2028예시 재배열 (빠른 정답)

기출모의

1. [정답] ③
2. [정답] ⑤
3. [정답] ⑤
4. [정답] ①

5. [정답] ④
6. [정답] ②
7. [정답] ⑤

8. [정답] ①
9. [정답] ③
10. [정답] ③

11. [정답] ④
12. [정답] ①
13. [정답] ②
14. [정답] ⑤

15. [정답] ①
16. [정답] 14
17. [정답] 53
18. [정답] 8
19. [정답] 59
20. [정답] 7

21. [정답] 9
22. [정답] 90

확률과 통계

23. [정답] ③
24. [정답] ④

25. [정답] ②
26. [정답] ②
27. [정답] ②
28. [정답] ⑤

29. [정답] 25
30. [정답] 43

\

28예시(해설)

기출모의

2026.05.1
4

1) [정답] ③

[해설]

$$\left(3^{\frac{3}{2}}\times\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(3^{\frac{3}{2}}\times 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(3^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=(3^2)^{\frac{1}{2}}=3$$

2) [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1}(f(x)+5)=f(1)+5$$

$f(1)+5=2f(1)$ 이므로 $\qquad f(1)=5$

3) [정답] ⑤

[해설]

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_4=4a_2$에서

$$\frac{a_4}{a_2}=\frac{a_1r^3}{a_1r}=4,\qquad r^2=4,\qquad r=2\ \ (\because\ r>0)$$

$a_1+a_2=12$ 에서

$$a_1+2a_1=12,\qquad a_1=4$$

$$\therefore\ a_5=a_1r^4=4\times 2^4=64$$

4) [정답] ①

[해설]

함수 $f(x)=(x^2-1)(2x+5)$에 대하여

$$f'(x)=(x^2-1)'(2x+5)+(x^2-1)(2x+5)'$$
$$=2x(2x+5)+(x^2-1)\times 2$$
$$=6x^2+10x-2$$
$$\therefore\ f'(-1)=-6$$

5) [정답] ④

[해설]

반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}\pi$인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 8^2\times\frac{3}{4}\pi=24\pi$

6) [정답] ②

[해설]

$$xf(x)+6=(x^3+2)(x+3)=x^4+3x^3+2x+6$$

에서

$$xf(x)=x^4+3x^3+2x$$

함수 $f(x)$는 다항함수이므로 $\quad f(x)=x^3+3x^2+2$

$$\therefore\ \int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2(x^3+3x^2+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+2x\right]_0^2$$
$$=\frac{1}{4}\times 2^4+2^3+2\times 2$$
$$=16$$

7) [정답] ⑤

[해설]

상수 $k\ (k<2)$에 대하여 함수 $f(x)=2^{x+k}-\sqrt{2}$가 닫힌구간 $[k,2]$에서 최솟값 $3\sqrt{2}$를 가지므로

$$f(k)=2^{k+k}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$
$$2^{2k}=4\sqrt{2}=2^{\frac{5}{2}},\qquad 2k=\frac{5}{2}\qquad \therefore\ k=\frac{5}{4}$$

8) [정답] ①

[해설]

곡선 $y=x^3-2x+17$에서 $\quad y'=3x^2-2$

점 $(0,1)$에서 곡선 $y=x^3-2x+17$에 그은 접선과 곡선의 접점의 좌표를 $(t,t^3-2t+17)$이라 하면 접선의 방정식은

$$y-(t^3-2t+17)=(3t^2-2)(x-t)$$
$$y=(3t^2-2)x-2t^3+17$$

이 접선이 점 $(0,1)$을 지나므로

$$1=-2t^3+17,\qquad t=2$$

따라서 접선의 방정식은 $y=10x+1$이고 점 $(a,11)$를 지나므로

$$11=10a+1,\qquad a=1$$

9) [정답] ③

[해설]

$a_4=2$이고 $n\le 3$일 때

$$a_4=a_3-2k,\qquad a_3=2+2k$$
$$a_3=a_2-2k,\qquad a_2=2+4k$$
$$a_2=a_1-2k,\qquad a_1=2+6k$$

$n\ge 4$일 때

$$a_5=ka_4+2=2k+2$$
$$a_6=ka_5+2=2k^2+2k+2$$
$$a_7=ka_6+2=2k^3+2k^2+2k+2$$

$a_1=a_7$이므로 $\quad 2+6k=2k^3+2k^2+2k+2$

$$k^3+k^2-2k=0,\qquad k(k+2)(k-1)=0$$
$$k=0\ \text{또는}\ k=-2\ \text{또는}\ k=1$$

$k=0$일 때 $\quad |a_1|+|a_2|=|2+6k|+|2+4k|=4$

$k=-2$일 때 $\quad |a_1|+|a_2|=|2+6k|+|2+4k|=16$

$k=1$일 때 $\quad |a_1|+|a_2|=|2+6k|+|2+4k|=14$

따라서 구하는 최댓값은 $k=-2$일 때 16이다.

10) [정답] ③

[해설]

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 v_1, v_2라 하면

$$v_1=\frac{dx_1}{dt}=3t^2+3,\ \ v_2=\frac{dx_2}{dt}=6$$

$v_1=5v_2$에서 $\quad 3t^2+3=30,\qquad t=3\ (\because\ t>0)$

점 P의 시각 t에서의 가속도를 a_1이라 하면

$$a_1=\frac{v_1}{dt}=6t$$

따라서 $t=3$에서 점 P의 가속도는 18이다.

11) [정답] ④

[해설]

자연수 a, b에 대하여 $g(x)=2\sin ax+b$라 하면 함수 $g(x)$의 최댓값, 최솟값은 $b+2$, $b-2$, 주기는 $\frac{2\pi}{a}$이다.

자연수 b에 대하여 $b+2\geq 3$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나기 위해서는

$|b-2|\leq 1$, 즉 $1\leq b\leq 3$

을 만족해야 한다.

(ⅰ) $b=1$일 때

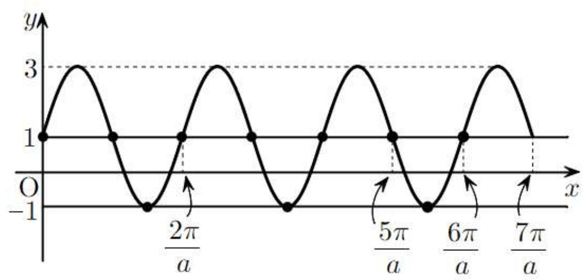
함수 $f(x)=|2\sin ax+1|$ 의 그래프와 직선 $y=1$의 그래프의 교점의 개수가 10이므로 함수 $g(x)=2\sin ax+1$의 그래프와 직선 $y=1$ 또는 $y=-1$ 의 그래프의 교점의 개수가 10이어야 한다.

$0\leq x<\frac{2\pi}{a}$에서 교점의 개수가 3이므로 다음 그림과 같이 교점의 개수가 10이 되기 위해서는

$\frac{6\pi}{a}\leq 2\pi<\frac{7\pi}{a}$, 즉 $3\leq a<\frac{7}{2}$

을 만족해야 한다.

따라서 자연수 a의 값은 3이다.



(ⅱ) $b=2$일 때

함수 $f(x)=|2\sin ax+2|=2\sin ax+2$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수가 10이어야 한다.

$0\leq x<\frac{2\pi}{a}$에서 교점의 개수가 2이고 교점의 x좌표는

$2\sin ax+2=1$, $\sin ax=-\frac{1}{2}$

$ax=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $ax=\frac{11}{6}\pi$

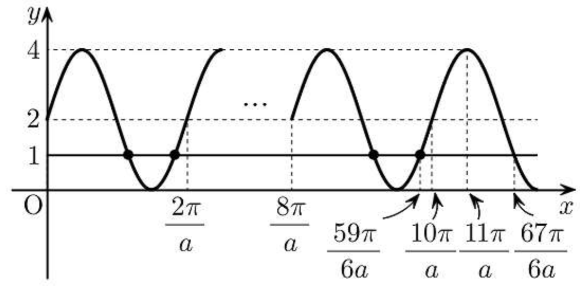
$\therefore x=\frac{7}{6a}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6a}\pi$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수가 10이 되기 위해서는 다음 그림과 같이

$\frac{8}{a}\pi+\frac{11}{6a}\pi\leq 2\pi<\frac{10}{a}\pi+\frac{7}{6a}\pi$, 즉 $\frac{59}{12}\leq a<\frac{67}{12}$

을 만족해야 한다.

따라서 자연수 a의 값은 5이다.



(ⅲ) $b=3$일 때

함수 $f(x)=|2\sin ax+3|=2\sin ax+3$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수가 10이어야 한다.

$0\leq x<\frac{2\pi}{a}$에서 교점의 개수가 1이고, 교점의 x좌표는

$2\sin ax+3=1$, $\sin ax=-1$

$ax=\frac{3}{2}\pi$

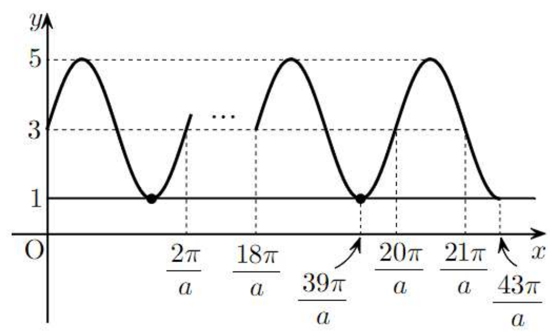
$\therefore x=\frac{3}{2a}\pi$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수가 10이 되기 위해서는 다음 그림과 같이

$\frac{18}{a}\pi+\frac{3}{2a}\pi\leq 2\pi<\frac{20}{a}\pi+\frac{3}{2a}\pi$, 즉 $\frac{39}{4}\leq a<\frac{43}{4}$

을 만족해야 한다.

따라서 자연수 a의 값은 10이다.



이상에서 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(3, 1)$, $(5, 2)$, $(10, 3)$

이므로 $a+b$의 최댓값은 13, 최솟값은 4이다.

$M=13$, $m=4$이므로 $M+m=17$

12) [정답] ①

[해설]

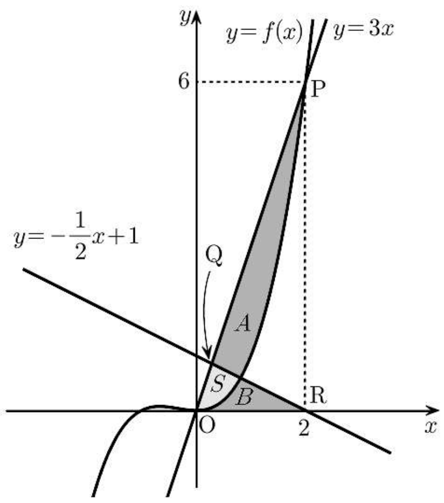
함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2(x+1)$에서 점 P의 좌표는 $(2, 6)$

점 P를 지나는 직선의 방정식은 $y=3x$

직선 $y=3x$와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 의 교점이 Q이므로

$$3x=-\frac{1}{2}x+1,\ x=\frac{2}{7},\ \mathrm{Q}\left(\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$$

직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 의 x절편은 2, y절편은 1이다.



따라서 두 직선 $y=3x$, $y=-\frac{1}{2}x+1$과 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}A-B&=A+S-(B+S)\\&=\int_0^2\{3x-f(x)\}dx-\frac{1}{2}\times2\times\frac{6}{7}\\&=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right)dx-\frac{6}{7}\\&=\left[-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^2-\frac{6}{7}\\&=\frac{8}{3}-\frac{6}{7}\\&=\frac{38}{21}\end{aligned}$$

13) [정답] ②

[해설]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to0}\frac{(f(x)-x)(g(x)-x)}{x^3}$$

의 값이 존재한다. $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

$$\lim_{x\to0}(f(x)-x)=0,\ 즉\ f(0)=0$$

또는 $\lim_{x\to0}(g(x)-x)=0$, 즉 $g(0)=0$

이때 조건 (가)에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 모두 직선 $y=x$ 위의 서로 다른 두 점 A, B를 지나므로 방정식 $f(x)-x=0$, $g(x)-x=0$의 실근은 서로 같다.

따라서 $f(x)-x$, $g(x)-x$는 모두 x를 인수로 갖는다.

$f(x)-x=x(x^2+ax+b)$, $g(x)-x=x(x+c)$라 하면

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{(f(x)-x)(g(x)-x)}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+ax+b)\times x(x+c)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+ax+b)(x+c)}{x}\end{aligned}$$

이때 $y=g(x)$와 직선 $y=x$는 서로 다른 두 점에서 만나므로 $c\neq0$

$\lim_{x\to0}\frac{(x^2+ax+b)(x+c)}{x}$에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

$$\lim_{x\to0}(x^2+ax+b)=0 \qquad \therefore\ b=0$$

$$\therefore\ f(x)=x^2(x+a)+x,\ g(x)=x(x+c)+x$$

조건 (나)에서 $\lim_{x\to0}\frac{(f(x)+x)(g(x)+x)}{x^3}$의 값이 존재하므로

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{(f(x)+x)(g(x)+x)}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\{x^2(x+a)+2x\}\{x(x+c)+2x\}}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\{x(x+a)+2\}\{x+c+2\}}{x}\end{aligned}$$

$x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

$$\lim_{x\to0}(x+c+2)=0 \qquad \therefore\ c=-2$$

$$\therefore\ g(x)=x(x-2)+x$$

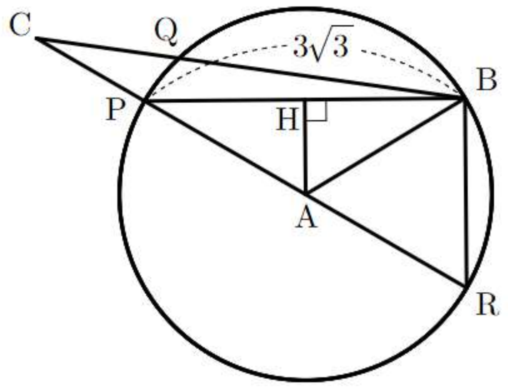
조건 (가)에서 의하여

$$a=-2,\qquad f(x)=x^2(x-2)+x$$

$$\therefore\ f(3)+g(8)=12+56=68$$

14) [정답] ⑤

[해설]



직선 AC가 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 R, 원의 중점 A에서 선분 PB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\cos A = -\frac{1}{2}$ 이므로 $\angle A = 120^\circ$

$\angle \mathrm{BAH} = 60^\circ$, $\overline{\mathrm{BH}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}} \times \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}} = 3$

$\sin B : \sin C = 5:3$ 이므로 삼각형 ABC에서 사인 법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin B} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C},\ \overline{\mathrm{AC}} = \frac{\sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{C}} \times \overline{\mathrm{AB}} = \frac{5}{3} \times 3 = 5$$

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AR}} = \overline{\mathrm{RB}} = 3$이므로 삼각형 ARB는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이다.

$$\overline{\mathrm{CR}} = \overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{AR}} = 5 + 3 = 8$$

삼각형 BCR에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times \cos 60^\circ$$
$$= 49$$
$$\therefore \overline{\mathrm{BC}} = 7$$

두 삼각형 CPQ, CRB는 서로 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{CP}} : \overline{\mathrm{CB}} = \overline{\mathrm{PQ}} : \overline{\mathrm{BR}}$$
$$2 : 7 = \overline{\mathrm{PQ}} : 3$$
$$\therefore \overline{\mathrm{PQ}} = \frac{6}{7}$$

[다른 풀이]

$\cos A = -\frac{1}{2}$ 이므로 $\angle A = 120^\circ$

원의 반지름의 길이를 r라 하면 삼각형 PAB에서 사인 법칙에 의해

$$\frac{\overline{\mathrm{PB}}}{\sin A} = 2r,\ r = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3$$

$\sin B : \sin C = 5:3$ 이므로 삼각형 ABC에서 사인 법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin B} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C},\ \overline{\mathrm{AC}} = \frac{\sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{C}} \times \overline{\mathrm{AB}} = \frac{5}{3} \times 3 = 5$$

$$\therefore \overline{\mathrm{CP}} = \overline{\mathrm{AC}} - \overline{\mathrm{AP}} = 5 - 3 = 2$$

삼각형 ABC에서 코사인 법칙에 의해

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos A = 49$$
$$\therefore \overline{\mathrm{BC}} = 7$$

삼각형 ABC에서 코사인 법칙의 변형에 의해

$$\cos C = \frac{5^2 + 7^2 - 3^2}{2 \times 5 \times 7} = \frac{13}{14},$$
$$\sin C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$\angle A = 120^\circ$ 이므로 원주각의 성질에 의해

$$\angle PQB = 120^\circ,\ \angle CQP = 60^\circ$$

따라서 삼각형 CPQ에서 사인 법칙에 의해

$$\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin C} = \frac{\overline{\mathrm{CP}}}{\sin Q}$$

$$\therefore \overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{CP}} \times \frac{\sin \mathrm{C}}{\sin \mathrm{Q}} = 2 \times \frac{\frac{3\sqrt{3}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{7}$$

15) [정답] ①

[해설]

최고차항의 계수가 양수이고

$$f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0\ (0 < \alpha < \beta < \gamma)$$

이므로

$$f(x) = k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ (k > 0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이라 하자.

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

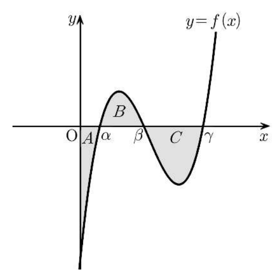
에서 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x) = f(x)$

$g'(x) = 0$에서 $x = \alpha$ 또는 $x = \beta$ 또는 $x = \gamma$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

한편, ㉠에 의하여 $y = f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 곡선 $y = f(x)$와 x, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, $\alpha \le x \le \beta$에서 곡선 $y = f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 B, $\beta \le x \le \gamma$에서 곡선 $y = f(x)$와 x축으로

둘러싸인 부분의 넓이를 C라 하면 함수 $g(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값 0을 가지므로

$$g(\beta)=\int_0^\beta f(t)\,dt=-A+B=0$$

$h(\beta)=8$ 이므로 $A+B=8$

$\therefore\ A=B=4$

$h(\gamma)=24$ 이므로 $A+B+C=24$ $\therefore\ C=16$

$$\therefore\ g(\alpha)-g(\gamma)=-A-(-A+B-C)$$
$$=C-B$$
$$=12$$

16) [정답] 14

[해설]

밑의 조건에서 $7-a>0,\ 7-a\neq 1$

$a<7,\ a\neq 6$

$\therefore\ a<6$ 또는 $6<a<7$ …… ㉠

진수의 조건에서

$2a-3>0,\quad a>\dfrac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\dfrac{3}{2}<a<6$ 또는 $6<a<7$

따라서 자연수 a의 값의 합은

$2+3+4+5=14$

17) [정답] 53

[해설]

$f'(x)=3x^2-4$에서

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-4)\,dx=x^3-4x+C$$

(단, C는 적분상수)

$f(2)=5$ 이므로 $C=5$

$f(x)=x^3-4x+5$

$\therefore f(4)=64-16+5=53$

[다른 풀이]

$f(4)-f(2)=\displaystyle\int_2^4 f'(x)\,dx$ 이므로

$$f(4)=f(2)+\int_2^4(3x^2-4)\,dx$$
$$=5+\Big[x^3-4x\Big]_2^4$$
$$=5+(48-0)$$
$$=53$$

18) [정답] 8

[해설]

$$\sum_{k=1}^{20}(-1)^k a_k=\sum_{k=1}^{10}\{(-1)^{2k-1}a_{2k-1}+(-1)^{2k}a_{2k}\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(-a_{2k-1}+a_{2k})$$
$$=-\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{10}a_{2k}$$
$$=(-12)+20$$
$$=8$$

19) [정답] 59

[해설]

$f(x)=x^3+ax^2+b$에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극댓값을 가지므로 $f'(-2)=0$

$f'(-2)=12-4a$ 이므로 $a=3$

$f(x)=x^3+3x^2+b,\ f'(x)=3x^2+6x$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가지고, 함수 $f(x)$의 극솟값이 5이므로

$f(0)=5,\quad b=5$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2+5$이므로

$f(3)=27+27+5=59$

20) [정답] 7

[해설]

$a_n=\log_2 x$ 일 때 $x=2^{a_n}$이므로 점 A_n의 x좌표는 2^{a_n}이다.

$\overline{\mathrm{OA}_n}=2^{a_n}$, $\overline{\mathrm{OA}_{n+1}}=2^{a_{n+1}}$이고 $\overline{\mathrm{OA}_n}:\overline{\mathrm{OA}_{n+1}}=1:4$ 이므로

$2^{a_n}:2^{a_{n+1}}=1:4$, $\quad 2^{a_{n+1}}=4\times 2^{a_n}=2^{a_n+2}$

$\therefore\ a_{n+1}=a_n+2$

그러므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 $\boxed{2}$ 이다.

점 B_n의 좌표는 $(2^{a_n},\ 4^{a_n})$이고,

$$T_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}$$
$$=\frac{1}{2}\times 4^{a_n}\times(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})$$

$$=\frac{1}{2}\times 2^{2a_n}\times\left(2^{a_n+2}-2^{a_n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times 2^{2a_n}\times 3\times 2^{a_n}$$

$$=\boxed{\frac{3}{2}}\times 8^{a_n} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이다. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로

$$a_n=2n-1$$

따라서 ㉠에서 $\quad T_n=\frac{3}{2}\times 8^{2n-1}$

수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{2}\times 8=12$, 공비가 64인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{5}T_n=\frac{12\times\left(64^5-1\right)}{64-1}$$

$$=\frac{12\times\left(2^{30}-1\right)}{63}$$

$$=\boxed{\frac{4}{21}}\times\left(2^{30}-1\right)$$

이다.

이상에서 (가) 2 (나) $\frac{3}{2}$ (다) $\frac{4}{21}$ 이다.

$p=2$, $q=\frac{3}{2}$, $r=\frac{4}{21}$ 이므로 $\quad \frac{p}{q\times r}=7$

21) [정답] 9

[해설]

$x=-k$ 일 때

$$|g(-k)-g(k)|=0\ ,\qquad g(-k)=g(k)$$

$|x|\neq k$ 일 때 $\quad h(x)=\frac{|g(x)-g(k)|}{|x|-k}$

$0<x<k$ 또는 $x>k$일 때

$$h(x)=\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to k}h(x)$가 존재한다.

함수 $g(x)$가 $x=k$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to k-}h(x)=\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k-}\frac{|g(x)-g(k)|}{-|x-k|}$$

$$=-\lim_{x\to k-}\left|\frac{g(x)-g(k)}{x-k}\right|$$

$$=-|g'(k)|$$

$$\lim_{x\to k+}h(x)=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+}\frac{|g(x)-g(k)|}{|x-k|}$$

$$=\lim_{x\to k+}\left|\frac{g(x)-g(k)}{x-k}\right|$$

$$=|g'(k)|$$

$\lim\limits_{x\to k-}h(x)=\lim\limits_{x\to k+}h(x)$ 이므로

$$|g'(k)|=0\ ,\qquad g'(k)=0$$

$x<-k$ 또는 $-k<x<0$일 때

$$h(x)=-\frac{|g(x)-g(-k)|}{x-(-k)}$$

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to -k}h(x)$가 존재한다.

함수 $g(x)$가 $x=-k$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to -k-}h(x)=\lim_{x\to -k-}\left\{-\frac{|g(x)-g(-k)|}{x-(-k)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to -k-}\left\{-\frac{|g(x)-g(-k)|}{-|x-(-k)|}\right\}$$

$$=\lim_{x\to -k-}\left|\frac{g(x)-g(-k)}{x-(-k)}\right|$$

$$=|g'(-k)|$$

$$\lim_{x\to -k+}h(x)=\lim_{x\to -k+}\left\{-\frac{|g(x)-g(-k)|}{x-(-k)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to -k+}\left\{-\frac{|g(x)-g(-k)|}{|x-(-k)|}\right\}$$

$$=-\lim_{x\to -k+}\left|\frac{g(x)-g(-k)}{x-(-k)}\right|$$

$$=-|g'(-k)|$$

$\lim\limits_{x\to -k-}h(x)=\lim\limits_{x\to -k+}h(x)$ 이므로

$$|g'(-k)|=0\ ,\qquad g'(-k)=0$$

$g(-k)=g(k)$, $g'(-k)=g'(k)=0$ 이므로

$$f(-k-a)=f(k-a),\ f'(-k-a)=f'(k-a)=0$$

$f(x)=x(x-1)^2(x-2)$ 에서

$$f'(x)=4x^3-12x^2+10x-2=2(x-1)\left(2x^2-4x+1\right)$$

$f'(x)=0$ 에서 $\quad x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=1$ 또는 $x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(1)=0$ 이고 $f\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ 이므로

$$-k-a=1-\frac{\sqrt{2}}{2},\ k-a=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\quad (\because\ k>0)$$

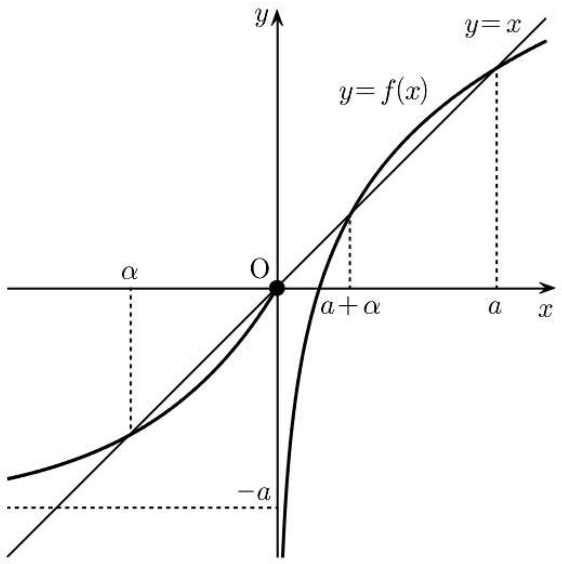
$a=-1$, $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $\quad a+20k^2=-1+20\cdot\frac{1}{2}=9$

22) [정답] 90

[해설]

함수 $y=6\log_3 x-b$ 의 그래프는 함수 $y=3^{\frac{1}{6}(x+a+b)}-a$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것과 같다.

조건 (가)에서 $x\le 0$에서 곡선 $y=3^{\frac{1}{6}(x+a+b)}-a$가 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만나고 조건 (나)에서 그 중 한 점의 x좌표가 0이다. 다른 한 점의 x좌표를 α $(-a<\alpha<0)$라 하면 곡선 $y=6\log_3 x-b$가 직선 $y=x$와 만나는 두 교점의 x좌표는 a, $\alpha+a$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 모든 점의 x좌표의 집합은 $\{0, a, \alpha, a+\alpha\}$



(ⅰ) $b=\alpha$, $c=a+\alpha$일 때
$|c|=2|b|$ 이고 $c>0$, $b<0$이므로
$$a+\alpha=-2\alpha, \qquad \alpha=-\frac{1}{3}a$$
$b=-\frac{1}{3}a$, $a+\alpha=\frac{2}{3}a$이므로 두 점 (a, a), $\left(\frac{2}{3}a, \frac{2}{3}a\right)$가 곡선 $y=6\log_3 x+\frac{1}{3}a$ 위의 점이다.
$$a=6\log_3 a+\frac{1}{3}a, \quad \frac{2}{3}a=6\log_3 \frac{2}{3}a+\frac{1}{3}a$$
$\frac{2}{3}a=6\log_3 a=12\log_3 \frac{2}{3}a$ 이므로
$$\frac{4}{9}a^2=a, \qquad a=\frac{9}{4}$$
이는 $\frac{2}{3}a=6\log_3 a$ 를 만족시키지 않으므로 모순이다.
(ⅱ) $b=a+\alpha$, $c=\alpha$일 때
$|c|=2|b|$ 이고 $c<0$, $b>0$이므로
$$-\alpha=2a+2\alpha, \qquad \alpha=-\frac{2}{3}a$$
$b=\frac{1}{3}a$, $a+\alpha=\frac{1}{3}a$이므로 두 점 (a, a), $\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a\right)$가 곡선 $y=6\log_3 x-\frac{1}{3}a$ 위의 점이다.
$$a=6\log_3 a-\frac{1}{3}a, \quad \frac{1}{3}a=6\log_3 \frac{1}{3}a-\frac{1}{3}a$$
$\frac{4}{3}a=6\log_3 a=12\log_3 \frac{1}{3}a$ 이므로
$$\frac{1}{9}a^2=a, \qquad a=9$$
이는 $\frac{4}{3}a=6\log_3 a$ 를 만족시킨다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=9$, $b=3$
$$\therefore a^2+b^2=90$$

23) [정답] ③

[해설]
일의 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 2, 4이므로
2가지
나머지 십의 자리, 백의 자리, 천의 자리가 될 수 있는 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5 중에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$${}_5\Pi_3=5^3=125$$
따라서 구하는 경우의 수는
$$2\times125=250$$

24) [정답] ④

25) [정답] ②

[해설]
한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. $a+b=7$인 사건을 A, $a\times b$가 6의 배수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A\cup B)$이다.
(ⅰ) $a+b=7$일 때
a, b의 가능한 순서쌍 (a, b)는 $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$의 6가지이므로
$$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{36}$$
(ⅱ) $a\times b$가 6의 배수일 때
(a) a와 b가 모두 6이 아닌 경우
a, b의 가능한 순서쌍 (a, b)는 $(2, 3)$, $(3, 2)$,

$(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$의 $\quad 4$가지

(b) a 또는 b가 6인 경우

a, b의 가능한 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 6)$, $(2,\ 6)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 6)$, $(5,\ 6)$, $(6,\ 6)$, $(6,\ 5)$, $(6,\ 4)$, $(6,\ 3)$, $(6,\ 2)$, $(6,\ 1)$의 $\quad 11$가지

(a), (b)에서 $\quad \mathrm{P}(B)=\dfrac{15}{36}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $(1,\ 6)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$, $(6,\ 1)$이 중복되므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{36}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{6}{36}+\frac{15}{36}-\frac{4}{36}\\&=\frac{17}{36}\end{aligned}$$

26) [정답] ②

[해설]

1부터 9까지 자연수를 배열하는 경우의 수는 $\quad 9!$

제2열에 놓인 3장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 짝수가 되려면 3장 모두 짝수이거나 홀수 2장, 짝수 1장이어야 한다. 따라서 구하는 경우의 수는

$$({}_4\mathrm{P}_3+{}_5\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1\times 3!)\times 6!$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{({}_4\mathrm{P}_3+{}_5\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1\times 3!)\times 6!}{9!}=\frac{11}{21}$$

27) [정답] ②

[해설]

조건 (가)에서

$$\mathrm{P}(X\ge 1)+\mathrm{P}(X\ge 7)=1$$
$$\mathrm{P}(X\ge 1)+1-\mathrm{P}(X\le 7)=1$$
$$\mathrm{P}(X\ge 1)=\mathrm{P}(X\le 7)$$
$$\therefore\ \mathrm{E}(X)=m=\frac{1+7}{2}=4$$

확률변수 X의 표준편차를 σ라 하면 정규분포 $\mathrm{N}(4,\ \sigma^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-4}{\sigma}$ 라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

조건 (나)에서

$$\mathrm{P}(|X-5|\le 3)+\mathrm{P}(X\le 0)=\mathrm{P}(Z\le 1)$$
$$\mathrm{P}(2\le X\le 8)+\mathrm{P}(X\le 0)=\mathrm{P}(Z\le 1)$$
$$\mathrm{P}\left(\frac{2-4}{\sigma}\le Z\le\frac{8-4}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{0-4}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\le 1)$$
$$\mathrm{P}\left(-\frac{2}{\sigma}\le Z\le\frac{4}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{4}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\le 1)$$
$$\mathrm{P}\left(-\frac{4}{\sigma}\le Z\le\frac{2}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{4}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\le 1)$$
$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{2}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z\le 1),\qquad \sigma=2$$

28) [정답] ⑤

[해설]

숫자 0이 적혀 있는 카드 2장과 숫자 2가 적혀 있는 카드 3장을 나열할 때 n $(1\le n\le 5)$번째 놓인 카드에 적혀 있는 수를 b_n이라 하자. $|b_{s+1}-b_s|=2$ 를 만족시키는 자연수 s의 개수가 3 이상인 경우는 다음과 같다.

02022, 02202, 22020 20220, 20202

(ⅰ) $s=3$일 때

02022이면 숫자 1이 적혀 있는 카드 5장은 양 끝 또는 이웃한 22사이에 놓여야 한다.

따라서 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$

02202, 22020, 20220일 때도 동일하므로 $k=3$일 때 경우의 수는 $\quad 4\times 21=84$

(ⅱ) $s=4$일 때

조건에서 k의 개수가 3이므로 20202에서 2와 0 사이 4곳 중 한 곳을 택하는 경우의 수는 $\quad {}_4\mathrm{C}_1=4$

남은 4개의 1이 적혀 있는 카드를 양 끝 또는 2와 0 사이 1을 놓은 곳에 놓아야 한다.

따라서 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$

$\therefore\ 4\times 15=60$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 경우의 수는

$84+60=144$

29) [정답] 25

[해설]
확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	$\cdots$	k	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{b}{2}$	$\frac{b}{3}$	$\cdots$	$\frac{b}{k}$	1

$$\mathrm{E}(X^2)=\sum_{i=0}^{k} i^2\mathrm{P}(X=i)=\sum_{i=1}^{k} i^2\cdot\frac{b}{i}=b\times\frac{k(k+1)}{2}$$
$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=0}^{k} i\mathrm{P}(X=i)=\sum_{i=1}^{k} i\cdot\frac{b}{i}=bk$$
이고 $\mathrm{E}(X^2)=2\mathrm{E}(X)$이므로
$$\frac{bk(k+1)}{2}=2bk,\qquad k=3$$
$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=-\{\mathrm{E}(X)\}^2+2\mathrm{E}(X)\\&=-\{\mathrm{E}(X)-1\}^2+1\\&=-(3b-1)^2+1\end{aligned}$$
이므로 $\mathrm{V}(X)$의 값은 $b=\frac{1}{3}$일 때 최대이다.

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합이 1이므로
$$a+b+\frac{b}{2}+\frac{b}{3}=1,\qquad a=1-\frac{11}{6}b$$
$b=\frac{1}{3}$일 때 $a=\frac{7}{18}$이므로 $\mathrm{V}(X)$의 값이 최대가 되도록 하는 a의 값은 $\frac{7}{18}$이다.

$p=18,\ q=7$이므로 $\qquad p+q=25$

30) [정답] 43

[해설]
갑이 확인한 두 수의 합이 을이 확인한 두 수의 합보다 큰 사건을 A, 작은 사건을 A'라 하면 $\quad n(A)=n(A')$

갑이 확인한 두 수의 합과 을이 확인한 두 수의 합이 같은 사건을 B라 하면 표본공간 S에 대하여 $A\cup B\cup A'=S$이고 세 사건 A, B, A'는 서로 배반사건이므로
$$\mathrm{P}(A)=\frac{1-\mathrm{P}(B)}{2}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

갑과 을이 확인한 두 수의 합이 2로 같을 확률은
$$\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{81}$$
갑과 을이 확인한 두 수의 합이 3으로 같을 확률은
$$\left\{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}\times\left\{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}=\frac{4}{81}$$
갑과 을이 확인한 두 수의 합이 4로 같을 확률은
$$\left\{3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}\times\left\{3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}=\frac{1}{9}$$
갑과 을이 확인한 두 수의 합이 5로 같을 확률은
$$\left\{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}\times\left\{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}=\frac{4}{81}$$
갑과 을이 확인한 두 수의 합이 6으로 같을 확률은
$$\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{81}$$
따라서 갑과 을이 확인한 두 수의 합이 서로 같을 확률은
$$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{81}+\frac{4}{81}+\frac{1}{9}+\frac{4}{81}+\frac{1}{81}=\frac{19}{81}$$
㉠에서 $\qquad \mathrm{P}(A)=\dfrac{1-\frac{19}{81}}{2}=\dfrac{31}{81}$

갑이 확인한 두 수의 합이 5인 사건을 C라 하면 구하는 확률은 $\quad \mathrm{P}(C|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(A)}$

갑이 확인한 두 수의 합이 5이고 을이 확인한 두 수의 합이 2일 확률은 $\quad \left\{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}\times\left\{1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}=\frac{2}{81}$

갑이 확인한 두 수의 합이 5이고 을이 확인한 두 수의 합이 3일 확률은 $\quad \left\{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}\times\left\{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}=\frac{4}{81}$

갑이 확인한 두 수의 합이 5이고 을이 확인한 두 수의 합이 4일 확률은 $\quad \left\{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}\times\left\{3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}=\frac{2}{27}$

갑이 확인한 두 수의 합이 5이고 갑이 확인한 두 수의 합이 을이 확인한 두 수의 합보다 클 확률은
$$\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{2}{9}-\frac{2}{27}=\frac{4}{27}$$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(C|A)=\frac{\frac{4}{27}}{\frac{31}{81}}=\frac{12}{31}$$
$p=31,\ q=12$이므로 $\qquad p+q=43$