1. 정의역이 $\{x \mid 0 < x < \pi\}$인 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $(\cos x - 1)f'(x) = 4\sin^3 x$이고 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$이다. $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$인 실수 α와 $\beta = f(\alpha)$가
$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\alpha} f(x)dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\beta} g(y)dy + \alpha\beta = \frac{\pi}{6}$를 만족시킬 때, $\alpha\beta$의 값은?

〔4점〕

1)

① $\frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{5\pi}{6}$ ⑤ π

[빠른 정답]

1. ③

[해설]

1) 정답 ③

$\sin^3 x = -\sin x(\cos x - 1)(\cos x + 1)$이므로

$f'(x) = -4\sin x(\cos x + 1)$이고, 양변을 적분한 뒤 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$을

이용하면 $f(x) = 4\cos x + 2\cos^2 x$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$이므로 $g\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$이다.

미분가능한 일대일 함수 f와 그 역함수 g에 대하여 $\beta = f(\alpha)$일 때 다음 항등식이 성립한다.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\alpha} f(x)dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\beta} g(y)dy = \alpha\beta - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{5}{2} = \alpha\beta - \frac{5\pi}{6}$$

주어진 식에 대입하면 $\alpha\beta - \frac{5\pi}{6} + \alpha\beta = \frac{\pi}{6}$, 즉 $2\alpha\beta = \pi$

따라서 $\alpha\beta = \frac{\pi}{2}$이다.

〔다른 해설〕

$f(x) = 4\cos x + 2\cos^2 x$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{2}$를 구한 뒤 $\int_{\frac{5}{2}}^{\beta} g(y)dy$를

부분적분하면

$$\int_{\frac{5}{2}}^{\beta} g(y)dy = \beta g(\beta) - \frac{5}{2} \cdot g\left(\frac{5}{2}\right) - \int_{\frac{5}{2}}^{\beta} yg'(y)dy = \alpha\beta - \frac{5\pi}{6} - \int_{\frac{5}{2}}^{\beta} yg'(y)dy$$

$y = f(x)$로 치환하고 $g'(y)f'(x) = 1$을 이용하면

$$\int_{\frac{5}{2}}^{\beta} yg'(y)dy = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\alpha} f(x)dx$$

따라서 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\alpha} f(x)dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\beta} g(y)dy = \alpha\beta - \frac{5\pi}{6}$이고,

주어진 식에서 $\alpha\beta = \frac{\pi}{2}$이다.