제2교시

수학영역(정답과 풀이)

2027학년도 고3 6월 YJ모의고사(빠른 정답)

1. [정답] ⑤
2. [정답] ①
3. [정답] ③
4. [정답] ④
5. [정답] ④

6. [정답] ①
7. [정답] ②
8. [정답] ①
9. [정답] ③
10. [정답] ②

11. [정답] ②
12. [정답] ⑤
13. [정답] ③
14. [정답] ④
15. [정답] ①

16. [정답] 4
17. [정답] 64
18. [정답] 7
19. [정답] 9
20. [정답] 14

21. [정답] 25
22. [정답] 110

---

23. [정답] ②
24. [정답] ⑤
25. [정답] ③

26. [정답] ⑤
27. [정답] ④
28. [정답] ⑤
29. [정답] 661
30. [정답] 245

2027학년도 고3 6월 YJ모의고사(해설)

1) 정답 ⑤

$$3^{2+\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{3}^{2\sqrt{3}-4}}=3^{2+\sqrt{3}}\times\sqrt{3}^{4-2\sqrt{3}}=3^{2+\sqrt{3}}\times 3^{2-\sqrt{3}}$$
$$=3^4=81$$

2) 정답 ①

$f'(x)=2x^2-x+1$이므로 $f'(1)=2-1+1=2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}=\frac{1}{2}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\frac{1}{2}\times f'(1)=\frac{1}{2}\times 2=1$$

3) 정답 ③

$$\sum_{k=1}^{10}(3a_k-1)=20\Rightarrow\sum_{k=1}^{10}(3a_k)-10=20\Rightarrow\sum_{k=1}^{10}a_k=10$$
$$\sum_{k=1}^{9}(2a_k+1)=15\Rightarrow\sum_{k=1}^{9}(2a_k)+9=15\Rightarrow\sum_{k=1}^{9}a_k=3$$
$$a_{10}=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{9}a_k=10-3=7$$

4) 정답 ④

$$\lim_{x\to-2-}f(f(x))=f(-2)=0$$

$\lim_{x\to 0+}f(x)=1$ 이므로

$$\lim_{x\to-2-}f(f(x))+\lim_{x\to 0+}f(x)=0+1=1$$

5) 정답 ④

자연수 n에 대하여 n이 홀수 일 때, $y=x^n$은 원점 대칭이고, n이 짝수이면 y축 대칭이다. 따라서

$$\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2-x)dx=\int_{-2}^{2}3x^2dx=2\int_{0}^{2}3x^2dx$$
$$=2\left[x^3\right]_0^2=16$$

6) 정답 ①

모든 실수 x에 대하여 $\cos x$의 최솟값은 -1이므로 함수 $f(x)=\cos a\pi x+|a|$의 최솟값은 $|a|-1$이고, 주기는 $\frac{2}{|a|}$이다. 이때 최솟값과 주기가 같으므로,

$$|a|-1=\frac{2}{|a|}\Rightarrow|a|^2-|a|-2=0$$
$$\Rightarrow|a|=2\ (\because|a|>0)$$
$$\Rightarrow a=\pm2$$

따라서 모든 a값의 곱은 -4이다.

7) 정답 ②

점 A의 x좌표를 a라 하고, 점 B의 x좌표를 b라 하고, $a<b$라 하자. 두 점 A, B는 곡선 $y=\log_2 x$위의 점이므로, $A(a,\log_2 a)$, $B(b,\log_2 b)$. 두 점 A, B는 직선 $y=x+t$위에 놓여있고, 직선의 기울기가 1이며, $\overline{AB}=2\sqrt{2}$이므로 $b-a=2$, $\log_2 b-\log_2 a=2$ 따라서 $B(2+a, 2+\log_2 a)$라 할 수 있다. 점 B가 곡선 $y=\log_2 x$위의 점이므로 대입하면,

$$2+\log_2 a=\log_2(2+a)\Rightarrow 2=\log_2\frac{2+a}{a}$$
$$\Rightarrow 4=\frac{2+a}{a}$$
$$\Rightarrow 4a=2+a$$
$$\Rightarrow a=\frac{2}{3}$$

따라서 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{8}{3}$이므로, $a+b=\frac{10}{3}$.

8) 정답 ①

0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\frac{x}{|x|}$의 값은 1또는 -1이다.

$\frac{\sin\theta}{|\sin\theta|}+\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}=0$에서 둘 중 하나는 1이고, 하나는 -1임을 알 수 있다. $\therefore\sin\theta\cos\theta<0$

이때, $\frac{\cos\theta}{|\sin\theta|}-\frac{\sin\theta}{|\cos\theta|}=2$에서

만약 $\sin\theta>0,\cos\theta<0$이면, $\frac{\cos\theta}{|\sin\theta|}<0$, $\frac{\sin\theta}{|\cos\theta|}>0$이므로, $\frac{\cos\theta}{|\sin\theta|}-\frac{\sin\theta}{|\cos\theta|}<0$으로 모순이다.

따라서 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$이다. 그러면,

$$\frac{\cos\theta}{|\sin\theta|}-\frac{\sin\theta}{|\cos\theta|}=2 \ \Rightarrow\ -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2$$
$$\Rightarrow\ \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=-2$$
$$\Rightarrow\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$과 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$을 연립하면,

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$임을 알 수 있다.

$\cos\left(\theta-\frac{1}{2}\pi\right)=\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9) **정답** ③

$f(x)=(x-a)(x-b)^2$이므로

$f'(x)=(x-b)^2+2(x-a)(x-b)=(x-b)(3x-2a-b)$

따라서 $f(x)$는 $x=b$ 또는 $\frac{2a+b}{3}$에서 극값을 갖는다.

이때, $f(x)$는 삼차함수이므로, 극값이 2개이면 극솟값, 극댓값을 각각 하나씩 갖는다. $f(b)=0$이고, 극댓값이 4이므로,

$f(b)=0$은 극솟값이고, $f\left(\frac{2a+b}{3}\right)=4$임을 알 수 있다.

$f\left(\frac{2a+b}{3}\right)=\left(\frac{b-a}{3}\right)\left(\frac{2a-2b}{3}\right)^2=4$

계산해보면, $(b-a)^3=27$이다. 이때, a, b모두 실수 이므로

$b-a$역시 실수이고, 따라서 $b-a=3$.

$f(b+1)=(b-a+1)(1)^2=(3+1)(1)^2=4$.

10) **정답** ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고,

등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공비를 r이라 하자.

$a_2=b_2 \Rightarrow a+d=br$ ……㉠

$a_6=b_4 \Rightarrow a+5d=br^3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$4d=br(r-1)(r+1)$ ……㉢

$S_{11}=8S_4 \Rightarrow \frac{11(2a+10)}{2}=8\times\frac{4(2a+3d)}{2}$

$\Rightarrow d=3a$ ……㉣

㉣을 ㉠, ㉡에 대입하면,

$4a=br$, $16a=br^3$이고, 서로 나누면, $r^2=4$.

이때, 수열 $\{a_n\},\{b_n\}$모두 모든 항이 자연수이므로,

$r=2$. ……㉤

㉤을 ㉢에 대입하면, $2d=3r$.

따라서 $2d=3r=6a$이고, a,b,d,r모두 자연수이므로,

a의 최솟값은 1이다.

$a_3=a+2d=7a$이므로

a_3의 최솟값은 7.

11) **정답** ②

두 점 P, Q의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 위치를 각각 $x_1(t), x_2(t)$라 하고, 가속도를 각각 $a_1(t), a_2(t)$라 하자.

$x_1(t)=\int v_1(t)dt=\int(3t^2-6t+1)dt=t^3-3t^2+t+c_1$

$x_2(t)=\int v_2(t)dt=\int(4t-2)dt=2t^2-2t+c_2$

(c_1, c_2는 적분 상수이고, 시각 $t=0$에서의 점 P, Q의 위치이다.)

$a_1(t)=v_1'(t)=6t-6$

$a_2(t)=v_2'(t)=4$

이제 각 조건들을 살펴보자.

ㄱ. 시각 $t=3$일 때, 점 P의 위치는

$x_1(3)=3^3-3\cdot 3^2+3+c_1=3+c_1$ 이때, c_1의 값을 모르기 때문에, 시각 $t=3$일 때, 점 P의 위치는 모른다. (X)

ㄴ. 시각 $t=\frac{5}{3}$일 때, 두 점 P, Q의 가속도는 각각

$a_1\left(\frac{5}{3}\right)=6\times\frac{5}{3}-6=4$, $a_2\left(\frac{5}{3}\right)=4$이므로, 서로 같다. (O)

ㄷ. $d(t)=|x_1(t)-x_2(t)|$

$=|t^3-5t^2+3t+c_1-c_2|$

시각 $t=1$일 때, 두 점 P, Q의 위치가 같으면 $d(1)=0$이므로,

$d(1)=|-1+c_1-c_2|=0 \ \Rightarrow\ c_1-c_2=1$이다.

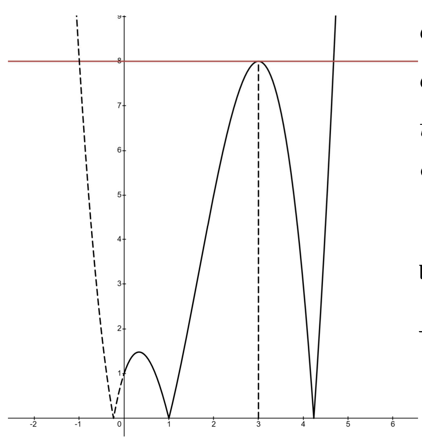
$\therefore d(t)=|t^3-5t^2+3t+1|$

$f(t)=t^3-5t^2+3t+1$이라 하면,

$f'(t)=3t^2-10t+3=(3t-1)(t-3)$이므로,

$f(t)$는 $t=\frac{1}{3}$에서 극댓값, $t=3$에서 극솟값을 갖는다.

이를 바탕으로 $y=d(t)$그래프를 그려서, 살펴보면.



$d(3)=8$이고, $d(t)=d(3)$을 만족시키는 t의 값은 2개임을 알 수 있다. ($\because t\geq 0$) (X)

따라서 <보기>에서 옳은 조건은 ㄴ뿐이다.

12) 정답 ⑤

함수 $g(x)$는 원점을 지나는 직선이다. $g(x)=mx$라 하자.

$h(x)-g(x)=4x$이므로, $h(x)=(m+4)x$.

점 A의 좌표를 $A(a, ma)$라 하자. (점 A는 $g(x)$위의 점)

$f(x)$와 $g(x)$는 원점과 점 A에서 접하고,

$f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로.

$f(x)-g(x)=x^2(x-a)^2$

$f(x)=x^2(x-a)^2+mx=x^4-2ax^3+a^2x^2+mx$

$f'(x)=4x^3-6ax^2+2a^2x+m$

이때, $f(x)$의 접선 $h(x)$의 접점의 좌표를 $(t, f(t))$라 하면,

$f'(t)=m+4$

$4t^3-6at^2+2a^2t+m=m+4$

$4t^3-6at^2+2a^2t-4=0$ ……㉠

$h(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$.

이때, $h(x)$는 원점을 지나므로,

$0=-tf'(t)+f(t)$

$t(m+4)=t^4-2at^3+a^2t^2+mt$ 이때, $t\neq 0$이므로,

$t^3-2at^2+a^2t-4=0$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하면,

$t=\frac{1}{3}a$ 또는 a. 이때 $t<a$이므로, $t=\frac{1}{3}a$.

㉠의 식에 $t=\frac{1}{3}a$를 대입하면,

$\frac{4}{27}a^3-\frac{2}{3}a^3+\frac{2}{3}a^3=4 \quad \Rightarrow \quad a=3$

$a=3$이므로, 점 A의 좌표는 $A(3, 3m)$ 또한

$f(x)=x^4-6x^3+9x^2+mx$이고, $h(x)=(m+4)x$이므로

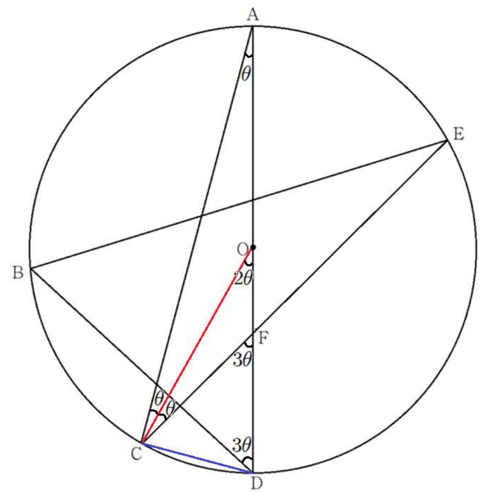
연립하여, 점 B의 좌표를 구해보면 $B(4, 16+4m)$.

세 점 $O(0,0)$, $A(3,3m)$, $B(4, 16+4m)$으로 이루어진

삼각형△OAB의 넓이는 $\triangle OAB=\frac{1}{2}|3(16+4m)-3\times 4m|$

$\therefore$ $\triangle OAB=24$

13) 정답 ③



$\angle CAD=\theta$라 하자.

$\overset{\frown}{CD} : \overset{\frown}{AE} : \overset{\frown}{AB}=1:2:3$ 이므로 $\angle ACE=2\theta$, $\angle ADB=3\theta$.

이때, $\overline{AO}=\overline{CO}$이므로, 삼각형 $\triangle ACO$는 이등변삼각형이다.

따라서 $\angle CAO=\angle ACO=\theta$이고,

$\angle OCF=\angle ACE-\angle ACO=2\theta-\theta=\theta$

삼각형 $\triangle CFO$와 삼각형 $\triangle AFC$를 살펴보면, 각각 θ, 2θ의 각을 갖고 있으므로,

$\triangle CFO \backsim \triangle AFC$ (AA닮음)

선분 $\overline{OF}$의 길이를 a라 하자.

$\overline{OF}:\overline{CF}=\overline{CF}:\overline{AF}$

$a:2\sqrt{14}=2\sqrt{14}:(a+10) \quad \Rightarrow \quad a(a+10)=56$

$\therefore a=4$

$\overline{CF}:\overline{OC}=\overline{AF}:\overline{AC}$

$4:10=2\sqrt{14}:\overline{AC} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC}=5\sqrt{14}$

선분 $\overline{AD}$는 원 O의 지름이므로, 삼각형 $\triangle ACD$는 직각삼각형.

피타고라스 정리에 의하여,

$\overline{CD}^2=\overline{AD}^2-\overline{AC}^2$

$\quad =20^2-(5\sqrt{14})^2=50$

이때, $\angle CFD$는 삼각형 $\triangle ACF$의 외각이므로, $\angle CFD=3\theta$

삼각형 $\triangle CFD$에서 코사인법칙에 의하여

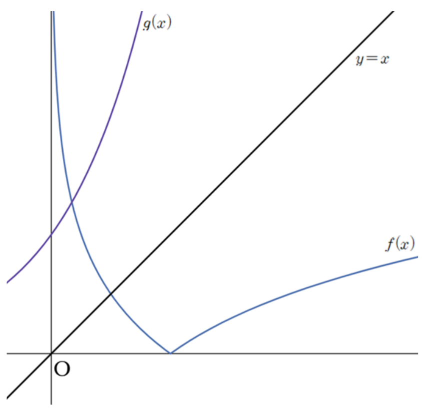
$$\cos 3\theta=\frac{\overline{DF}^2+\overline{CF}^2-\overline{CD}^2}{2\cdot\overline{DF}\cdot\overline{CF}}=\frac{36+56-50}{24\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{8}$$

이때, $\angle ADB=3\theta$이므로

$$\cos(\angle ADB)=\frac{\sqrt{14}}{8}$$

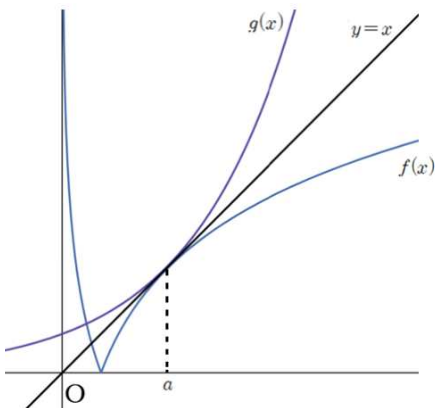
14) **정답** ④

$y=\log_2 x+k$와 $y=2^{x-k}$는 서로 역함수이고,
함수 $g(x)$는 증가함수이므로, $\mathrm{C} \subset \mathrm{B}$
또한 함수 $g(x)$의 치역이 $\{y|y>0\}$이므로, 집합 $\mathrm{C} \neq \varnothing$일 때, $g(x)$와 $y=x$의 교점이 제 1사분면에 존재하고, 집합 C의 모든 원소는 양수이다.
이때, 집합 $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}$의 원소는 함수 $f(x), g(x)$, $y=x$가 동시에 만나는 교점의 x좌표이므로, 그 교점은 반드시 제 1사분면에 존재하여야 한다. 따라서 $y=f(x)$대신에 $y=\log_2 x+k$와의 교점으로 생각할 수 있다.
따라서 이후 풀이에서 집합 $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}$의 원소에 대한 교점을 구할 때, $y=f(x)$대신에 $y=\log_2 x+k$에 대입한다.
그래프를 그려보면, $k<\alpha$일 때,



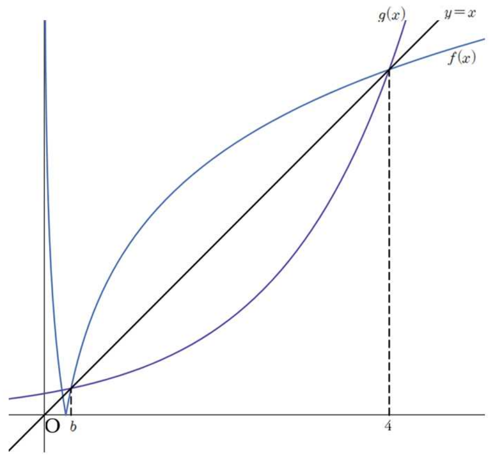
위와 같이 그려지므로, 세 함수가 동시에 만나는 교점은 존재하지 않는다. $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \varnothing$

(i) $k=\alpha$일 때
$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \{a\}$이므로 세 함수가 동시에 만나는 점은 $x=a$일 때뿐이다.



$x=a$일 때, 세 함수의 함숫값이 모두 같으므로,
$f(a)=g(a)=a$
$\log_2 a+\alpha=2^{a-\alpha}=a$ …… ㉠
$p=g(3)=2^{3-\alpha}$ ……㉡

(ii) $k=\beta$일 때
$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \{b, 4\}$이므로 $x=b$와 $x=4$일 때, 세 함수가 동시에 만난다.



$f(4)=g(4)=4$이므로
$\log_2 4+\beta=2^{4-\beta}=4 \quad \Rightarrow \quad \beta=2$
$f(b)=g(b)=b$이므로
$\log_2 b-2=2^{b-2}=b$ …… ㉢

$$\frac{b \cdot g(a)}{a \cdot g(b)} \cdot p=\frac{b}{a} \cdot \frac{2^{a-k}}{2^{b-k}} \cdot p=\frac{b}{a} \cdot 2^{a-b} \cdot p$$

이때, ㉠에서 ㉢을 빼면

$$\log_2 \frac{a}{b}+\alpha-2=a-b \quad \Rightarrow \quad 2^{\log_2 \frac{a}{b}+\alpha-2}=2^{a-b}$$

$$\Rightarrow 2^{a-b}=\frac{a}{b} \cdot 2^{\alpha-2}$$

$$\therefore \frac{b \cdot g(a)}{a \cdot g(b)} \cdot p=\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot 2^{\alpha-2} \cdot 2^{3-\alpha}=2$$

15) **정답** ①

조건 (가)에 의하여 $t=b$일 때, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim_{t \to b-} f(x)=\lim_{t \to b+} f(x)$
$\Rightarrow b^2-4b+a=0 \quad \Rightarrow a=-b(b-4)$
$\therefore \ x^2-4x+a=(x-b)(x+b-4)$

$\{g(x)\}^2=x^2\{f(x)\}^2$이므로 $g(x)=xf(x)$ 또는 $-xf(x)$.

$t=0$일 때, $xf(x)=\begin{cases} x(x-b)(x-(4-b)) & (x<0) \\ x(x-b) & (x \geq 0) \end{cases}$이고
함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=x(x-b)(x-(4-b))$ 또는 $g(x)=-x(x-b)(x-(4-b))$이고,
$x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=x(x-b)$ 또는 $g(x)=-x(x-b)$이다.
또한 $x=0$일 때, 미분가능해야한다.

이때 $y=xf(x)$의 $x=0$에서 좌미분계수와 우미분계수를 구해보면, $\lim_{x\to0-}\frac{xf(x)}{x}=b(4-b)$, $\lim_{x\to0+}\frac{xf(x)}{x}=-b$이므로, 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면, $b(4-b)=-b$ 이거나 $b(4-b)=b$. 즉 $b=0$ 또는 3 또는 5 이고, 이때 $b>2$이므로 $b=3$ 또는 5.

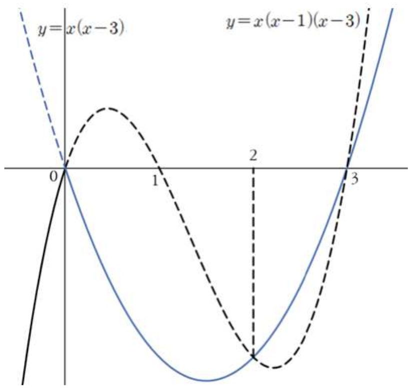
(ⅰ) $t=0$, $b=3$일 때

$$xf(x)=\begin{cases} x(x-1)(x-3) & (x<0) \\ x(x-3) & (x\geq 0)\end{cases}$$

$y=x(x-1)(x-3)$와 $y=x(x-3)$의 교점의 x좌표를 구해보면

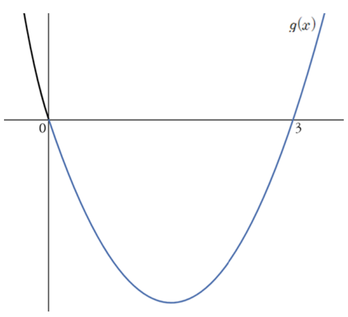
$x(x-1)(x-3)=x(x-3) \Rightarrow x=0$ 또는 2 또는 3

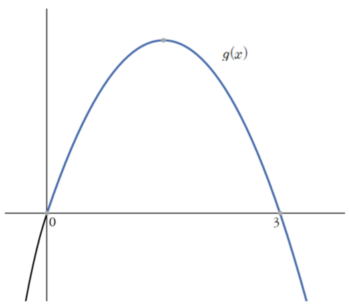
따라서 함수 $xf(x)$의 그래프는 다음과 같다.



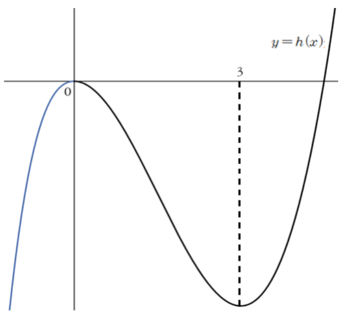
$$g(x)=\begin{cases} -x(x-1)(x-3) & (x<0) \\ x(x-3) & (x\geq 0)\end{cases}$$ 또는

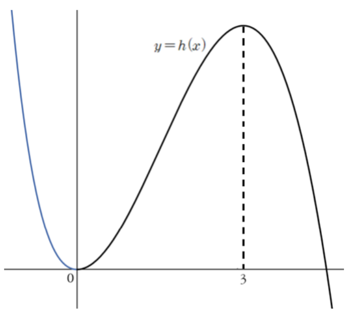
$$g(x)=\begin{cases} x(x-1)(x-3) & (x<0) \\ -x(x-3) & (x\geq 0)\end{cases}$$ 이고 그래프는 다음과 같다.





이때 $h'(x)=g(x)$이므로 각 케이스 별로 $y=h(x)$를 그려보면





(다) 조건에서 함수 $h(x)$는 $x=k$에서 최댓값을 갖아야하지만 두 케이스 모두 최댓값이 존재하지 않는다.

$\therefore$ $b=3$일 때 (다)조건을 만족시키는 실수 k의 값은 존재 하지 않는다.

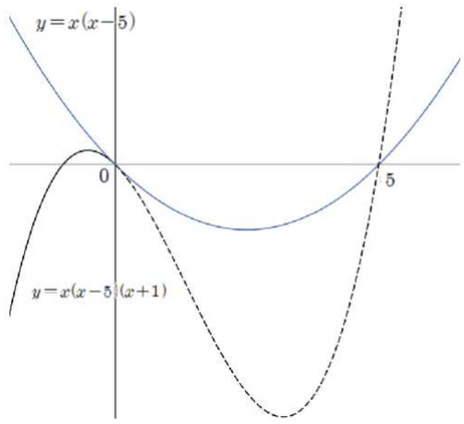
(ⅱ) $t=0$, $b=5$일 때

$$xf(x)=\begin{cases} x(x-5)(x+1) & (x<0) \\ x(x-5) & (x\geq 0)\end{cases}$$

$y=x(x-5)(x+1)$와 $y=x(x-5)$의 교점의 x좌표를 구해보면

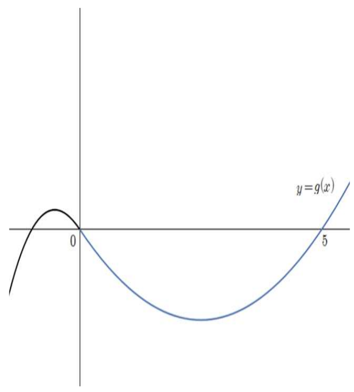
$x(x-5)(x+1)=x(x-5) \Rightarrow x=0$ 또는 5 ($x=0$에서 중근)

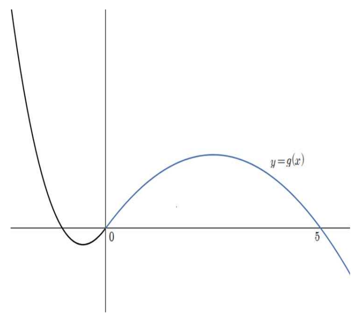
따라서 함수 $xf(x)$의 그래프는 다음과 같다.



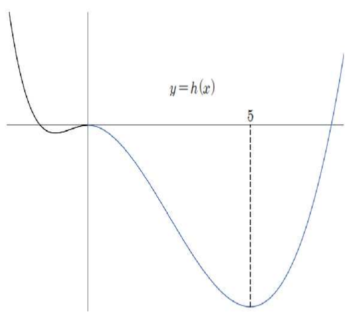
$$g(x)=\begin{cases} x(x-5)(x+1) & (x<0) \\ x(x-5) & (x\geq 0)\end{cases}$$ 또는

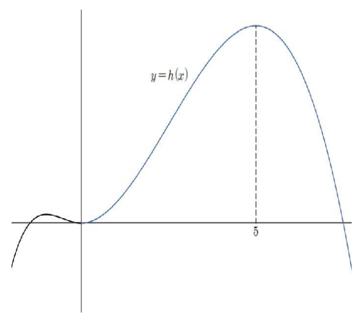
$$g(x)=\begin{cases} -x(x-5)(x+1) & (x<0) \\ -x(x-5) & (x\geq 0)\end{cases}$$ 이고 그래프는 다음과 같다.





이때 $h'(x)=g(x)$이므로 각 케이스 별로 $y=h(x)$를 그려보면





이때 함수 $h(x)$가 최댓값을 갖도록 하는 그래프는 두 번째 케이스 뿐이고, 그때 모든 x에 대하여, $h(x)\leq h(k)$를 만족시키는 k의 값은 5이다.

$\therefore$ $b=5$, $k=5$

$a=-b(b-4)=-5$이므로

$a+b+k=5$

16) **정답** 4

진수조건에 의하여, $x+1>0$, $x-3>0$이므로, $x>3$.

$\log_{\frac{1}{5}}(x+1)=\log_5(x-3)-1$

$-\log_5(x+1)=\log_5(x-3)-1$

$\log_5(x+1)+\log_5(x-3)=1$

$\log_5(x+1)(x-3)=1$

$(x+1)(x-3)=5$

$x=4$ $(\because x>3)$

17) **정답** 64

$f(x)=\int_0^x(t^3-2t+a)dt$에서 양변을 x에 대해 미분하면

$f'(x)=x^3-2x+a$이다. 이때 $f'(1)=3$이므로

$f'(1)=1-2+a=3$

$a=4$

$f(a)=\int_0^4(t^3-2t+4)dt=\left[\frac{1}{4}t^4-t^2+4t\right]_0^4=64-16+16$

$\therefore f(a)=64$

18) **정답** 7

$2^x>0$, $\frac{1}{2^{x-2}}>0$이므로 산술기하평균 부등식에 의하여,

$2^x+\frac{1}{2^{x-2}}\geq 2\sqrt{2^x\times\frac{1}{2^{x-2}}}=2\sqrt{4}=4$

이때, 등호는 $2^x=\frac{1}{2^{x-2}}$일 때, 성립하므로, $x=1$일 때, 성립한다.

따라서 함수 $f(x)=2^x+\frac{1}{2^{x-2}}+2$는 $x=1$일 때, 최솟값 6을 갖는다. $\Rightarrow$ $a=1,\ b=6$

$\therefore$ $a+b=7$

19) **정답** 9

$f(x)=-x^2+7x$, $g(x)=x^3-6x^2+10x+9$라 하자.

함수 $f(x)$와 $g(x)$의 교점을 구해보면,

$-x^2+7x=x^3-6x^2+10x+9$

$(x+1)(x-3)^2=0$ $\Rightarrow$ $x=-1$ 또는 $x=3$

$\therefore (-1,\ -8),\ (3,\ 12)$

$f'(x)=-2x+7$, $g'(x)=3x^2-12x+10$이므로

$f'(3)=g'(3)=1$이다.

따라서 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 $x=3$에서 접하고 그때의 접선의 기울기가 1이다.

이때 직선 $y=x+k$는 기울기가 1인 직선이므로,

$x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$-x^2+7x\leq x+k\leq x^3-6x^2+10x+9$가 성립하려면

직선 $y=x+k$ 역시 $(3,12)$를 지나야 한다.

$\therefore$ $k=9$

20) **정답** 14

두 실수 α와 β에 대하여 $\alpha+\beta=\pi$이면

$\cos\alpha+\cos\beta=\cos\alpha+\cos(\pi-\alpha)=\cos\alpha-\cos\alpha=0$이다.

$\cos\frac{1}{n}\pi+\cos\frac{2}{n}\pi+\cdots+\cos\frac{n-1}{n}\pi+\cos\frac{n}{n}\pi$에서

$\cos\frac{1}{n}\pi+\cos\frac{n-1}{n}\pi=0,\quad \cos\frac{2}{n}\pi+\cos\frac{n-2}{n}\pi=0\cdots$이고,

$\cos\frac{n}{n}\pi=-1$이므로

$\cos\frac{1}{n}\pi+\cos\frac{2}{n}\pi+\cdots+\cos\frac{n-1}{n}\pi+\cos\frac{n}{n}\pi=-1$

$\therefore a=-1$

$\sum_{t=1}^{n}f(n,t)=-1$이므로,

$\sum_{n=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{n}f(n,t)\right)=\sum_{n=1}^{m}(-1)=-m$

$\therefore P(m)=-m$

$\sum_{m=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{m}g(m,k)-\sum_{k=1}^{m-1}g(k,k+1)\right)=\sum_{m=1}^{5}\left(\sum_{n=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{n}f(n,t)\right)\right)$

$=\sum_{m=1}^{5}(-m)=-15$

$\therefore b=-15$

$a+P(b)=-1+15=14$

21) **정답** 25

만약 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 연속이라고 하면,

함수 $f(x)$는 실수 전체에서 연속이다.

그러면 함수 $f(x-t)$도 실수 전체에서 연속함수이고,

$f(x)f(x-t)$역시 실수 전체에서 연속이다.

하지만 문제에서 $f(x)f(x-t)$가 실수 전체에서 연속이 되도록 하는 양의 실수 t가 $t=c$일 때뿐이라고 했기 때문에,

$t \neq c$일 때 $f(x)f(x-t)$는 불연속인 점이 존재해야한다.
따라서 $f(x)$는 $x=b$에서 불연속임을 알 수 있다.
또한 함수 $f(x)$는 $x \neq b$인 모든 구간에서 다항함수이므로
$x \neq b$일 때 항상 연속이다.

함수 $f(x-t)$는 함수 $f(x)$를 x축 방향으로 t만큼 평행이동 시킨 함수이다.
함수 $f(x)$가 불연속인 구간은 $x=b$일 때로 유일하므로,
함수 $f(x-t)$역시 $x=b+t$일 때만 불연속이다.
$t=c$일 때를 생각해보자.
함수 $f(x)f(x-c)$가 실수 전체에서 연속이 되어야 하는데,
함수 $f(x)$는 $x=b$일 때만 불연속이고, 함수 $f(x-c)$는
$x=b+c$일 때만 불연속이므로
$x=b$, $x=b+c$일 때 연속성만 확인하면 된다.
$\lim_{x\to b-} f(x)f(x-c)=(-b^2+a^2)f(b-c)$이고
$\lim_{x\to b+} f(x)f(x-c)=(b-2)f(b-c)$이므로
$(-b^2+a^2)f(b-c)=(b-2)f(b-c)$이때 $f(x)$는 $x=b$에서
불연속이므로 $-b^2+a^2 \neq b-2$이다. 따라서
$f(b-c)=0$.

같은 방법으로 $x=b+c$에서의 연속성을 확인해보면
$f(b+c)=0$
$\therefore\ f(b-c)=f(b+c)=0$ ……㉠

방정식 $f(x)=0$의 해를 구해보면
$x \le b$일 때, $-x^2+a^2=0 \ \Rightarrow\ x=a$ 또는 $-a$
$x>b$일 때, $x-2=0 \ \Rightarrow\ x=2$
이때 $c>0$이고, $0<a<2$ 이므로,
$-a<a<2$이다.
따라서 ㉠에 의하여,
$(b-c, b+c)=(-a, a)$ 또는 $(-a, 2)$ 또는 $(a, 2)$

(ⅰ) $(b-c, b+c)=(-a, a)$
$b-c=-b-c \ \Rightarrow\ b=0$
$0<b$이기 때문에 모순이다.

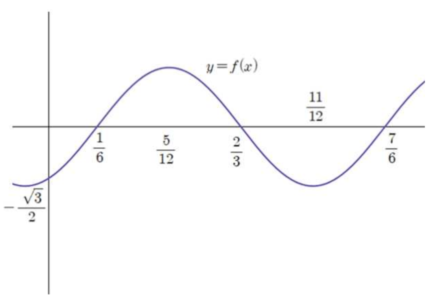
(ⅱ) $(b-c, b+c)=(-a, 2)$
$b-c=-a$, $b+c=2$ 두 식을 연립하면,
$2b=2-a$. 이때, $\frac{2}{3}<a$이므로
$2-a<\frac{4}{3} \ \Rightarrow\ 2b<\frac{4}{3} \ \Rightarrow\ b<\frac{2}{3}$
하지만 문제 조건에서 $\frac{2}{3}<a<b$이기 때문에 모순이다.

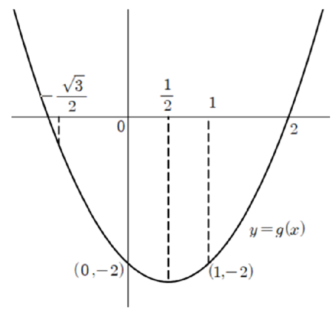
(ⅲ) $(b-c, b+c)=(a, 2)$
$b-c=a$, $b+c=2$ 두 식을 연립하면
$2b=2+a$이고, $\frac{2}{3}<a$이므로,
$\frac{8}{3}<2+a \ \Rightarrow\ \frac{8}{3}<2b \ \Rightarrow\ \frac{4}{3}<b<2$이므로, 문제 조건을
만족시킨다. 즉 $\frac{4}{3}<b<2$.
또한 $c=b-a$이고 a는 양수이므로, $c<b$이다.
이때, $f(c)=\frac{5}{3}$에서, $c<b$이므로,
$f(c)=-c^2+a^2=(a-c)(a+c)$
$\quad =(2b-2+b-2)(2b-2-b+2)=(3b-4)b=\frac{3}{5}$
위 방정식을 풀면,
$b=\frac{5}{3}$ 또는 $-\frac{1}{3}$이다. 이때 b는 양수이므로 $b=\frac{5}{3}$
$\therefore a=\frac{4}{3}, b=\frac{5}{3}, c=\frac{1}{3}$

$\frac{p}{q}=f(0)=a^2=\frac{16}{9}$

$\therefore p+q=25$

22) **정답** 110
함수 $f(x)=\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2\pi\left(x-\frac{1}{6}\right)\right)$는 주기가 1이고
$y=\sin 2\pi x$를 x축 방향으로 $\frac{1}{6}$만큼 평행이동한 함수이다.





함수 $y=g(f(x))$에서 $f(x)=k$로 치환하면 $f(x)$의 치역은
$\{k|-1 \le k \le 1\}$이므로 $g(k)=k^2-k-2$ $(\{k|-1 \le k \le 1\})$

$[t, t+\frac{1}{4}]$에서 $y=g(f(x))$의 최댓값이 $h(t)$이다.
이때 함수 $f(x)$는 주기가 1인 주기함수이므로 두 함수
$g(f(x))$와 $h(t)$역시 주기가 1인 주기함수이다.
$0 \le t < 1$에서의 $h(t)$를 살펴보자.

(ⅰ) $t=0$일 때

$f(0)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$이고, 구간 $[0,\frac{1}{4}]$에서 $f(x)$는 증가함수이다.

따라서 $g(k)=k^2-k-2$ $(k=f(x),\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\le k\le\frac{1}{2})$

$\therefore\ h(0)=g\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{4}$

(ⅱ) $0<t\le\frac{1}{6}$일 때

구간 $[t,t+\frac{1}{4}]$에서 $f(x)$는 증가함수이고, 항상

$g(f(t))>g\left(f\left(t+\frac{1}{4}\right)\right)$이므로 $h(t)=g(f(t))$

(ⅲ) $\frac{1}{6}<t\le\frac{5}{12}$일 때

구간 $[t,t+\frac{1}{4}]$에서 $g(f(x))$의 최댓값은 항상 $x=\frac{5}{12}$일 때

이므로 $h(t)=g\left(f\left(\frac{5}{12}\right)\right)=g(1)=-2$

(ⅳ) $\frac{5}{12}<t\le\frac{2}{3}$일 때

구간 $[t,t+\frac{1}{4}]$에서 $f(x)$는 감소함수이고,

$g(f(t))<g\left(f\left(t+\frac{1}{4}\right)\right)$이므로 $h(t)=g\left(f\left(t+\frac{1}{4}\right)\right)$

(ⅴ) $\frac{2}{3}<t\le\frac{11}{12}$일 때

구간 $[t,t+\frac{1}{4}]$에서 $g(f(x))$의 최댓값은 항상 $x=\frac{11}{12}$일 때

이므로 $h(t)=g\left(f\left(\frac{11}{12}\right)\right)=g(-1)=0$

(ⅵ) $\frac{11}{12}<t<1$일 때

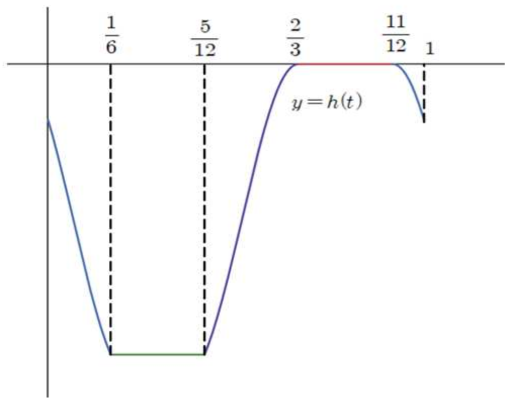
구간 $[t,t+\frac{1}{4}]$에서 $f(x)$는 증가함수이고

$g(f(t))>g\left(f\left(t+\frac{1}{4}\right)\right)$이므로 $h(t)=g(f(t))$

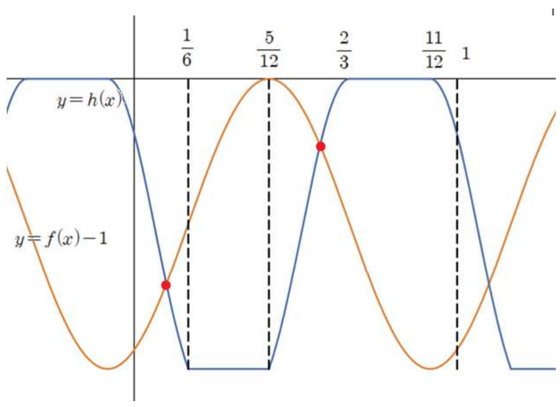
따라서 함수 $h(t)$를 구해보면

$$h(t)=\begin{cases} g(f(t)) & (0\le t\le\frac{1}{6}) \\ -2 & (\frac{1}{6}<t\le\frac{5}{12}) \\ g\left(f\left(t+\frac{1}{4}\right)\right) & (\frac{5}{12}<t\le\frac{2}{3}) \\ 0 & (\frac{2}{3}<t\le\frac{11}{12}) \\ g(f(t)) & (\frac{11}{12}<t<1) \end{cases}$$

함수 $h(t)$의 그래프를 구간 $[0,1]$에서 그려보면 다음과 같다.



이때 함수 $h(t)$는 주기가 1인 함수이므로 위 그래프가 반복된다. 또한 함수 $f(x)-1$은 $f(x)$를 y축 방향으로 -1만큼 평행이동 시킨 함수이므로 $y=h(x)$와 $y=f(x)-1$의 그래프를 그려보면



$0\le t\le 1$에서 함수 $h(x)$와 $f(x)-1$의 교점이 2개이므로

$a_n=2n$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}2k=110$

23) **정답** ②

$\frac{7!}{4!3!}=35$

24) **정답** ⑤

$\mathrm{P}(A^c \cap B^c)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=0$

$\mathrm{P}(A\cup B)=1$

이때 사건 A와 B는 서로 배반사건이기 때문에 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=0$, 이때 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이므로,

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$

사건 A와 C는 서로 독립이므로, $\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

$\mathrm{P}(A\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A\cap C)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(C)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$

25) **정답** ③

$(x-1)(x+1)(x^2+3)^4=(x^2-1)(x^2+3)^4$의 전개식에서 x^4이 나오는 경우는

(1) (x^2-1)에서의 상수와 $(x^2+3)^4$에서의 x^4항의 곱

(2) (x^2-1)에서의 x^2항과 $(x^2+3)^4$에서의 x^2항의 곱

(1) $(-1)\cdot{}_4C_2\cdot 3^2=-54$

(2) $1\cdot{}_4C_1\cdot 3^3=108$

따라서 x^4의 계수는 $108-54=54$

26) **정답** ⑤

(1) A→P→B

10×1

(2) A→Q→B

5×3

(1), (2)에 의하여 25가지

27) **정답** ④

같은 성별끼리 이웃하지 않게 앉아야하므로 남녀가 번갈아 앉아야한다. 그렇게 되면 같은 성별끼리는 마주보고 앉게 된다.

이때 특정된 2학년 남학생 A학생의 자리를 고정시키면, A학생의 맞은편에는 반드시 3학년 남학생이 앉아야 하므로 2가지 경우가 있다.

A학생의 맞은편에 3학년 학생 한 명이 앉으면, 남학생 2명이 남는데, 이 2명의 학생들은 서로 학년이 다르기 때문에 남은 남학생 자리의 어느 두 자리에 앉아도 상관이 없다.

따라서 경우의 수는 2가지

$\therefore$ 남학생이 자리에 앉는 경우의 수는 $2\times 2=4$가지

여학생 자리 4군데 중에 한 자리를 골라서 앉을 수 있는 여학생의 경우의 수는 4가지.

이때 여학생 4명중 1명을 선택하여 자리에 앉으면, 뒤 남학생과 같은 방법으로 남은 3명의 여학생이 자리에 앉는 방법의 수는 4가지이다.

따라서 전체 경우의 수는 $4\times 4\times 4=64$

28) **정답** ⑤

(1) $c+d=0$인 경우

순서쌍 (c,d)의 경우의 수는 $(0,0)$으로 1가지

$a+b\le 7$의 경우의 수는 ${}_3H_7$

$e\le 5$의 경우의 수는 6가지

$\therefore\ 1\times{}_9C_2\times 6=216$가지

(2) $c+d=1$인 경우

순서쌍 (c,d)의 경우의 수는 2가지

$a+b\le 6$의 경우의 수는 ${}_3H_6$

$e\le 4$의 경우의 수는 5가지

$\therefore\ 2\times{}_8C_2\times 5=280$가지

(3) $c+d=2$인 경우

순서쌍 (c,d)의 경우의 수는 3가지

$a+b\le 5$의 경우의 수는 ${}_3H_5$

$e\le 3$의 경우의 수는 4가지

$\therefore\ 3\times{}_7C_2\times 4=252$가지

(4) $c+d=3$인 경우

순서쌍 (c,d)의 경우의 수는 4가지

$a+b\le 4$의 경우의 수는 ${}_3H_4$

$e\le 2$의 경우의 수는 3가지

$\therefore\ 4\times{}_6C_2\times 3=180$가지

(5) $c+d=4$인 경우
순서쌍 (c,d)의 경우의 수는 5가지
$a+b \le 3$의 경우의 수는 ${}_3H_3$
$e \le 1$의 경우의 수는 2가지
$\therefore\ 5 \times {}_5C_2 \times 2 = 100$가지

(6) $c+d=5$인 경우
순서쌍 (c,d)의 경우의 수는 6가지
$a+b \le 2$의 경우의 수는 ${}_3H_2$
$e \le 0$의 경우의 수는 1가지
$\therefore\ 6 \times {}_4C_2 \times 1 = 36$가지
(1) ~ (6)에 의하여 전체 경우의 수는
$216+208+252+180+100+36=1064$.

29) **정답** 661
(가)조건에 의하여
$f(1)$은 1,2,4,8,16,32에 대응될 수 있다.
$f(2)$는 1,2,4,8,16에 대응될 수 있다.
$f(4)$은 1,2,4,8에 대응될 수 있다.
$f(8)$은 1,2,4에 대응될 수 있다.
$f(16)$은 1,2에 대응될 수 있다.
$f(32)$는 1에만 대응될 수 있다. $(f(32)=1)$

(가)조건까지 가능한 f의 전체 경우의 수는 $6!=720$가지
이때 f의 치역의 원소의 개수가 3개 이상 5개 이하이므로
치역이 1개, 2개, 6개인 경우를 찾는다.

(ⅰ) 치역의 원소의 개수가 1개인 경우
$f(32)=1$이므로 정의역의 모든 원소가 1에 대응되어야 한다.
따라서 가능한 f의 경우의 수는 1가지.

(ⅱ) 치역의 원소의 개수가 2개인 경우
$f(32)=1$이므로 1은 반드시 치역의 원소이다.

1) 치역$=\{1,2\}$
$f(32)=1$이고, 나머지 정의역의 원소 1,2,4,8,16은 모두 1,2에 대응될 수 있기 때문에 2^5의 경우의 수가 있다. 이때, 모든 원소가 1에 대응되는 경우는 빼야하므로, 2^5-1가지

2) 치역$=\{1,4\}$
$f(32)=1$이고, $f(16)$은 4로 대응 될 수 없기 때문에, $f(16)=1$이다. 나머지 정의역의 원소 1,2,4,8은 모두 1,4에 대응될 수 있기 때문에 2^4의 경우의 수가 있다. 이때, 모든 원소가 1에 대응되는 경우는 빼야하므로, 2^4-1가지

3) 치역$=\{1,8\}$
위와 같은 방법으로 2^3-1가지

4) 치역$=\{1,16\}$
위와 같은 방법으로 2^2-1가지

5) 치역$=\{1,32\}$
위와 같은 방법으로 $2-1$가지

따라서 치역의 원소의 개수가 2개인 경우의 수는
$31+15+7+3+1=57$가지

(ⅲ) 치역의 원소의 개수가 6개인 경우
공역의 원소 32에 대응될 수 있는 정의역의 원소는 1뿐이므로
$f(1)=32$
공역의 원소 16에 대응될 수 있는 정의역의 원소는 1,2뿐인데,
$f(1)=32$이므로, $f(2)=16$
공역의 원소 8에 대응될 수 있는 정의역의 원소는 1,2,4뿐인데,
$f(1)=32,\ f(2)=16$이므로, $f(4)=8$
위와 같은 이유로 $f(8)=4,\ f(16)=2,\ f(32)=1$
따라서 치역의 원소의 개수가 6개인 경우는 1가지이다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$720-(1+57+1)=661$

30) **정답** 245
동전을 1회 던졌을 때, 우승할 확률을 P_W라 하자.

- 앞면 - 공 1개 - 6이 적힌 공

동전의 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$,

1개의 공을 뽑을 때 6이 적힌 공이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

- 뒷면 - 공 2개 - 6이 적힌 공

동전의 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$
2개의 공을 동시에 뽑을 때 6이 적힌 공이 나올 확률은
$\frac{{}_5C_1}{{}_6C_2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$
$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
$\therefore P_W = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$

동전을 1회 던졌을 때, 탈락할 확률을 P_L라 하자.

- 앞면 - 공 1개 - 5가 적힌 공

동전의 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

1개의 공을 뽑을 때 5가 적힌 공이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

- 뒷면 - 공 2개 - 두 수의 합이 5

동전의 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

2개의 공을 뽑을 때 공에 적힌 수의 합이 5인 경우는 1과4가 적힌 공을 뽑거나, 2와 3이 적힌 공을 뽑는 경우가 있다.

따라서 확률은 $\frac{2}{{}_6C_2}=\frac{2}{15}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{2}{15}=\frac{1}{15}$

$\therefore P_L=\frac{1}{12}+\frac{1}{15}=\frac{3}{20}$

동전을 1회 던졌을 때, 우승하지도, 탈락하지도 않을 확률을 P_T라고 하면 $P_T=1-P_W-P_L$ (통과할 확률)

$\therefore P_T=\frac{3}{5}$

B가 우승할 확률을 구해보자.

(1) B가 1회에 우승할 확률

- A가 1회에 우승하지 않고, B는 1회에서 우승해야한다.

$(1-P_W)P_W=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

(2) B가 2회에 우승할 확률

1회에서 탈락할 경우 2회 게임을 진행할 수 없으므로,
A가 1회에서 통과하는 경우와 탈락하는 경우를 나눠서
생각한다.

- A와 B가 1회에서 통과하고, C는 우승하지 않고, A는 2회에서 우승하지 않고, B는 2회에서 우승할 확률

  $(P_T)^2(1-P_W)^2P_W=\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}$

- A가 1회에서 탈락하고, B는 1회에서 통과, C는 1회에서 우승하지 않고, B가 2회에서 우승할 확률

  $P_LP_T(1-P_W)P_W=\frac{3}{20}\frac{3}{5}\frac{3}{4}\frac{1}{4}$

B가 우승할 때, A가 동전을 한 번 던지는 경우는 A가 1회에서 탈락하는 경우이기 때문에

조건부 확률로 B가 우승할 때, A가 동전을 한 번 던질 확률은

$$\frac{\frac{3}{20}\frac{3}{5}\frac{3}{4}\frac{1}{4}}{\frac{1}{16}+\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}+\frac{3}{20}\frac{3}{5}\frac{3}{4}\frac{1}{4}}=\frac{109}{136}$$

$\therefore p+q=109+136=245$