설편

풀이의 흐름을 따라, 개념을 완성하는 시간

문제를 어떻게 바라보고 해결하는지 차근차근 따라가며,
핵심 개념과 사고 과정을 정리해 봅시다.



한 단계씩 천천히 이해해 보세요.

정답보다 중요한 것은
생각의 과정입니다.





SOLUTION

격차 N제 | 해설편



CHAPTER 01

| 정답 및 해설

빠른 정답

ANSWER KEY

009 ①

010 ②

011 ④

012 ③

013 ⑤

014 ⑤

020 6

021 64

022 265



009

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_0^x f(t) dt = x^3 + \left(\int_0^2 f(t) dt \right) x^2$$

를 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은?

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

문항 정보

내용 영역	정적분의 뜻을 안다.
행동 영역	문제해결 능력
타겟 등급	4등급



풀이 과정

STEP-BY-STEP

0

풀이 계획

어떤 문제든 가장 먼저 해야 할 일은 "구해야 하는 값이 무엇인가?"를 확인하는 것입니다.

아무 생각 없이 관습적으로 시작하기 전에, "목표를 이루기 위해 어떤 순서로 접근해야 할까?"라는 전략을 가지고 시작해야 합니다.

우리는 $f(2)$ 를 구하기 위해 양변 미분부터 가장 먼저 실행할 것입니다.

1

양변 미분하기

주어진 항등식의 양변을 x 에 대해 미분하면:

$$f(x) = 3x^2 + 2x \int_0^2 f(t) dt$$

$x = 2$ 를 대입하면:

$$f(2) = 12 + 4 \int_0^2 f(t) dt$$

따라서 $\int_0^2 f(t) dt$ 하나만 구하면 됩니다.

2

필요한 값 구하기

앞서 확인했듯

$$\int_0^2 f(t) dt$$

의 값만 구하면 되는 상황입니다. 이때 처음에 주어진 항등식의 좌변이 이미

$$\int_0^x f(t) dt$$



형태이고 우변에

$$\int_0^2 f(t) dt$$

의 값이 포함되어 있음에 주목합니다.

즉, 문제를 풀다보면

미분한 식을 다시 적분할 이유가 없음을 깨닫습니다. 즉

처음에 주어진 원래의 식에 $x = 2$ 를 대입하면 목표하는 적분값을 바로 얻을 수 있습니다.

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(t) dt &= 2^3 + \left(\int_0^2 f(t) dt \right) \cdot 2^2 \\ &= 8 + 4 \int_0^2 f(t) dt \end{aligned}$$

정리하면:

$$\begin{aligned} -3 \int_0^2 f(t) dt &= 8 \\ \Rightarrow \int_0^2 f(t) dt &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

3

최종 계산

Step 1의 식에 대입합니다.

$$\begin{aligned} f(2) &= 12 + 4 \times \left(-\frac{8}{3} \right) \\ &= \frac{36}{3} - \frac{32}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

ANSWER ①

내 풀이 다시보기

CHECK POINT

① 미분 후 $\int_0^2 f(t) dt = a$ 로 치환하고 다시 적분 했나요?

$f(x) = 3x^2 + 2ax$ 를 $\int_0^2 f(x) dx = a$ 에 대입 하는 방식도 정답에 도달하지만, 불필요한 적분 계산을 반복해 시간이 낭비됩니다. "문는 값을 구하려면 뭘 해야하지?"를 먼저 설계하는 습관을 들이세요.



010

방정식

$$(x^2 - 2^{10}) \times (x^3 - 2^{10}) \times \cdots \times (x^{10} - 2^{10}) = 0$$

을 만족시키는 모든 실수 x 의 값을 작은 수부터
크기순으로 나열한 것을

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \quad (m \text{은 자연수})$$

라 하자. $m \times \alpha_1$ 의 값은?

- ① -480 ② -448 ③ -320
④ 240 ⑤ 480

문항 정보

내용 영역	거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
행동 영역	추론 능력
타겟 등급	2.5등급



풀이 과정

STEP-BY-STEP

0

풀이 설계 구하는 값에서 출발하기

구해야 하는 값은 $m \times \alpha_1$ 입니다.

그런데 복잡한 방정식을 전부 해결하거나 모든 실근을 끝까지 정확히 크기순으로 나열할 필요는 없고, 문제의 묻는 값에 따르면 다음 두 가지를 알면 충분합니다.

실근의 전체 개수 m , 가장 작은 실근 α_1

한편 방정식이 0이 되려면 곱해진 인수들 중 하나가 0이 되어야 합니다. 따라서 각 인수

$$x^n - 2^{10} = 0 \quad (n = 2, 3, \cdots, 10)$$

에서 나오는 실근들을 앞에서부터 몇 개 구해 보며, m 과 α_1 을 어떻게 결정할 수 있을지 생각해보겠습니다. 이런 과정을 유식한 말로 나열을 통한 추론, 발견적 과정이라 해요.

1

앞에서부터 나열하며 필요한 정보 찾기

앞의 인수부터 차례대로 살펴보겠습니다. 먼저,

$$x^2 - 2^{10} = 0 \text{ 이면 } x = \pm\sqrt{2^{10}}$$

이 식은 이차방정식이니 풀이하기 쉽죠? 사실 출제자로서 말하자면, 일부러 복잡한 방정식을 풀이하기 쉬우라고 이차방정식을 앞에다 배치한 거예요.

출제자의 한마디

낮은 등급의 학생이더라도 비주열에 쫓지 않고 '나열'을 통해 '차례차례'해보면서 '원리를 찾아가자'라고 생각했다면 문제 풀이가 훨씬 쉽도록 일부러 구성한 문제예요.

다음으로 삼차방정식 $x^3 - 2^{10} = 0$ 을 해결해야 하는데, 이때 문득 떠오르는 개념이 있습니다.



거듭제곱근의 특징

$a > 0$ 일 때, a 의 n 제곱근 중 실수인 것은

- n 이 홀수일 때: $+\sqrt[n]{a}$ 로 1개이다.
- n 이 짝수일 때: $\pm\sqrt[n]{a}$ 로 2개이다.

따라서

$$x^3 - 2^{10} = 0 \text{이면 } x = +\sqrt[3]{2^{10}}$$

뿐이란 걸 알 수 있겠죠? 마찬가지로

$$x^4 - 2^{10} = 0 \text{이면 } x = \pm\sqrt[4]{2^{10}}$$

입니다.

이제 비교적 간단해 보이는 실근의 개수부터 바로 구해봅시다. 아하! 방정식이 복잡해 보였지만 결국 실근의 개수는 짝수 차수에서는 양수와 음수 실근이 하나씩 나와 2개, 홀수 차수에서는 양수 실근만 하나 나와 1개씩 나오니까, 이들 개수를 더하면 될 것 같네요.

2차부터 10차까지 중에서 짝수 차수는

$$2, 4, 6, 8, 10$$

으로 5개이고, 홀수 차수는

$$3, 5, 7, 9$$

로 4개이므로 전체 실근의 개수는

$$m = 5 \times 2 + 4 \times 1 = 14$$

입니다.

2

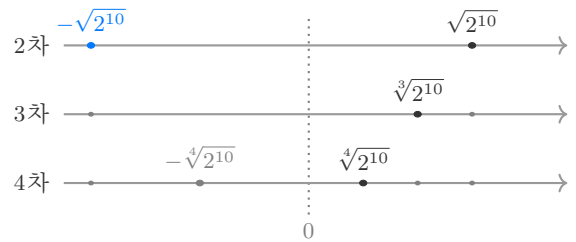
α_1 찾기 관찰에 의한 추측

이제 가장 작은 실근 α_1 만 찾으면 풀이 종료입니다.

그동안 2차, 3차, 4차에서 구한 실근,

$$x = 2$$

을 생각해 보면, 이 중에서 가장 작은 값은 무엇일까요?



아무래도 음수 실근인

$$2\text{차} : -\sqrt{2^{10}}, \quad 4\text{차} : -\sqrt[4]{2^{10}}$$

만 비교해서 가장 작은 친구를 고르면 될 것 같은데,

$$-\sqrt{2^{10}} < -\sqrt[4]{2^{10}}$$

이므로, 2차에서 나온 음수 실근이 4차에서 나온 음수 실근보다 더 작습니다.

즉 우리가 구한 실근들 중에서 2차에서 나온 실근이 가장 작네요.

아무래도

$$-\sqrt{2^{10}} < -\sqrt[4]{2^{10}}$$

인 것으로 보아

$$-\sqrt{2^{10}} < -\sqrt[4]{2^{10}} < -\sqrt[6]{2^{10}} < \dots$$

이런 식으로 차수가 커질수록 음수 실근은 점점 0에 가까워지는 것 같습니다.

따라서

$$\alpha_1 = -\sqrt{2^{10}} = -32$$



로 추측할 수 있습니다. $m = 14$, $\alpha_1 = -32$ 이므로

$$m \times \alpha_1 = 14 \times (-32) = -448$$

ANSWER ②

3 정당화하기 과연 α_1 이 2차에서 나올까?

시험장에서는 위와 같이 앞에서부터 나열해 보며 판단해도 답을 맞추는 데는 충분합니다.

다만 조금 더 정확히 확인해 보면, 짝수 차수 n 에서 나오는 음수 실근은

$$-2^{\frac{10}{n}}$$

입니다. 짝수 $n = 2, 4, 6, 8, 10$ 에 대해 n 이 커질수록

$$\frac{10}{n}$$

은 작아지므로 $2^{\frac{10}{n}}$ 도 작아집니다. 따라서

$$-2^{\frac{10}{n}}$$

은 점점 0에 가까워지고, 가장 작은 값은 $n = 2$ 일 때입니다.

내 풀이 다시보기

CHECK POINT

1 모든 근을 모두 나열하여 풀이했나요?

이 문제에서 모든 근을 나열했다면 아래 2가지 중 한 가지 이상의 문제점을 갖고 있을 수 있습니다.

- (1) **묻는 값에 집중하지 않고 관성적으로** 보이는 모든 값, 즉

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$$

를 전부 구하려 한 경우

- (2) 발견적인 과정에 익숙하지 않은 경우 (추론 능력의 부족)

(1)번의 경우, 눈에 보이는 대로 풀이를 진행하기 전에 묻는 값을 구하기 위해 필요한 정보가 무엇인지 설계를 한 후 풀이를 진행하는 습관이 필요합니다.

(2)번의 경우, 이 문제를 비롯하여 다른 기출 문제들을 스스로 예시를 들어 해결하는 과정을 통해 추론 능력을 향상시켜야 합니다.



■ 심화/유사문항

10

나열, 그리고 원리 찾기

자연수 n 에 대하여 방정식

$$(x^2 - 2^{10}) \times (x^3 - 2^{10}) \times \cdots \times (x^n - 2^{10}) = 0$$

을 만족시키는 모든 실수 x 의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \quad (m \text{은 자연수})$$

라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 n 의 값의 합은?

$-2^{-\frac{1}{5}} < \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} < 0$ 인 자연수 k ($k < m$)가 존재한다.

- ① 9 ② 12 ③ 15
④ 18 ⑤ 21



011

수직선 위를 움직이는 점 P의 속도는

$$v(t) = \begin{cases} t^2 - 2t + 1 & (0 \leq t < 1) \\ |t - 2| - 1 & (1 \leq t < 3) \\ 0 & (t \geq 3) \end{cases}$$

이다. 두 점 O(0), A(1)에 대하여 임의의 시각에서 점 P는 선분 OA 위에 있을 때, 시각 $t = 0$ 에서의 위치는?

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

문항 정보

내용 영역	속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.
행동 영역	추론 능력, 문제해결능력
타겟 등급	3등급

풀이 과정

STEP-BY-STEP

0

풀이 설계 "말"을 "수학"으로 변환하자

속도-거리 문제에서 먼저 해야 할 일은 문제의 말을 수학적 언어로 바꾸는 것입니다.

점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하겠습니다. 임의의 시각에서 점 P가 선분 OA 위에 있다는 말은

$$0 \leq x(t) \leq 1$$

을 만족해야 한다는 뜻입니다.

따라서 이 문제는

이 문제의 정의

$x(t)$ 의 최댓값과 최솟값이 0과 1 사이에 들어오도록 초기 위치 $x(0)$ 을 정하는 문제입니다.

한편 $x'(t) = v(t)$ 이므로, 속도 $v(t)$ 의 부호를 보면 위치 $x(t)$ 의 증가와 감소를 알 수 있습니다. 초기 위치에 따라 그래프가 위아래로 움직일 수는 있지만, 증가·감소의 개형은 이미 정해져 있습니다. 따라서

$$\text{선분 위에 있다} \iff 0 \leq x(t) \leq 1$$

로 바꾸는 것이 이 문제의 출발점입니다. 그다음에는 $v(t)$ 의 부호를 이용해 $x(t)$ 의 최대·최소 위치를 찾을 것입니다. 먼저 속도 그래프를 보고 $x(t)$ 의 증감표를 작성해 봅시다.

1

증감 파악 속도 그래프에서 위치 그래프의 개형 읽기

주어진 속도 그래프에서

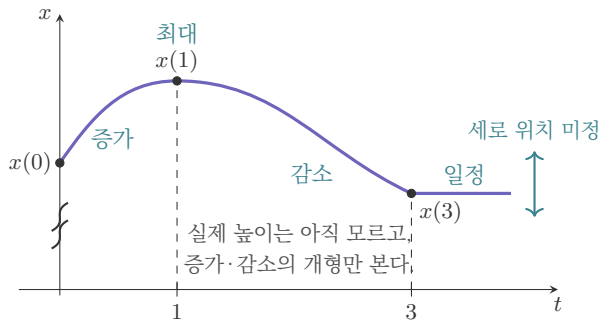
$$0 \leq t \leq 1 \text{에서는 } v(t) \geq 0, \quad 1 \leq t \leq 3 \text{에서는 } v(t) \leq 0$$

이고 또한 $t > 3$ 에서는 $v(t) = 0$ 이므로 위치는 일정하므로, 증감표는 아래와 같습니다.



t	0	...	1	...	3	...
$v(t)$	+	+	0	-	0	0
$x(t)$	$x(0)$	↗	최대	↘	최소 후보	일정

따라서 $x(t)$ 는 $0 \leq t \leq 1$ 에서 증가하고, $1 \leq t \leq 3$ 에서 감소한 뒤, $t > 3$ 에서 멈춥니다. 이를 이용해 위치 그래프를 적당히 그려보겠습니다.



따라서 최댓값은 무조건 $x(1)$ 입니다. 최솟값은 처음 위치 $x(0)$ 일 수도 있고, 감소가 끝난 뒤의 위치 $x(3)$ 일 수도 있습니다.

생각의 흐름

여기까지의 핵심은 간단합니다.

$$x(1) \leq 1, \quad x(0) \geq 0, \quad x(3) \geq 0$$

이 세 조건을 확인하면 됩니다.

2

발견적 추론 최대가 위쪽 경계에 닿는 경우 생각하기

이제 $x(0)$ 을 정해야 합니다. 근데 잘 생각해 보세요.

조건은 $0 \leq x(t) \leq 1$ 처럼 범위로 주어졌지만, 문제에서는 $x(0)$ 의 하나의 값을 묻고 있습니다. 증감표에서 최댓값이 $x(1)$ 이므로, 우선 $x(1) \leq 1$ 이어야 합니다.

만약 $x(1) < 1$ 이라면 위치 그래프 전체를 조금 위로 올릴

여지가 있습니다. 그러면 $x(0)$ 이 하나로 정해지기 어렵습니다.

답은 하나입니다! 여러분 답은 값 하나!!

"가능한 $x(0)$ 의 범위를 구하시오"가 아니라,

" $x(0)$ 의 값은?"입니다!!!

그래서 먼저 최대가 위쪽 경계에 닿는 경우, 즉

$$x(1) = 1$$

인 경우를 생각합니다.

발견적 판단

증감표로 최대가 $x(1)$ 에서 나온다는 것을 확인했습니다.

따라서 최대값이 아직 1보다 작으면 그래프를 위로 올릴 수 있다는 점을 떠올리면,

문는 값의 형태를 고려해볼 때 $x(1) = 1$ 을 먼저 잡는 흐름이 자연스럽습니다.

이제 $x(1) = 1$ 에서 출발해 $x(0)$ 을 구하고, 마지막에 $x(0) \geq 0$ 이고 $x(3) \geq 0$ 인지만 확인하면 됩니다. 근데 $x(0)$ 은 어차피 구할 예정이므로, 결국 $x(3) \geq 0$ 인지만 마지막에 확인하면 됩니다.

참고로 답이 유일한지도 확인하지 않아도 됩니다. 이미 질문에서 유일하다고 했으니까요!

3

초기 위치 결정 첫 번째 이동량은 정적분으로 계산하기

$0 \leq t \leq 1$ 에서는

$$v(t) = t^2 - 2t + 1$$

입니다. 이 구간에서 위치는 증가하고, 증가량은

$$x(1) - x(0) = \int_0^1 (t^2 - 2t + 1) dt = \left[\frac{t^3}{3} - t^2 + t \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$



입니다. $x(1) = 1$ 로 가정했으므로

$$1 - x(0) = \frac{1}{3} \implies x(0) = \frac{2}{3}$$

입니다.

4

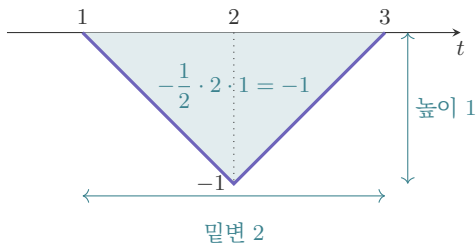
조건 검증 아래쪽 경계까지 확인하기

이제 구한 값이 실제 조건을 만족하는지 확인합니다.

$$x(0) = \frac{2}{3}, \quad x(1) = 1$$

이므로 위쪽 경계 $x = 1$ 은 정확히 만족합니다.

남은 것은 $1 \leq t \leq 3$ 에서 얼마나 내려가는지 확인하는 것입니다. 이 구간의 속도 그래프는 t 축 아래에 있는 삼각형입니다.



$$1 \leq t \leq 3$$

$$x(1) = 1 \rightarrow x(3) = 0$$

따라서

$$x(3) - x(1) = -1 \implies x(3) = 0$$

입니다. 즉

$$x(1) = 1, \quad x(0) = \frac{1}{3} \geq 0, \quad x(3) = 0$$

이므로 $0 \leq x(t) \leq 1$ 을 모든 시각에서 만족합니다.

따라서 시각 $t = 0$ 에서의 위치는

$$\boxed{\frac{2}{3}}$$

입니다.

ANSWER ④

내 풀이 다시보기

CHECK POINT

1 문장의 조건을 위치의 범위로 바꾸었나요?

점 P가 선분 OA 위에 있다는 말은 $0 \leq x(t) \leq 1$ 이라는 뜻입니다. 이 변환이 풀이의 출발점입니다.

2 위치 그래프의 최대·최소 위치를 먼저 찾았나요?

$v(t)$ 의 부호를 보면 $x(t)$ 는 $0 \leq t \leq 1$ 에서 증가하고, $1 \leq t \leq 3$ 에서 감소합니다. 따라서 최대는 $x(1)$, 최소 후보는 $x(0)$ 과 $x(3)$ 입니다.

3 구한 값이 조건을 만족하는지 확인했나요?

$x(1) = 1$ 로 두면 $x(0) = \frac{2}{3}$ 입니다. 이후 $1 \leq t \leq 3$ 에서 1만큼 감소하여 $x(3) = 0$ 이 되므로, 모든 시각에서 $0 \leq x(t) \leq 1$ 을 만족합니다.



012

상수 k ($k > 0$)에 대하여 곡선 $y = \sin x$ 와 직선 $y = k$ 이 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 만나는 점을 P, 곡선 $y = \sin x$ 와 직선 $y = -k$ 가 구간 $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$ 에서 만나는 점을 Q 라 하자.

선분 PQ 의 중점 M 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = \sin x$ 와 만나는 점을 R 이라 하자.

삼각형 PQR 의 넓이를 S_1 , 삼각형 MRO 의 넓이를 S_2 라 하자. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{3}$ 일 때, 선분 MR 의 길이는? (단, O 는 원점이다.)

- ① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

문항 정보

내용 영역	삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
행동 영역	문제해결 능력, 추론 능력
타겟 등급	2등급



풀이 과정

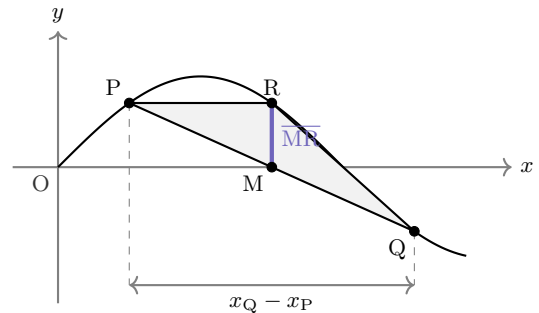
STEP-BY-STEP

0

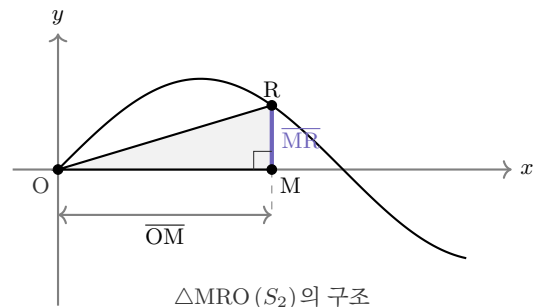
풀이 설계 구하는 값 $\overline{MR}$ 에서 출발하는 역추적

최종적으로 구해야 하는 값은 $\overline{MR}$ 입니다. 그런데 문제에 두 삼각형 넓이의 비 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{3}$ 조건이 주어졌네요.

다시 말하지만, 구하는 값은 $\overline{MR}$ 입니다. 선분 MR의 길이를 구하기 위해서는 결국 점 M의 x 좌표(R의 좌표와 같음)를 알아야 합니다. 이제부터 두 삼각형 PQR과 MRO의 넓이 비를 점 M의 좌표의 관점에서 해석하려 노력해야 합니다.



$\triangle PQR$ (S_1)의 구조



$\triangle MRO$ (S_2)의 구조

위 그림과 같이 두 삼각형의 넓이를 식으로 나타내면

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \overline{MR} \cdot (x_Q - x_P)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{OM} \cdot \overline{MR}$$



입니다. 즉

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{MR} \cdot (x_Q - x_P)}{\frac{1}{2} \cdot \overline{OM} \cdot \overline{MR}} = \frac{x_Q - x_P}{\overline{OM}} = \frac{4}{3}$$

입니다. 결국 점 M의 x 좌표인 $\overline{OM}$ 의 길이를 구하려면, 두 교점 P와 Q의 x 좌표 차이($x_Q - x_P$)를 알아야 함을 깨달을 수 있습니다.

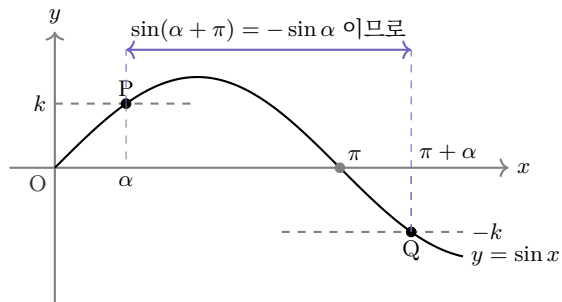
ANSWER



1

교과 개념의 적용 삼각함수의 대칭성과 x 좌표 차이

이때, $x_Q - x_P$ 의 값은 삼각함수의 그래프의 성질에 의해 π 로 유지됨을 바로 파악 가능합니다.



실제 단계에서 세운 넓이 비 관계식에 $x_Q - x_P = \pi$ 와 $\overline{OM} = t$ 를 대입합니다.

$$\frac{\pi}{t} = \frac{4}{3}$$

따라서 점 M과 점 R의 x 좌표인 t 의 값은 즉각적으로도 출됩니다.

$$t = \frac{3\pi}{4}$$

이제 최초의 목표였던 $\overline{MR}$ 을 구합니다. 점 R은 x 좌표가 t 이고 곡선 $y = \sin x$ 위에 있으므로, $y_R = \sin t$ 가 됩니다. 점 M의 y 좌표는 0이므로 $\overline{MR} = \sin t$ 입니다. 앞서 구한 $t = \frac{3\pi}{4}$ 를 대입합니다.

$$\overline{MR} = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



내 풀이 다시보기

CHECK POINT

1 혹시 S_1 을 구할 때 직선 PQ와 점 R 사이의 거리를 이용했나요?

선분 MR이 y 축에 평행하다는 기하학적 특징을 놓치면 불필요하게 복잡한 계산에 빠지게 됩니다. 수직 또는 수평인 선분은 넓이 계산의 가장 강력한 도구이므로, 이를 밑변으로 삼아 삼각형을 분할하는 설계를 우선적으로 고려해야 합니다.

2 S_1 과 S_2 를 각각 독립된 값으로 끝까지 계산하려 했나요?

문제에서 넓이의 '비'를 제시한 것은 공통 요소인 $\overline{MR}$ 을 소거하라는 강력한 힌트입니다. 값을 각각 구하기 전에 비례식의 형태로 엮어서 점 R의 x 좌표 관점으로 식을 단순화하는 과정이 필요합니다.

3 관습적으로 점 P의 x 좌표를 미지수 α 로 잡지는 않았나요?

결국 마지막에 구해야 하는 값은 점 R의 y 좌표입니다. 처음부터 R의 x 좌표를 직접 미지수로 설정했다면 추가적인 각변환 공식 없이 풀이를 더 간결하게 마무리할 수 있었을 것입니다.



013

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 와 네 실수 a_1, a_2, a_3, a_4 ($a_1 < a_2 < a_3 < a_4$)는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\{f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)\} \subset \{-1, 1\}$

(나) $n = 1, 2, 3$ 일 때, 열린구간 (a_n, a_{n+1}) 에서 방정식 $f'(x) = 0$ 는 실근을 갖지 않는다.

$a_2 = 0, a_3 = 1$ 일 때, $f(2)$ 의 값은?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

문항 정보

내용 영역	함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
행동 영역	추론 능력
타겟 등급	2등급

풀이 과정

STEP-BY-STEP

0

풀이 계획

문제에서 묻는 값은 $f(2)$ 입니다. 묻는 값만 보고 정확한 설계를 하기 어려우므로, 박스 조건을 만족하는 함수를 찾아 박스 밑 조건으로 계산하여 마무리해 보겠습니다.

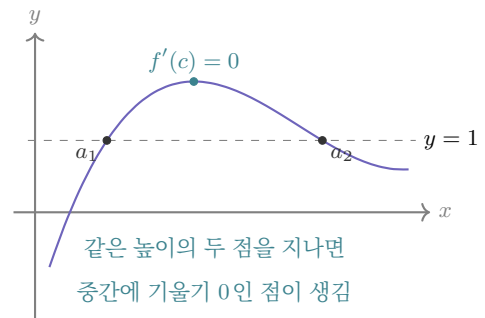
(가) 조건을 보니 네 점 $(a_1, f(a_1)), (a_2, f(a_2)), (a_3, f(a_3)), (a_4, f(a_4))$ 의 함수값은 모두 -1 또는 1 입니다. 즉, 그래프는 $y = 1$ 또는 $y = -1$ 위의 점들을 차례대로 지나야 합니다.

(나) 조건을 보니 좀 더 명확해지네요. 주어진 구간에 $f'(x) = 0$ 인 x 가 없도록 1 과 -1 중 하나를 택해야 합니다. 문제가 이렇게 읽혀야 합니다.

1

시도 1: $f(a_1) = f(a_2) = \dots = 1$

그래서 일단 아무거나 가정해볼텐데, 이럴 때는 말 그대로 **아무거나** 해보는 것이 좋습니다. 예를 들어 $f(a_1) = f(a_2) = \dots = 1$ 이라고 해보겠습니다.



가정한 대로 그려봤더니 그래프에서 중간에 접선의 기울기가 0인 점이 생겨버립니다.

이때 문득 **롤의 정리**를 떠올릴 수 있습니다. $f(a_1) = f(a_2)$ 이면 구간 내에 $f'(c) = 0$ 인 c 가 반드시 존재하게 되네요.



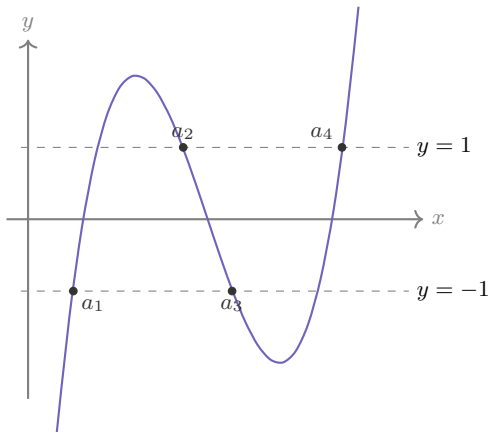
핵심 결론

이웃한 두 점의 함수값은 반드시 서로 달라야 합니다. 즉, $f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)$ 는 -1 과 1 이 번갈아 나타나야 합니다.

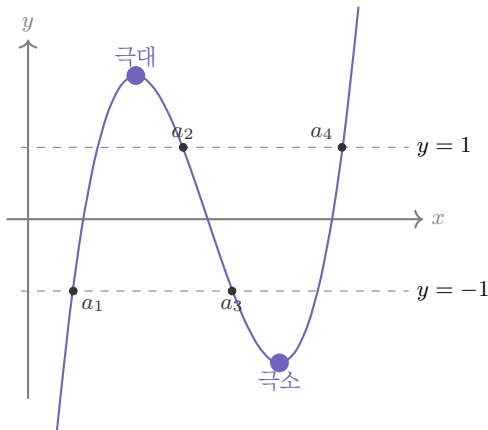
2

시도 2: 그림 번갈아 찍어 보면?

이제 값이 번갈아 나타나야 하므로, 자연스럽게 다음과 같은 그림을 떠올릴 수 있습니다. $-1 \rightarrow 1 \rightarrow -1 \rightarrow 1$. 즉, $f(a_1) = -1, f(a_2) = 1, f(a_3) = -1, f(a_4) = 1$ 인 모양입니다. 문제에서 $a_2 = 0, a_3 = 1$ 이므로 $f(0) = 1, f(1) = -1$ 이라고 생각할 수 있습니다.



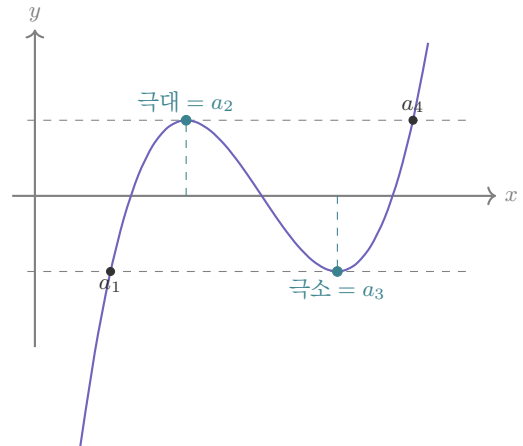
그런데 좀 이상한 점이 있습니다.



3

시도 3: 그런데 조건 (나)를 다시 보면?

아하! 극대점과 극소점이 딱 구간의 경계인 $x = a_2, x = a_3$ 에 오면 어떨까요?



이 경우 놀랍게도 각 구간에서 극값을 갖지 않네요!

박스 조건에서 적절한 개형을 찾아낸 것 같으니 박스 밑 조건으로 내려가 계산을 해봅시다.

4

함수식 구하기

$a_2 = 0, a_3 = 1$ 이므로 $f'(0) = 0, f'(1) = 0$ 이고, $f(0) = 1, f(1) = -1$ 입니다. 식이 4개가 확보되었으니 문제를 푼 것과 마찬가지입니다. $f'(x)$ 는 두 근 $0, 1$ 을 가지므로 최고차항의 계수를 $k > 0$ 이라 하면,

$$f'(x) = 3kx(x - 1)$$



입니다. 적분하면

$$f(x) = kx^3 - \frac{3}{2}kx^2 + C$$

에서

$$f(0) = 1, \quad f(1) = -1$$

을 대입하여 연립해서 계산하면

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$$

입니다.

5

검증

만족하는 함수를 찾았다면 해당 함수가 실제로 조건을 만족하는지 확인해야 합니다.

$$f'(x) = 12x(x-1)$$

이므로 $f'(x) = 0$ 인 지점은 오직

$$x = 0, \quad x = 1$$

뿐입니다. 즉, 열린구간

$$(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4)$$

안에는 $f'(x) = 0$ 이 생기지 않도록 할 수 있습니다. 또한 $f(0) = 1, f(1) = -1$ 이고, 삼차함수의 개형상 $x < 0$ 쪽에서 $f(x) = -1$ 이 되는 점, $x > 1$ 쪽에서 $f(x) = 1$ 이 되는 점을 각각 잡을 수 있으므로 조건 (가)도 만족합니다. 따라서 이 함수는 문제의 조건을 만족합니다.

6

최종 계산

$$f(2) = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 1 = 32 - 24 + 1 = 9$$

ANSWER ⑤

심화/유사문항

13

"아무거나"의 중요성

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 는 $f(-2) = 20, f(0) = 0$ 이고, $t < 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 방정식 $f(x) = f(t)$ 의 실근의 개수는 1 이다.

$t < 0$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$, 직선 $y = f(t)$ 및 $x = 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $g(t)$ 라 하면

$$\int_{-2}^0 f(t)dt = 12, \quad g(-2) = 48$$

를 만족시킨다. $x \leq 0$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 는 삼차 함수의 그래프의 일부일 때, $g'(-1)$ 의 값은?

- ① -9 ② -12 ③ -15
④ -18 ⑤ -21



014

첫째항이 -70 이고 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d 의 값의 합은?

(가) $a_k = 0$ 인 3이상의 자연수 k 가 존재한다.

(나) 두 집합 $A = \{n \mid (n-7)a_n \leq 0\}$,
 $B = \{n \mid (n-7)a_{2n-1} \leq 0\}$ 에 대하여
 $n(A) \leq n(B)$ 이다.

- ① 51 ② 53 ③ 55 ④ 57 ⑤ 59

문항 정보

내용 영역	등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있다.
행동 영역	추론 능력, 문제해결 능력
타겟 등급	1등급



풀이 과정

STEP-BY-STEP

0

풀이 계획 수립 문제 접근 방식

최종적으로 묻는 값인 자연수 d 의 합을 구하기 위해 다음과 같은 단계로 접근합니다.

1. 조건 (가) 분석

수열의 항이 0이 된다는 조건을 이용하여 가능한 d 의 후보군을 도출합니다.

2. 조건 (나) 분석 및 발견적 추론

도출된 d 의 후보들을 대입해보며 집합 A, B 의 해 구간이 갖는 구조적 특징을 파악합니다.

1

조건 (가) 분석 d 의 후보 찾기

제시된 조건 (가)를 수열의 일반항에 대입합니다. $a_k = -70 + (k-1)d = 0$ 이므로,

$$d(k-1) = 70$$

입니다. 조건에 맞게 k 에 3, 4, 5, 6... 을 대입하며 d 가 자연수가 되는 경우를 찾습니다.

$$\bullet k = 3 \implies 2d = 70 \implies d = 35$$

$$\bullet k = 4 \implies 3d = 70 \implies d \text{는 자연수 아님}$$

$$\bullet k = 6 \implies 5d = 70 \implies d = 14$$

• ...

이러한 과정을 통해 d 는 $\{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35\}$ 중 하나임을 알 수 있습니다.

2

규칙 발견 및 사고의 확장 발견적 추론

(나) 조건을 파악하기 위해 d 의 후보를 작은 수부터 대입해 봅니다. 예시는 그냥 드는 것이 아니라, 항상 무언가를 "발견"하려고 노력하면서 들어보아야 합니다.

d	k	A 해 구간	B 해 구간	$n(A)$	$n(B)$

따라서 이런 표를 채워보면서 뭔가 규칙이 있는지, 얻어갈 것은 없는지 고민해보겠습니다. 먼저 $d = 1$ 일 때 예시를 들어봅니다.

$d = 1$ 일 때 ($k = 71$)

$a_n = n - 71$ 이므로 $a_{2n-1} = (2n-1) - 71 = 2n - 72$ 입니다.

- 집합 A: $(n-7)(n-71) \leq 0 \implies 7 \leq n \leq 71$
- 집합 B: $(n-7)(2n-72) \leq 0$
 $\implies 2(n-7)(n-36) \leq 0 \implies 7 \leq n \leq 36$

d	k	A 해 구간	B 해 구간	$n(A)$	$n(B)$
1	71	7 ~ 71	7 ~ 36	65	30

계산 결과 $n(A) = 65$, $n(B) = 30$ 으로 $n(A) > n(B)$ 이므로 조건에 맞지 않습니다.

혹시 여러분은 규칙이나 원리가 보이나요? 저는 사실 하나의 예시만으로 문제가 요구하는 결론이 보이지는 않을 것 같습니다. 실망하지 말고, 다음 후보를 대입해 봅니다.

$d = 2$ 일 때 ($k = 36$)

$a_n = 2n - 72$ 이므로 $a_{2n-1} = 2(2n-1) - 72 = 4n - 74$ 입니다.

- 집합 A: $(n-7)(2n-72) \leq 0$
 $\implies 2(n-7)(n-36) \leq 0 \implies 7 \leq n \leq 36$
- 집합 B: $(n-7)(4n-74) \leq 0$
 $\implies 2(n-7)(2n-37) \leq 0 \implies 7 \leq n \leq 18.5$

d	k	A 해 구간	B 해 구간	$n(A)$	$n(B)$
1	71	7 ~ 71	7 ~ 36	65	30
2	36	7 ~ 36	7 ~ 18.5	30	12

슬슬 감이 오시나요? 제일 먼저 A와 B의 해 구간이, 아까 (가)조건에서 구한 k 의 값과 연관이 있는 것 같습니다.

- 집합 A: 해 구간이 항상 7과 k 사이로 계속 유지됩니다.
- 집합 B: 집합 B의 해 구간이 계속 7과 $\frac{k+1}{2}$ 사이임을 알 수 있습니다.

왜 그럴까요? $a_n = d(n-k)$ ($d > 0$)이기 때문에

$$(n-7)a_n \leq 0 \implies d(n-7)(n-k) \leq 0$$

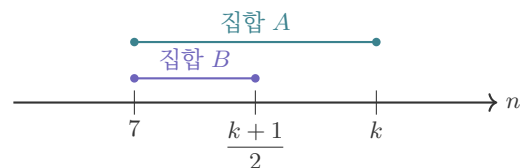
$$(n-7)a_{2n-1} \leq 0 \implies d(n-7)(2n-1-k) \leq 0$$

$$\implies 2d(n-7)\left(n - \frac{k+1}{2}\right) \leq 0$$

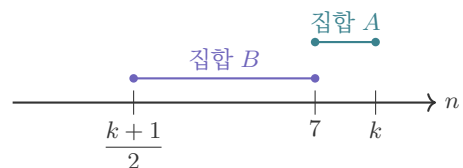
으로 전개되어 집합 B의 해 구간 상한선이 $\frac{k+1}{2}$ 로 결정되기 때문입니다.

이제 어째서 두 예시에서 모두 $n(A) > n(B)$ 였는지 그 이유를 생각해볼까요?

아하! 만약에 $\frac{k+1}{2}$ 랑 k 가 다 7보다 크다면 아래 그림처럼 무조건 집합 A가 원소를 더 많이 가지게 되지 않나요?

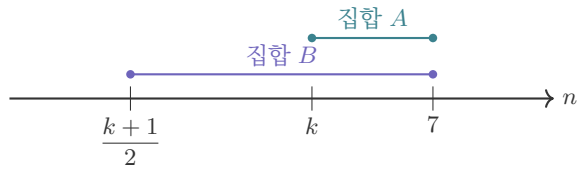


그러면 어떻게 해야 $n(A) \leq n(B)$ 가 될까요? 아래 그림처럼 적어도 $\frac{k+1}{2}$ 가 7보다 더 작아지면 되지 않을까요?

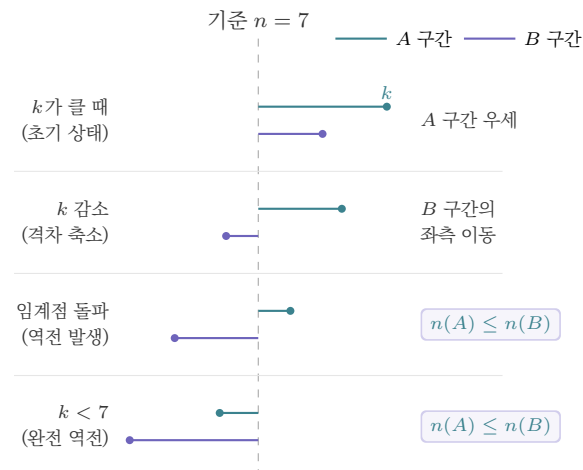




아니면 아예 k 가 7보다 작아서 아래 그림처럼 된다면? 따로 확인해볼 필요도 없이 항상 $n(A) \leq n(B)$ 일 것 같아요.



이처럼 k 가 작아질수록 점차 차이가 축소되다가 $\frac{k+1}{2} < 7$ 일 때를 경계로 해서 처음 딱 임계점이 발생한 이후 그보다 더 k 가 작아진다면 항상 $n(A) \leq n(B)$ 임을 생각해 볼 수 있지 않을까요? 아래 그림처럼요!



따라서 '처음으로 $n(A) \leq n(B)$ 가 되는 임계점을 찾기만 한다면, 그 값 이상의 모든 d 값들이 전부 답이 되겠네요!

k 가 작을수록, d 가 클수록 $n(B)$ 가 $n(A)$ 보다 점차 더 커지니까요.

그러면 임계점을 찾기 위해 7 근처의 후보인 $d = 7$ ($k = 11$)과 $d = 10$ ($k = 8$)을 관찰하여 보도록 하겠습니다!

3

임계점 확인 및 결론 도출 최종 확인

$d = 7$ 일 때 ($k = 11$)

- 집합 A: 7과 k 사이 $\Rightarrow 7 \leq n \leq 11$
- 집합 B: 7과 $\frac{k+1}{2}$ 사이 $\Rightarrow 6 \leq n \leq 7$

d	k	A 해 구간	B 해 구간	$n(A)$	$n(B)$
7	11	7 ~ 11	6 ~ 7	5	2

자연수 n 은 $n(A) = 5$, $n(B) = 2$ 이므로 $n(A) \leq n(B)$ 가 성립하지 않습니다.

$d = 10$ 일 때 ($k = 8$)

- 집합 A: 7과 k 사이 $\Rightarrow 7 \leq n \leq 8$
- 집합 B: 7과 $\frac{k+1}{2}$ 사이 $\Rightarrow 4.5 \leq n \leq 7$

d	k	A 해 구간	B 해 구간	$n(A)$	$n(B)$
10	8	7 ~ 8	4.5 ~ 7	2	3

자연수 n 은 5, 6, 7이 포함되므로 $n(A) \leq n(B)$ ($2 \leq 3$)가 성립합니다.

후보군 중 $d = 7$ 일 때는 성립하지 않았고, $d = 10$ ($k = 8$)일 때 처음으로 역전 현상이 관찰됩니다.

아까 생각했듯이 d 가 커짐에 따라 k 는 작아지고, 임계점을 넘는 순간부터 집합 A의 해 구간은 $7 \sim k$ 로 좁아지며 집합 B의 해 구간은 $\frac{k+1}{2} \sim 7$ 로 훨씬 더 왼쪽으로 확장될 것입니다.

따라서 $d = 10$ 부터 그 이후의 모든 후보($d = 14, 35$)에 대해서는 무조건 $n(A) \leq n(B)$ 가 성립함을 확신할 수 있습니다.

따라서 조건을 만족하는 자연수 d 는 10, 14, 35이며, 모든 자연수 d 의 합은 다음과 같습니다.

$$10 + 14 + 35 = 59$$



ANSWER ⑤

내 풀이 다시보기

CHECK POINT

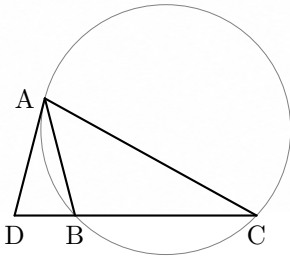
1 수식의 기하학적/구조적 이해

단순한 대입과 계산에 매몰되지 않고, 대입 결과를 통해 주어진 식을 7과 k 사이의 이차부등식 구조로 해석해 냈습니다. 집합 B 의 상한선이 $\frac{k+1}{2}$ 로 형성된다는 점을 파악하여, $\frac{k+1}{2} < 7$ 이 되는 k 값을 경계로 찾아가는 명확한 논리적 전략을 설계할 수 있었습니다.



020

그림과 같이 점 A에서 원에 접하는 직선과 원 위의 두 점 B, C를 지나는 직선이 점 D에서 만난다.



다음은 $\overline{AB} = 2, \overline{CB} = 3$ 이고 $\frac{\sin(\angle ABC)}{\sin(\angle ACB)} = 2$ 일 때, 삼각형 DBA의 넓이를 구하는 과정이다.
(단, $\angle ABC > \frac{\pi}{2}$ 이다.)

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sin(\angle ABC)}{\sin(\angle ACB)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 2 \text{이므로 } \overline{AC} = 4 \text{이다.}$$

$\cos(\angle ACB) = k$ 라 하면

$$\overline{AB} = 2, \overline{CB} = 3, \overline{AC} = 4 \text{이므로}$$

코사인 법칙에 의하여 $k = \boxed{\text{(가)}}$ 이다.

$$\sin(\angle ACB) = \sqrt{1 - k^2} \text{이므로}$$

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{CB} \times$

$$\sin(\angle ACB) = \boxed{\text{(나)}} \text{이다.}$$

원의 성질에 의하여 삼각형 DAC와 삼각형 DBA는 닮음이고

$$\overline{AC} : \overline{AB} = 2 : 1 \text{이므로}$$

$$\overline{DA} : \overline{DB} = 2 : 1, \overline{DC} : \overline{DA} = 2 : 1$$

이다. $\overline{DC} - \overline{DB} = 3$ 이므로 $\overline{DB} = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

따라서 삼각형 DBA의 넓이는

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{CB}} \times (\text{삼각형 ABC의 넓이}) = \frac{\boxed{\text{(다)}}}{3} \times$$

$$\boxed{\text{(나)}} \text{이다.}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c 라 하자. $\frac{b \times c}{a} = p\sqrt{15}$ 일 때, $7p$ 의 값을 구하시오.

문항 정보

내용 영역	사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
행동 영역	추론 능력
타겟 등급	2등급

풀이 과정

STEP-BY-STEP

0

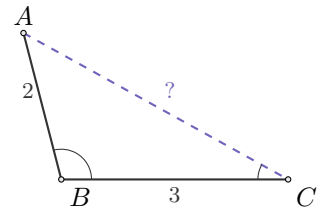
풀이 계획 계산의 파트 분리

풀이는 두 파트로 나뉩니다: $\triangle ABC$ 내부의 계산(변과 넓이)과 원 외부의 비례 관계(D 위치).

1

사인법칙으로 $\overline{AC}$ 찾기 삼각형 내부의 비율 이용

$\triangle ABC$ 에 사인법칙을 적용합니다.



$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACB)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\angle ABC)}{\sin(\angle ACB)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 2$$

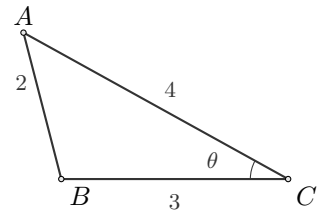
$\overline{AB} = 2$ 를 대입하면 $\overline{AC} = 4$.

2

(가) 코사인법칙으로 $\cos C$ 구하기 세 변의 길이 활용

세 변 2, 3, 4를 모두 알았으므로 코사인법칙을 적용합니다.

$\angle ACB = \theta$ 라 하면



$$\cos \theta = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$= \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

따라서 (가) $a = \frac{7}{8}$ 입니다.

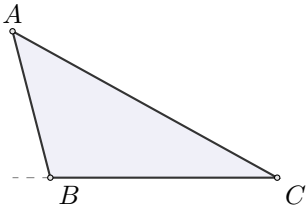


3

(나) $\triangle ABC$ 의 넓이 구하기 삼각비의 상호관계

$\cos \theta = \frac{7}{8}$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$



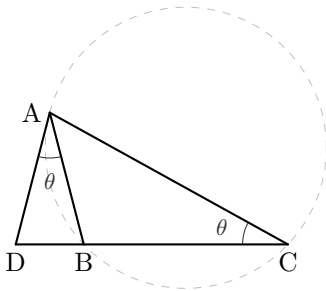
$$\begin{aligned} \text{넓이} &= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{CB} \times \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

따라서 (나) $b = \frac{3\sqrt{15}}{4}$ 입니다.

4

AA 닮음으로 닮음비 확정 원의 성질 적용

원의 성질에 의하여 $\angle DAB = \angle DCA = \theta$ 이고, $\angle D$ 는 공통이므로 $\triangle DAC \sim \triangle DBA$ (AA 닮음)이다.



$\overline{AC} : \overline{AB} = 4 : 2 = 2 : 1$ 이므로 닮음비는 $2 : 1$ 이다.

5

(다) $\overline{DB}$ 구하기 원 외부의 비례 관계

닮음비에 의해

$$\overline{DC} : \overline{DA} = 2 : 1 \Rightarrow \overline{DC} = 2\overline{DA}$$

$$\overline{DA} : \overline{DB} = 2 : 1 \Rightarrow \overline{DA} = 2\overline{DB}$$

따라서 $\overline{DC} = 4\overline{DB}$. $\overline{DC} - \overline{DB} = 3$ 이므로

$$4\overline{DB} - \overline{DB} = 3$$

$$\Rightarrow 3\overline{DB} = 3$$

$$\Rightarrow \overline{DB} = 1$$

따라서 (다) $c = 1$ 입니다.

6

최종 계산 목표 식 계산

$\triangle DBA$ 와 $\triangle ABC$ 는 꼭짓점 A 를 공유하고 높이가 같으므로, 넓이비 = 밑변비 = $\overline{DB} : \overline{CB} = 1 : 3$ 이다.

$$\begin{aligned} \frac{b \times c}{a} &= \frac{\frac{3\sqrt{15}}{4} \times 1}{\frac{7}{8}} \\ &= \frac{\frac{3\sqrt{15}}{4}}{\frac{7}{8}} = \frac{6\sqrt{15}}{7} \end{aligned}$$

$$p = \frac{6}{7} \text{ 이므로 } 7p = 6.$$

ANSWER 6



내 풀이 다시보기

CHECK POINT

1 빈칸 추론 문항의 올바른 학습법

평가원은 응시자에게 증명 과정을 직접 제시하도록 요구할 수 없으므로, 증명 과정을 이해하는 능력으로 대체하여 평가합니다. 실전에서는 빈칸의 앞뒤 문맥만 대조하여 답을 찾을 수도 있지만, 평소 연습할 때는 반드시 증명 과정의 흐름을 한 줄 한 줄 따라가며 이해해야 합니다. 앞뒤 대조에만 의존하면 증명 능력이 향상되지 않아 난도가 높은 문항에 대비할 수 없습니다. 빈칸 문항은 전체 논리 전개를 따라가는 훈련으로 접근하세요.



021

최고차항의 계수가 1 인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 - 4t}{f(t)} = \frac{1}{2}$$

(나) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{t \rightarrow a} \frac{t^3 - 4t}{f(t)}$ 의 값이 존재한다.

$f(3) = 66$ 일 때, $\{f(1)\}^2$ 의 값을 구하시오.

문항 정보

내용 영역	함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
행동 영역	추론 능력
타겟 등급	1등급



풀이 과정

STEP-BY-STEP

0

풀이 계획 미지수와 조건 배분

1. 미지수 건적

최고차항의 계수가 1 인 사차함수 $f(x)$ 를 구해야 하므로 찾아야 할 미지수는 4개입니다.

조건 (가), (나)를 통해 식을 세운 뒤, 박스 밑에 주어진 조건 $f(3) = 66$ 을 마지막에 대입하여 미지수를 모두 결정할 수 있을 것이라고 예상할 수 있습니다.

2. 조건 배분

조건 (가)는

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 - 4t}{f(t)} = \frac{1}{2}$$

입니다. 분자

$$t^3 - 4t$$

가 $t = 0$ 에서 0 이 되므로, 극한값이 0 도 아니고 무한대도 아닌 $\frac{1}{2}$ 로 수렴하려면 $f(t)$ 도 $t = 0$ 에서 함께 0 이 되어야 할 것 같습니다.

즉 조건 (가)에서는 대략

$$\text{수렴할 조건} \text{ 과 } \text{수렴한 값} \frac{1}{2} \text{ 자체}$$

로부터 식 한두 개 정도의 가치가 있어 보입니다.

그러면 조건 (나)는 아마도 나머지 미지수를 해결할 단서가 될 것입니다.

3. 대략적인 전략 수립

이제 조건을 순서대로 따라가며 해석하도록 합니다.

1

조건 (가) 분석 f 에서 g 로 관점 바꾸기

조건 (가)의

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 - 4t}{f(t)} = \frac{1}{2}$$

에서 분자 $t^3 - 4t$ 는 $t = 0$ 에서 0 으로 갑니다.

극한값이 유한한 값 $\frac{1}{2}$ 로 존재하려면, 분모도 0으로 가야 합니다. 따라서

$$f(0) = 0$$

입니다. 교과서에서 0/0꼴의 극한은 **인수정리**를 활용하여 식을 변형한 후 계산하라고 가르칩니다.

$f(0) = 0$ 이므로

$$f(x) = xg(x)$$

로 둘 수 있습니다. (단, $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수입니다.)

이 상태로 조건 (가)에 대입하여 약분하면

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 - 4t}{f(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t^2 - 4)}{tg(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - 4}{g(t)} \\ &= \frac{-4}{g(0)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

입니다.

따라서

$$g(0) = -8$$

입니다.

이제 남은 조건들을 활용하기 위해 $g(x)$ 의 식을 세웁니다. $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 상수항이 -8 이므로,

$$g(x) = x^3 + px^2 + qx - 8$$

로 둘 수 있습니다.

여기까지 오면 문제는 사실상 f 에 대한 문제가 아니라 g 에 대한 문제로 바뀝니다.

왜냐하면

$$f(1) = 1 \cdot g(1) = g(1)$$

이므로, 이제부터는

$$\{f(1)\}^2 = \{g(1)\}^2$$

을 구하면 되기 때문입니다.

정리하면 현재 상황은 다음과 같습니다.

$$g(x) = x^3 + px^2 + qx - 8$$

남은 미지수는 p, q 두 개입니다. 조건 (나)를 통해 $g(x)$ 에 대한 정보를 얻고, 마지막에 박스 밑 조건 $f(3) = 66$ 을 활용하여 미지수를 해결하도록 합니다.

2

조건 (나) 분석 $g(x)$ 의 실근 후보 포착

조건 (나)는 모든 실수 a 에 대하여

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{t^3 - 4t}{f(t)}$$

의 값이 존재한다는 조건입니다.

앞에서

$$f(t) = tg(t)$$

로 바꾸었으므로, 주어진 식은

$$\frac{t^3 - 4t}{f(t)} = \frac{t(t^2 - 4)}{tg(t)}$$

입니다.

$t = 0$ 근처의 문제는 이미 조건 (가)를 통해 정리되었습니다. 이제 핵심은 $g(t)$ 입니다.

약분해서 보면

$$\frac{t^3 - 4t}{f(t)} = \frac{t^2 - 4}{g(t)}$$

처럼 읽을 수 있습니다.

따라서 문제가 생길 수 있는 지점은

$$g(a) = 0$$

인 곳입니다.

만약 어떤 실수 a 에 대하여 $g(a) = 0$ 인데, 분자 $a^2 - 4$ 가 0이 아니라면 그 지점에서는 분모만 0이 됩니다. 그러면 극한값이 존재할 수 없습니다.



따라서 $g(x) = 0$ 의 실근은 반드시

$$x^2 - 4 = 0$$

의 해여야 합니다.

즉 $g(x) = 0$ 의 실근 후보는

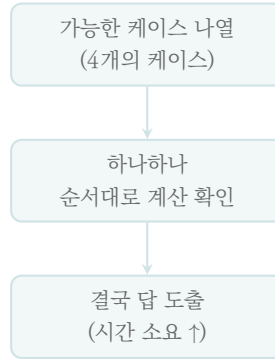
$$x = 2, \quad x = -2$$

뿐입니다. 그러면 $g(2) = 0$ 인 경우, $g(-2) = 0$ 인 경우, 둘 다 0이 아닌 경우 등을 모두 나누어야 할까요? 너무 복잡합니다.

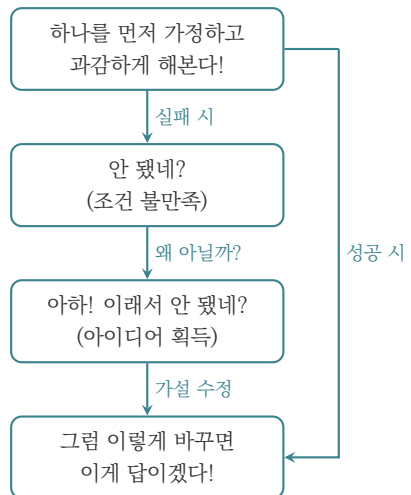
우리는 관계식 한 가지만 더 얻으면 미지수 계산이 끝나서 문제가 해결되는 상황입니다.

이 상황에서 굳이 모든 케이스를 나누기보다, 그림처럼 그냥 하나를 가정해서 해보고, 조건을 만족하면 그대로 답을 내고, 안 되면 아이디어를 얻어 수정하는 방식으로 접근하는 것이 훨씬 효율적입니다.

관성적인 접근 (경우 분류)



실전적 접근 (가설과 피드백)





3

검증 및 계산 $g(2) = 0$ 을 먼저 시도

이제 후보 중 하나를 먼저 시도해 봅니다.
여기서는

$$g(2) = 0$$

으로 두겠습니다.

이 선택에 특별한 이유가 있는 것은 아닙니다. 후보가 두 개뿐이므로 아무거나 하나 먼저 잡아 보는 것입니다.

$$g(x) = x^3 + px^2 + qx - 8$$

미지수 p, q 가 남아있는 상태에서 $g(2) = 0$ 을 대입하면

$$8 + 4p + 2q - 8 = 0 \implies 2p + q = 0$$

입니다. 이때 박스 밑에 있던 조건 $f(3) = 66$ 을 사용합니다.
다. $f(x) = xg(x)$ 이므로 $f(3) = 66$ 은 $3g(3) = 66$, 즉

$$g(3) = 22$$

에서

$$27 + 9p + 3q - 8 = 22 \implies 3p + q = 1$$

입니다.

따라서

$$\begin{cases} 2p + q = 0 \\ 3p + q = 1 \end{cases}$$

이고,

$$p = 1, \quad q = -2$$

입니다.

즉

$$g(x) = x^3 + x^2 - 2x - 8$$

이고,

$$f(x) = x(x^3 + x^2 - 2x - 8)$$

입니다.

3-1

경로1 $g(2) = 0$ 을 가정한 학생 (직진)

이제 구한 함수가 조건 (나)를 만족하는지 확인합니다.
정당화할 때는 이미 구한 식을 대입하기만 하면 됩니다.

$$g(x) = x^3 + x^2 - 2x - 8$$

를 인수분해하면

$$g(x) = (x - 2)(x^2 + 3x + 4)$$

입니다.

이때 이차식 $x^2 + 3x + 4$ 의 판별식은 $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7 < 0$ 입니다. 따라서 $g(x)$ 의 실근은 $x = 2$ 하나뿐입니다.

분모가 0이 되는 지점은 분자의 영점과 겹치며, 그 외의 실수에서는 분모가 0이 되지 않으므로 극한값이 모두 존재합니다. 조건 (나)를 만족합니다.

가정한 $g(2) = 0$ 으로 만든 함수가 조건을 모두 만족시키므로 그대로 답을 내면 됩니다.

$$f(1) = g(1) = 1 + 1 - 2 - 8 = -8$$

이므로

$$\{f(1)\}^2 = (-8)^2 = 64$$

ANSWER 64



3-2

경로 2 $g(-2) = 0$ 을 가정한 학생

만약 처음에

$$g(-2) = 0$$

으로 잡았다면 어떻게 될까요?

이건 본풀이에서 처음부터 나누어야 하는 경우 분류가 아닙니다.

실제로 이쪽을 먼저 잡은 학생이 있을 수 있으니,

조건을 확인하다가 수정하는 과정을 보여 주는 것입니다.

이때, 끝까지 계산하기 전에 식의 구조나 개념만으로 모순을 먼저 알아챌 수도 있습니다. 다음 2가지 중 어떤 방법으로도 가능합니다.

1. 상수항과 판별식 관찰

$g(-2) = 0$ 이고 이미 조건 (가)에서 $g(0) = -8$ 을 구했으므로, 인수정리를 생각하면 식은 다음과 같이 작성됩니다.

$$g(x) = (x+2)(x^2 + kx - 4)$$

이때 이차식

$$x^2 + kx - 4$$

의 상수항이 음수(-4)이므로, 판별식은

$$D = k^2 - 4(1)(-4) = k^2 + 16 > 0$$

이 되어 무조건 서로 다른 두 실근을 갖습니다.

조건 (나)를 만족하려면 이 실근들이 오직 -2와 2뿐이어야 하므로

$$g(x) = (x+2)(x^2 - 4)$$

인데, 결국 남은 조건인 $g(3) = 22$ 를 만족할 수 없습니다.

(따라서 반대로 $g(2) = 0$ 이 되게 해야 $g(x) = (x-2)(x^2 + kx + 4)$ 가 되어 판별식 $D = k^2 - 16 \leq 0$ 이 가능해지므로 $g(2) = 0$ 으로 가설을 수정할 수 있습니다.)

2. 사잇값 정리를 활용한 직관

$g(0) = -8 < 0$ 이고, 삼차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $g(x) \rightarrow \infty$ 입니다.

따라서 사잇값 정리에 의해 구간 $(0, \infty)$ 에서 $g(c) = 0$ 인 c 가 하나 이상 존재합니다.

그런데 조건 (나)에 의해 $g(x) = 0$ 의 실근 후보는 2 또는 -2뿐이므로 반드시 $c = 2$ 여야만 합니다.

즉, 처음부터 $g(2)=0$ 일 수밖에 없음을 확신하고 직진할 수 있습니다.

물론 시험장에서 이런 통찰을 떠올리지 못해 전부 계산하더라도, 어렵지 않게 모순을 발견하고 올바른 답을 찾아낼 수 있습니다.

실제로 해볼까요? $g(-2) = 0$ 과 $g(3) = 22$ 를 연립하여 미지수를 구하면

$$g(x) = x^3 + \frac{9}{5}x^2 - \frac{22}{5}x - 8$$

입니다. 이제 구한 식을 대입하여 조건 (나)를 만족하는지 확인합니다.

$g(-2) = 0$ 이므로

$$g(x) = (x+2)\left(x^2 - \frac{1}{5}x - 4\right)$$

입니다. 이차식 $x^2 - \frac{1}{5}x - 4$ 의 판별식은

$$D = \left(-\frac{1}{5}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = \frac{401}{25} > 0$$

이므로 $g(x)$ 는 $x = -2$ 말고도 다른 실근을 더 갖습니다. 그 다른 실근에서는 분모가 0이 되지만 분자는 0이 되지 않으므로 극한값이 존재하지 않습니다. 즉 조건 (나)를 만족하지 않습니다.

어떠한 사고 경로를 거치든, 결국 $g(2) = 0$ 로 도달하게 됩니다. 조건을 만족하는 함수는

$$g(x) = x^3 + x^2 - 2x - 8$$

이므로

$$f(1) = g(1) = -8$$

입니다.

따라서

$$\{f(1)\}^2 = 64$$

ANSWER 64

더 알아보기

사후적으로 생각해 보면, $g(x)$ 는 삼차함수이므로 반드시 실근을 하나 이상 가집니다. 또한 $g(0) = -8 \neq 0$ 이므로 0은 $g(x) = 0$ 의 실근이 아닙니다. 따라서 $g(x) = 0$ 의 실근은 $x = 2$ 또는 $x = -2$ 중 적어도 하나는 반드시 존재해야 한다는 것을 알 수 있습니다.

하지만 실제 풀이 과정 중에 이를 연역적으로 모두 떠올릴 필요는 없습니다. 실전에서는 후보를 빠르게 포착하고 대입하여 검증하는 편이 효율적입니다.

내 풀이 다시보기

CHECK POINT

1 $g(2) = 0$ 과 $g(-2) = 0$ 인 경우를 처음부터 일일이 나누어 풀었나요?

실근 후보가 $x = 2$ 와 $x = -2$ 로 좁혀졌을 때, "첫째, $g(2) = 0$ 일 때. 둘째, $g(-2) = 0$ 일 때..."라며 모든 케이스를 연역적으로 분류하며 접근했다면 이 해설을 꼭 읽어보세요. 이번 문제야 후보가 2개뿐이니 무사했겠지만, 수능 21번 같은 난도에서 불필요한 경우분류에 집착하면 발목을 크게 잡힐 수 있습니다.

2 박스 안의 조건과 박스 밑의 조건을 왔다 갔다 하며 풀었나요?

평가원 문제에서 조건의 위치에는 다 이유가 있습니다. 박스 안의 조건 (가), (나)는 '조건을 만족하는 함수(식)의 뼈대를 추론'하라는 것이고, 박스 밑에 따로 빠져나온 $f(3) = 66$ 은 '찾아낸 식에 대입하여 남은 미지수를 최종 계산'하라는 뜻입니다.

3 혹시 사차함수를 붙잡고 있느라 어디서 단서를 찾을지 몰랐나요?

항상 지금 구해야 할 것은 무엇인가? 그걸 구하려면 어떤 것이 있어야 하는가를 질문하며 풀이하는 습관을 길러야 합니다. 이 문항은 $f(x)$ 로 쓰여 있지만, 결국 $f(x) = xg(x)$ 를 만족하는 삼차함수 $g(x)$ 에 관한 문제였어요!



■ 심화/유사문항

21

왜 이 문제가 "유사 문항"일까요? 유사 문항은 꼭 유사 소재가 아닐 수도 있습니다.

함수 $f(x) = -x(x - a)$ 에 대하여

$$\int_1^3 (5f(x) + 4|f(x)|)dx = 0$$

일 때, $100a^3$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.)

022

좌표평면에서 곡선 $y = \log_2 x - 2$ 위의 점 P를 지나고 기울기가 -2 인 직선이 곡선 $y = 8 \times 4^x$ 와 만나는 점을 Q라 하자. 직선 OP의 기울기와 직선 OQ의 기울기를 각각 α, β 라 하자.

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{328}{9}$$

일 때, $(\beta - \alpha)^2 = \frac{q}{p}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

■ 문항 정보

내용 영역	지수함수와 로그함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 그릴 수 있다.
행동 영역	추론 능력, 문제해결 능력
타겟 등급	1등급



풀이 과정

STEP-BY-STEP

0

풀이 계획 묻는 값을 보고 설계하기

어떤 문제든 가장 먼저 해야 할 일은

"무엇을 구해야 하는가?"를 확인하는 것입니다.

우리는 $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{328}{9}$ 이 주어진 상황에서 $(\beta - \alpha)^2$ 의 값을 구해야 합니다. 곱셈 공식의 변형에 따라

$$(\beta - \alpha)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$$

이므로, 여기서 우리는 α 와 β 를 각각 구해도 되고, 아니면

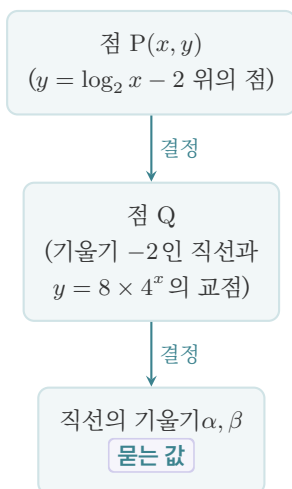
$\alpha\beta$ 의 값을 구해도 되겠다는 생각을 할 수 있습니다. 무조건 곱을 구해야만 하는 것은 아닙니다.

하지만 이 식을 본 직후 어떻게 대수적으로 접근해야 할지 도무지 떠오르지 않는, 이른바 "모르겠다"는 상태에 빠지는 것이 지극히 정상입니다. 이때는 당황하지 말고, 구해야 하는 값을 기준으로 발견적 과정에 진입해야 합니다.

1

발견적 과정의 설계 구조 파악 및 첫 번째 시도

문제의 구조를 가만히 살펴보면 점 P가 정해짐에 따라 점 Q가 수동적으로 결정되고, 그에 따라 두 기울기 α, β 가 결정되는 흐름입니다.



따라서 점 P의 좌표를 적당하게 가정해서, 이에 따라 점 Q의 좌표, α 와 β , 그리고 그들의 곱이 어떻게 나타나는지 조사해보겠습니다.

즉, 아래 표의 칸을 채워보도록 하겠습니다.

P 좌표	직선의 방정식	Q 좌표	α	β	$\alpha\beta$

아무거나, 가장 간단해 보이는 점부터 시작해봅시다. $y = \log_2 x - 2$ 위의 점이니까...x좌표가 2일 때, 그러니까

$$P(2, -1)$$

일 때부터 해볼까요?

P(2, -1)일 때의 관찰

[직선의 방정식]

점 P(2, -1)을 지나고 기울기가 -2인 직선은 다음과 같습니다.

$$y = -2(x - 2) - 1 = -2x + 3$$

[Q 좌표]

우리는 다항함수(직선)와 지수함수의 교점 Q를 찾는 대수적인 방법을 모르기 때문에, 사실 이것조차도 발견적 방법으로 접근해야 합니다!

그렇듯한 수들을 순차적으로 대입하며 교점을 찾습니다. $8 \times 4^x = -2x + 3$ 에 대입해 봅니다.

$$x = 1 \rightarrow 8 \times 4^1 = 32, -2(1) + 3 = 1(\text{불일치})$$

$$x = 0 \rightarrow 8 \times 4^0 = 8, -2(0) + 3 = 3(\text{불일치})$$

$$x = -\frac{1}{2} \rightarrow 8 \times 4^{-\frac{1}{2}} = 4, -2(-\frac{1}{2}) + 3 = 4(\text{일치})$$

양변이 일치하여 성립하므로, Q(-1/2, 4)입니다.

[$\alpha, \beta, \alpha\beta$ 의 값]



원점 $O(0,0)$ 과 점 $P(2,-1)$ 을 지나는 직선의 기울기 α , 점 $Q(-\frac{1}{2},4)$ 를 지나는 직선의 기울기 β 는 정의에 따라 다음과 같이 계산됩니다.

$$\alpha = \frac{-1-0}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{4-0}{-\frac{1}{2}-0} = -8$$

따라서 $\alpha\beta = (-\frac{1}{2}) \times (-8) = 4$ 입니다.

P 좌표	직선의 방정식	Q 좌표	α	β	$\alpha\beta$
$(2,-1)$	$y = -2x + 3$	$(-\frac{1}{2},4)$	$-\frac{1}{2}$	-8	4

2

표의 누적과 규칙성 확인 추가 예시 대입

한 번의 관찰로는 확신할 수 없으니, 점을 하나 더 잡아 동일한 과정을 반복하여 표에 누적시켜 보겠습니다.

P(8,1)일 때의 관찰

[직선의 방정식]

점 $P(8,1)$ 일 때 직선의 방정식은 다음과 같습니다.

$$y = -2(x-8) + 1 = -2x + 17$$

[Q 좌표]

$8 \times 4^x = -2x + 17$ 에 정수와 반정수를 하나씩 대입해 봅니다.

$$x = 1 \rightarrow 8 \times 4^1 = 32, -2(1) + 17 = 15(\text{불일치})$$

$$x = 0 \rightarrow 8 \times 4^0 = 8, -2(0) + 17 = 17(\text{불일치})$$

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow 8 \times 4^{\frac{1}{2}} = 16, -2(\frac{1}{2}) + 17 = 16(\text{일치})$$

성립하므로 $Q(\frac{1}{2}, 16)$ 입니다.

[$\alpha, \beta, \alpha\beta$ 의 값]

$$\alpha = \frac{1-0}{8-0} = \frac{1}{8}$$

$$\beta = \frac{16-0}{\frac{1}{2}-0} = 32$$

따라서 $\alpha\beta = (\frac{1}{8}) \times 32 = 4$ 입니다.

P 좌표	직선의 방정식	Q 좌표	α	β	$\alpha\beta$
$(2,-1)$	$y = -2x + 3$	$(-\frac{1}{2},4)$	$-\frac{1}{2}$	-8	4
$(8,1)$	$y = -2x + 17$	$(\frac{1}{2},16)$	$\frac{1}{8}$	32	4

어떤가요? $\alpha\beta = 4$ 로 일정하다는 강력한 의심이 듭니다. 더불어, P와 Q의 좌표 사이에도 묘한 규칙이 보이지 않나요? P의 y좌표를 반으로 나눈 값이 Q의 x좌표가 되고, P의 x좌표를 두 배 한 값이 Q의 y좌표가 되는 것 같습니다.

가설

즉, $P(x_1, y_1)$ 이면 $Q(\frac{1}{2}y_1, 2x_1)$ 이 아닐까요?

이 가설과 확신을 90%로 끌어올리기 위해 조금 더 복잡한 좌표를 넣어보겠습니다.

P(1,-2)일 때의 관찰

[직선의 방정식]

점 $P(1,-2)$ 일 때 직선의 방정식은 다음과 같습니다.

$$y = -2(x-1) - 2 = -2x$$

[Q 좌표]

$8 \times 4^x = -2x$ 에 대입해 봅니다.

$$x = 0 \rightarrow 8 \times 4^0 = 8, -2(0) = 0(\text{불일치})$$

$$x = -\frac{1}{2} \rightarrow 8 \times 4^{-\frac{1}{2}} = 4, -2(-\frac{1}{2}) = 1(\text{불일치})$$



$$x = -1 \rightarrow 8 \times 4^{-1} = 2, -2(-1) = 2(\text{일치})$$

성립하므로 Q(-1, 2)입니다.

• **[$\alpha, \beta, \alpha\beta$ 의 값]**

$$\alpha = \frac{-2-0}{1-0} = -2$$

$$\beta = \frac{2-0}{-1-0} = -2$$

따라서 $\alpha\beta = (-2) \times (-2) = 4$ 입니다. 한 번 표를 채워볼까요?

P 좌표	직선의 방정식	Q 좌표	α	β	$\alpha\beta$
(2, -1)	$y = -2x + 3$	$(-\frac{1}{2}, 4)$	$-\frac{1}{2}$	-8	4
(8, 1)	$y = -2x + 17$	$(\frac{1}{2}, 16)$	$\frac{1}{8}$	32	4
(1, -2)	$y = -2x$	$(-1, 2)$	-2	-2	4

세 번의 예시 모두 $\alpha\beta = 4$ 를 만족할 뿐만 아니라, 조심스럽게 예측했던 대로 P와 Q의 좌표 사이에 명확한 관계식 ($x_Q = \frac{1}{2}y_P$, $y_Q = 2x_P$)이 성립함을 볼 수 있습니다.

3

일반화 및 증명 100% 확신 채우기

앞서 표에서 찾은 직관을 수학적으로 완벽하게 증명해 볼까요? 우리가 발견한 규칙은 점 P(x, y)에 대해 점 Q의 좌표가 $(\frac{1}{2}y, 2x)$ 가 된다는 것이었죠. 이제 점 P를 곡선 $y = \log_2 x - 2$ 위의 임의의 점 $P(a, \log_2 a - 2)$ 로 두겠습니다. 그러면 우리의 가설에 따른 점 Q의 좌표는 $Q(\frac{1}{2}(\log_2 a - 2), 2a)$ 가 됩니다.

이 점 Q가 진짜로 우리가 찾는 교점이 맞는지, 두 가지 조건을 통해 확인해 보겠습니다.

1. 첫째, 점 Q가 지수함수 곡선 $y = 8 \times 4^x$ 위에 있는가?

점 Q의 x좌표를 지수함수 식에 대입해 보면 다음과 같습

니다.

$$8 \times 4^{\frac{1}{2}(\log_2 a - 2)} = 8 \times 2^{\log_2 a - 2} = 8 \times \frac{a}{4} = 2a$$

계산 결과가 점 Q의 y좌표인 2a와 일치하므로 곡선 위의 점이 맞습니다.

2. 둘째, 점 Q가 점 P를 지나고 기울기가 -2인 직선 위에 있는가?

이 직선의 방정식인 $y = -2(x - a) + \log_2 a - 2$ 에 점 Q의 x좌표를 대입해 봅시다.

$$\begin{aligned} y &= -2\left(\frac{1}{2}(\log_2 a - 2)\right) + 2a + \log_2 a - 2 \\ &= -(\log_2 a - 2) + 2a + \log_2 a - 2 = 2a \end{aligned}$$

마찬가지로 계산 결과가 y좌표인 2a로 딱 맞아떨어집니다. 두 조건을 모두 만족하므로, 우리의 가설이 완벽하게 맞았네요! 이제 임의의 점 P에 대한 두 기울기 α, β 를 구해보면 다음과 같습니다.

$$\alpha = \frac{\log_2 a - 2}{a}$$

$$\beta = \frac{2a}{\frac{1}{2}(\log_2 a - 2)} = \frac{4a}{\log_2 a - 2}$$

결과적으로 두 기울기를 곱하면 분자와 분모가 예쁘게 약분되어

$$\alpha\beta = \frac{\log_2 a - 2}{a} \times \frac{4a}{\log_2 a - 2} = 4$$

가 됨을 증명했습니다.



4

최종 계산 목표 식 계산

이제 거의 다 왔습니다! 구하고자 하는 식에 알아낸 값 $\alpha\beta = 4$ 를 대입하여 풀이를 마무리해 보겠습니다.

$$\begin{aligned}(\beta - \alpha)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = \frac{328}{9} - 2(4) \\ &= \frac{328}{9} - \frac{72}{9} = \frac{256}{9}\end{aligned}$$

여기서 $p = 9$, $q = 256$ 이며 두 수는 서로소인 자연수입니다. 따라서 최종적으로 $p + q = 9 + 256 = 265$ 가 됩니다.

ANSWER 265

■ 심화/유사문항

22

무엇을 가정하고, 무엇을 관찰할 것인가

곡선 $y = 3^x$ 위의 서로 다른 두 점 A, B는 다음 조건을 만족시킨다.

선분 AB를 1 : 9로 외분하는 점은 x 축 위에 있다.

선분 AB의 중점을 지나고 기울기가 -1 인 직선이 곡선 $y = \log_3 \frac{x-1}{5}$ 와 만나는 점을 P라 하자.

선분 AP의 중점의 x 좌표와 y 좌표의 차가 $\frac{21}{2}$ 일 때, 점 A의 y 좌표를 구하시오.



CHAPTER01

| 정답맞춰보기

심화/유사 문항 정답

ANSWER KEY

010 ③

013 ④

021 450

022 5