02 선분의 내분점

1 선분의 내분점의 작도 ★

생각 | 이해 • • 암기 | 적용

▶ **선분의 내분점이란 ?**

선분 AB 위의 점 P에 대하여

$$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$$

을 만족할 때, 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 **내분한다**고 하며, 점 P를 선분 AB의 **내분점**이라 한다.

〈선분 AB의 $m:n$ 내분점 P〉

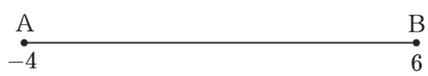
선분 AB의 $m:n$ 내분점은 다음과 같이 작도할 수 있다.

● 선분의 내분점의 작도

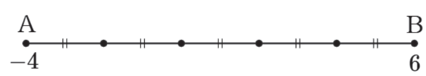
[단계 1] 선분 AB를 $m+n$등분한다. ★
[단계 2] 점 A에서 출발하여 m등분 움직인다.

예시 1 수직선 위의 두 점 A(-4), B(6)에 대하여 선분 AB의 $2:3$ 내분점 P의 좌표를 구해보자.

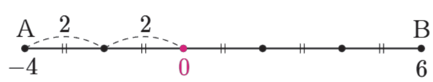
먼저, 두 점 A(-4), B(6)를 수직선 위에 표시해보자.



• 선분 AB를 $\underbrace{2+3}_{=5}$ 등분하자.



그러면 등분한 한 칸의 길이는 2이다.
• 점 A에서 출발하여 2등분 움직이자.



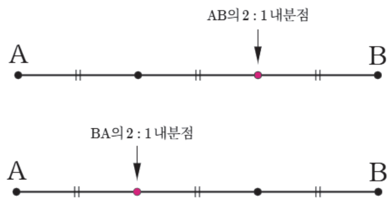
이러한 방식으로 선분 AB의 $2:3$ 내분점 P의 좌표가 P(0)임을 알 수 있다.

주의 !

- 선분 AB를 $m:n$으로 내분한다. $\boxed{\neq}$ 선분 BA를 $m:n$으로 내분한다.
- 선분 AB를 $m:n$으로 내분한다. $\boxed{\neq}$ 선분 AB를 $n:m$으로 내분한다.

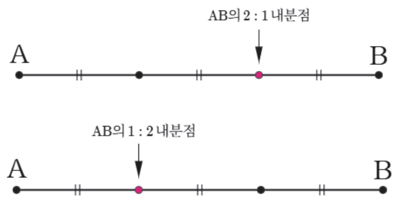
설명

예를 들어, 선분 AB의 $2:1$ 내분점과
선분 BA의 $2:1$ 내분점을 각각 나타내어 보면 다음과 같다.



이는 표현상 **선분의 왼쪽 알파벳이 시작점의 역할을 하기 때문**이다.

또한, 선분 AB의 $2:1$ 내분점과 $1:2$ 내분점도 각각 나타내어 보면 다음과 같고,



이 두 점도 같지 않음을 알 수 있다.

2 수직선 위에서 선분의 내분점 좌표 구하기

생각 | 이해 **암기 | 적용**

수직선 위에서 선분의 내분점을 직접 작도하기 힘들 때, 다음의 공식을 이용할 수도 있다.

● 수직선 위에서 선분의 내분점의 좌표

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여

① 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는 $\boxed{\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}}$

② 선분 AB의 중점의 좌표는 $\boxed{\dfrac{x_1+x_2}{2}}$

공식의 증명은 **〈부록〉**에 첨부해 두었다.

Tip 내분점 공식 적용 팁 – 대각선 곱하기

내분점의 공식을 처음 접하면 공식의 〈분자〉를 계산하는 과정을 혼동할 가능성이 크다.
이를 방지하기 위해서는 아래와 같은 과정을 거치면 된다.

수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1)$, $\mathrm{B}(x_2)$에 대하여
선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점의 좌표를 공식을 통해 구하는 경우

우선 다음과 같이 적어두고,

$$\begin{array}{ccc} & m \quad : \quad n & \\ \mathrm{A}(x_1) & & \mathrm{B}(x_2) \end{array}$$

대각선으로 각각 곱한 후 더하면

$$mx_2 + nx_1$$

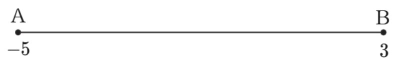
내분점 공식의 분자를 쉽게 계산할 수 있다.

예시 2 수직선 위의 두 점 $A(-5)$, $B(3)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구해보자.

① AB의 $3:1$ 내분점 P ② BA의 $3:1$ 내분점 Q ③ AB의 중점 M

[방법 1] 내분점을 직접 작도하여 구하기

두 점 $A(-5)$, $B(3)$을 수직선 위에 표시해보면 다음과 같다.

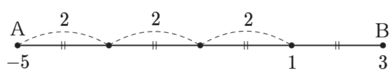


① P, Q의 좌표

• **선분 AB를 4등분하자.**

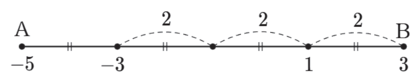
그러면 등분한 한 칸의 길이는 2이다.

• **점 A에서 출발하여 3등분 움직이자.**



즉, P의 좌표는 $P(1)$이다.

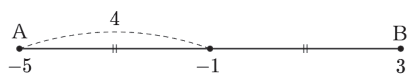
• **점 B에서 출발하여 3등분 움직이자.**



즉, Q의 좌표는 $Q(-3)$이다.

② M의 좌표

• **선분 AB를 2등분하고, 점 A에서 출발하여 1등분 움직이자.**



즉, M의 좌표는 $M(-1)$이다.

[방법 2] 공식 이용하기

① P의 좌표

$3 : 1$

$A(-5)$ $B(3)$

$$\frac{3\times3+1\times(-5)}{3+1}=1$$

② Q의 좌표

$3 : 1$

$B(3)$ $A(-5)$

$$\frac{3\times(-5)+1\times3}{3+1}=-3$$

③ M의 좌표

$1 : 1$

$A(-5)$ $B(3)$

$$\frac{(-5)+3}{2}=-1$$

3 좌표평면 위의 선분의 내분점

생각 | 이해 • • 암기 | 적용

수직선에서 선분의 내분점의 좌표를 구하는 방식을 그대로 적용하여 좌표평면 위에서도 선분의 내분점의 좌표를 구할 수 있다. **수직선에서 선분의 내분점의 좌표를 구하는 방식을 x좌표, y좌표에 각각 적용한다**고 생각하면 된다.

> **● 좌표평면에서 선분의 내분점의 좌표 구하기**
>
> 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여
>
> ① 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$
>
> ② 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

공식의 증명은 〈부록〉에 첨부해 두었다.

생각 넓히기 공식 없이 좌표평면 위의 내분점 구하기

생각 | 이해 • • 암기 | 적용

수직선에서 선분의 내분점을 작도하던 방식을 좌표의 관점에서 이해하면 공식 없이도 좌표평면 위의 내분점을 구할 수 있다.

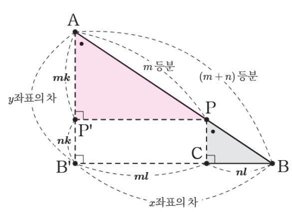
좌표평면 위 두 점 A, B에 대하여 선분 AB의 $m : n$ 내분점을 구해야 한다면

[단계 1] 두 점의 (x좌표의 차)와 (y좌표의 차)를 각각 $m+n$등분한다. ★
[단계 2] 점 A 에서 x좌표와 y좌표를 각각 m등분씩 움직인다.

설명

이러한 방식을 이용할 수 있는 이유는 **삼각형의 닮음**을 통해 이해할 수 있다.
다음과 같은 그림을 떠올려보자.

여기서 삼각형 $\mathrm{AP'P}$와 PCB는 서로 닮음이고, 닮음비는 $m : n$이다.
이를 바탕으로 나머지 선분의 길이를 다음과 같이 표시할 수 있으므로,



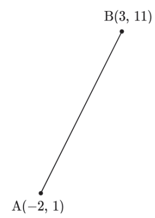
$\therefore$ P의 좌표 ➔ (<u>선분 $\mathrm{B'B}$의 $m : n$ 내분점</u>, <u>선분 $\mathrm{AB'}$의 $m : n$ 내분점</u>)

예시 3 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-2, 1)$, $\mathrm{B}(3, 11)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구해보자.

① AB의 $2:3$ 내분점 P ② BA의 $2:3$ 내분점 Q ③ AB의 중점 M

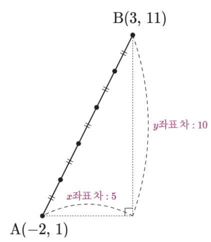
[방법 1] 내분점을 직접 작도하여 구하기

선분 AB를 좌표평면 위에 표시해보면 다음과 같다.



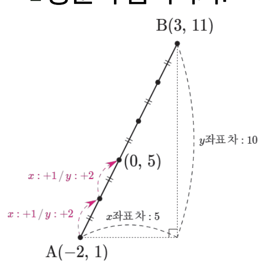
① P, Q의 좌표

- **두 점 A, B의 (x좌표의 차)와 (y좌표의 차)를 각각 5등분하자.**



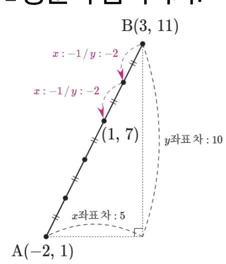
➔ (x좌표의 차)를 등분한 한 칸의 길이는 1, (y좌표의 차)를 등분한 한 칸의 길이는 2

- **점 A에서 x좌표와 y좌표를 각각 2등분씩 움직이자.**



즉, P의 좌표는 $\mathrm{P}(0, 5)$이다.

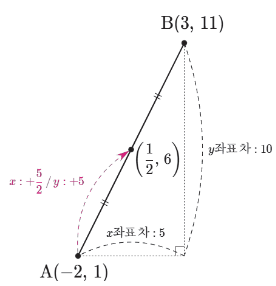
- **점 B에서 x좌표와 y좌표를 각각 2등분씩 움직이자.**



즉, Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(1, 7)$이다.

② M의 좌표

- **두 점 A, B의 (x좌표의 차)와 (y좌표의 차)를 각각 2등분하고,**
  점 A에서 x좌표와 y좌표를 각각 1등분씩 움직이자.



➔ 즉, M의 좌표는 $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}, 6\right)$이다.

[방법 2] 공식 이용하기

① P의 좌표

P의 x좌표	P의 y좌표
$2 \ : \ 3$	$2 \ : \ 3$
$A(\boxed{-2}, 1)$ $\quad$ $B(\boxed{3}, 11)$	$A(-2, \boxed{1})$ $\quad$ $B(3, \boxed{11})$
$\dfrac{2\times\boxed{3}+3\times\boxed{(-2)}}{2+3}$	$\dfrac{2\times\boxed{11}+3\times\boxed{1}}{2+3}$

➔ $P(0, 5)$

② Q의 좌표

Q의 x좌표	Q의 y좌표
$2 \ : \ 3$	$2 \ : \ 3$
$B(\boxed{3}, 11)$ $\quad$ $A(\boxed{-2}, 1)$	$B(3, \boxed{11})$ $\quad$ $A(-2, \boxed{1})$
$\dfrac{2\times\boxed{(-2)}+3\times\boxed{3}}{2+3}$	$\dfrac{2\times\boxed{1}+3\times\boxed{11}}{2+3}$

➔ $Q(1, 7)$

③ M의 좌표

➔ $\left(\dfrac{-2+3}{2}, \dfrac{1+11}{2}\right)$

➔ $\left(\dfrac{1}{2}, 6\right)$

종합 정리 내분점 관련 행동강령

내분점의	① 작도가 쉽다면	➔	작도하기
	② 작도가 어렵다면	➔	공식 적용하기

생각 넓히기 두 수의 합의 중점 해석

생각 | 이해 ••• 암기 | 적용

어떤 두 수의 합이 등장하면, 그것을 2로 나누어 수직선 위의 중점으로 해석할 수 있다.
예를 들어, 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에 대하여

$$\underbrace{x_1+x_2}_{\text{두 수의 합}}=4,\quad \underbrace{y_1+y_2}_{\text{두 수의 합}}=-2$$

가 성립한다는 조건은 다음과 같이 해석할 수 있다.

- $\underbrace{x_1+x_2=4}_{\text{양 변을 2로 나누기}} \rightarrow \dfrac{x_1+x_2}{2}=2 \rightarrow$ x_1과 x_2의 중점이 2이다.

- $\underbrace{y_1+y_2=-2}_{\text{양 변을 2로 나누기}} \rightarrow \dfrac{y_1+y_2}{2}=-1 \rightarrow$ y_1과 y_2의 중점이 -1이다.

$\therefore$ 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$의 중점이 $(2, -1)$이다.

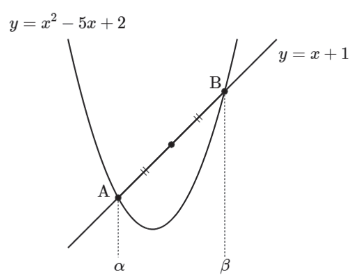
이처럼

생각 Point

두 수의 합 → 2로 나누어 중점으로 해석할 수 있다.

예시 4 이차함수 $y=x^2-5x+2$와 직선 $y=x+1$의 두 교점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 중점의 좌표를 구해보자.

문제의 상황을 시각화하고, 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하자.



이때

(방정식 $\underline{x^2-5x+2}=\underline{x+1}$의 실근)$=$(교점의 x좌표)

이므로, 방정식 $x^2-6x+1=0$의 두 실근이 α, β이다.

근과 계수의 관계를 적용하면

$$\underbrace{\alpha+\beta}_{\text{두 수의 합}}=6 \rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}=3 \rightarrow \alpha\text{와 }\beta\text{의 중점이 }3$$

임을 알 수 있으므로, 선분 AB의 중점의 x좌표는 3이다.
이때, 선분 AB의 중점은 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로, 구하는 중점의 좌표는 $\boxed{(3, 4)}$이다.