제 2 교시

2027학년도 이대은 5월 모의고사 행동강령 정리집

수학 영역

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

해설강의는 유튜브 대은이대은에서 수강가능합니다.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

이대은 수학 연구소
LEE DAE EUN

선생님 덕분에 3등급에서 1등급으로 올랐습니다. 수업을 듣다보면 열심히 가르치실려고 노력하시는게 느껴집니다. 이해하기 쉽게 설명해주시려는 열정, 많은 양의 질 높은 자료가 좋았습니다. 또한 수업에 지루해하지 않게 하기 위해 재밌는 모습을 많이 보여주셔서 만족스러웠다고 생각합니다. 많은 수학 학원을 다녀봤지만 단지 특정 문제를 푸는 방법만이 아닌 문제가 궁극적으로 물어보는 것을 읽고 해야하는 사고의 틀과 그 순서까지 잡아주는 곳은 이대은 선생님이 처음이었습니다. 문제를 보고 그냥 아무 생각이 없이 손부터 움직이는 사람들은 꼭 들어야 하는 수업이라고 생각합니다. 덕분에 변형된 문제를 보더라도 당황하지 않고 천천히 풀어나갈 수 있게 되었습니다

목소리 안정감이 매우 좋은 편임. 그리고 매우 단계적으로 잘 가르치심. 필기가 정말 예쁨. 현우진 느낌. 매 문제마다 이러한 개념을 사용했다고 명확하게 가르치심.계속 반복되는 노트로 머리에 안들어올래야 안들어 올 수 없는 주입식 수업! 내가 이미 알고있다고 생각하고 도외시하기 쉬운데 강제로 노트를 과제통해서 쓰게하셔서 어쩔 수 없이 반복하게 됨.

2~3등급일때 선생님 강의를 들었다면 더욱 원하는 점수에 빨리 도달하지 않았을까 싶습니다 문제를 그냥 풀어제끼고 버리는 것이 아니고 선생님이 적어주신 노트(문제를 보고 떠올려야 하는 것들)처럼 정리해가며 범주화 시키며 공부해야 한다는 것을 재수 할때 깨달았었는데 현역때 선생님 강의를 들었다면 더 빨리 지금 실력으로 도약 할 수 있었을거 같습니다
3등급 정도의 후배가 강사를 추천해달라고 하면 바로 선생님을 추천할 것 같습니다.

결국 1등급을 받고보니 1등급으로 성적을 올리는 방법은 정해져 있다는 생각이 드네요! 유튜브로 선생님을 처음 봤을때, 그저 학원에서 알려주는 기계적인 풀이가 아니라 조건을 "해석"할 수 있는 사고를 도와주는 수업이라 꼭 듣고 싶었어요! 선부터 듣기 시작했는데 선에서 기출을 풀면서 풀이 도구들을 정리하고, 면으로 사고 과정과 부족한 부분을 매꾸고, 커튼콜로 시간배분까지 연습하며 많은 도움이 되었던 것 같아요ㅎㅎ

저는 수능을 제외한 시험에서 평소 4등급을 맞던 한 수강생입니다. 쌤을 만나기전까지는 문제를 풀때 별생각없이 풀이 써보고 어? 풀리네 이런식으로 그냥 아무생각없이 문제를 풀었습니다. 하지만 이대은선생님이 알려주시는 문제풀이에 들어가기전에 문제에 조건, 우리가 모르고 무심코 지나갈법한 조건들을 보고 "이렇게 풀어야된다" "이 조건을 보고 이렇게 반응 해야된다" 어떻게 풀지 생각을 하고 풀이에 들어간다는 것을 선생님께서 귀에 딱지가 붙도록 말씀하셨고, 실제로 수능에서 이 방법이 크게 도움이 되었어요 진짜 감사합니다!

저는 수학을 꽤나 잘하는 편에 속했습니다. 고난도 문제도 잘 풀어냈습니다. 하지만 준킬러를 빠르게 풀어내지 못하여 고난도 문제를 볼 시간도 없었습니다. 그렇지만 이대은T 수업을 듣고 준킬러 부분을 빨리 풀어낼 수 있었습니다. 그 덕분에 25수능을 15번까지 20분정도 걸리며 시험지 운영을 쉽게 할 수 있었습니다. 이대은T 수업은 3,4등급 친구들에게도 좋지만 저는 1,2등급 친구들도 충분히 들을만한 가치가 있다고 생각합니다. 특히 시간은 문제를 풀 수 있지만 오래걸리는 친구들에게 강추합니다👍👍

유튜브　　　　오르비클래스

수학강사 이대은

<온라인>

현) 오르비클래스

<오프라인>

현) 매시브학원 대치, 광화문

현) 대치명인학원 중계

전) 사관등용문학원 대치

전) 비상에듀 재수종합반

* 23, 24, 25학년도 수학 단독 수강생수 1위

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

9. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+x)f(x)$$

라 하자. $\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-4}{h}=9$일 때, $f(1)\times f'(1)$의 값은?

① 3 ② $\frac{9}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 9

9번

Note1. 함숫값이나 미분계수가 주어지고, 항등식이 주어진 경우

⇒ 최종값이 나오도록 꼴 맞추기

10. 각 A가 예각인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는?

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=15$

(나) 삼각형 ABC의 넓이는 24이다.

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{65}{8}$ ③ $\frac{35}{4}$ ④ $\frac{75}{8}$ ⑤ 10

10번

Note1. 사인법칙을 주로 사용하는 경우

⇒ ① 각 2개, 변 1개가 주어진 경우

② 외접원의 반지름

③ 길이비 또는 sin비가 주어진 경우

Note2. 코사인법칙을 주로 사용하는 경우

⇒ ① 각 1개 변 2개 주어진 경우

② 변 3개가 주어진 경우

③ 세 변의 길이비가 주어진 경우

11. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 값의 합은?

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases}-2a_n & (a_n<0)\\ a_n-3 & (a_n\geq 0)\end{cases}$$
> 이다.
> (나) $a_3=a_1+4$

① $-\frac{2}{3}$　② -1　③ $-\frac{4}{3}$　④ $-\frac{5}{3}$　⑤ -2

> 11번
> Note1. 점화식이 있을 때 노가다하는 경우
> ⇒ ① 중간항이 주어진 경우
> ② a_n이 기준인 경우
> ③ a_m 구하기에서 m이 작은 경우
> Note2. 조건을 만족시키는 경우가 두 가지 이상인 경우
> ⇒ 귀류법 (부등식, 자연수 조건)을 이용하여 모순인 경우 제외시키기

12. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-11t+8$$

이다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

> <보 기>
> ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.
> ㄴ. 점 P의 가속도가 1이 되는 순간 점 P의 위치는 2이다.
> ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 6이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

> 12번
> Note1. 운동방향 바꾸기
> ⇒ 속도함수의 부호가 바뀌는 순간

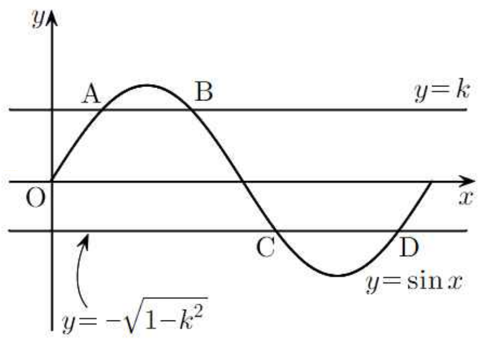
13. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(28)$의 값은?

(가) $0 \le x \le 12$인 모든 실수 x에 대하여
$$(\sqrt{2x+1}-1)\times f(x)=ax$$
이다. (단, a는 상수이다.)
(나) 모든 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$에서 x의 값이 k에서 $k+12$까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{1}{2}$이다.

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

13번
Note1. 항등식 $f(x)g(x)=h(x)$이 주어지고 $f(x)$가 연속인 경우
$\Rightarrow$ $f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$로 바꿔서 분수식의 연속성 관점에서 해석하기
Note2. $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x \ge a) \\ h(x) & (x < a) \end{cases}$가 $x=a$에서 연속인 경우
$\Rightarrow$ ① $g(a)=h(a)$
② 두 곡선 $g(x)$, $h(x)$는 $x=a$에서 교점을 갖는다.

14. 그림과 같이 곡선 $y=\sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$가 직선 $y=k$와 만나는 두 점을 A, B라 하고, 직선 $y=-\sqrt{1-k^2}$과 만나는 두 점을 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2}{9}\pi$일 때, 선분 AB의 길이는? (단, k는 $0<k<1$인 상수이다.)



① $\frac{13}{36}\pi$ ② $\frac{3}{8}\pi$ ③ $\frac{7}{18}\pi$
④ $\frac{29}{72}\pi$ ⑤ $\frac{5}{12}\pi$

14번
Note1. 삼각방정식 실근에 대한 조건이 주어진 경우
$\Rightarrow$ ① 그래프 그려서 대칭성, 주기성 이용하기
② 주어진 구간에서 등호 유무 파악하기

15. $p>1$인 상수 p에 대하여 함수 $f(x)=x^2-px$가 있다. 실수 t $(t>-p)$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=x+t$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. 열린구간 $(-p,\infty)$에서 정의된 함수

$$g(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\{|f(x)|-(x+t)\}dx$$

의 최댓값이 $\frac{1}{2}$일 때, p의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

15번

Note1. 정적분의 최대 최소
⇒ ① 함숫값의 최대 최소를 이용해 해석할 수 있다.
② 정적분이 넓이임을 이용하여 넓이 관점에서 최대 최소를 판단할 수 있다.

Note2. 미지수 구하기
⇒ 미지수 개수만큼 관계식 구하기

20. 첫째항이 8인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오.

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}-2a_n & (a_n\le 0)\\ a_n & (a_n>0)\end{cases}$$

이다.

(나) $b_3+b_5=2b_4+6$, $b_4+b_6=2b_5$

20번

Note1. 등차수열, 등비수열의 세 개 이상의 항이 주어진 경우
⇒ 중항 이용하여 관계식 설정하기

Note2. 등차수열과 등비수열의 부호와 관련된 조건이 주어진 경우
등차수열 부호 ⇒ ++−− or −−++
등비수열 부호 ⇒ +−+− or −+−+

Note3. 등차수열, 등비수열의 일반항 구하기
⇒ 관계식 2개 구하기

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 양수 p와 실수 k $(k \neq 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<p) \\ kf(x-p) & (x \geq p) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) x에 대한 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 $2p$이다.

함수 $g(x)$의 극값 중 가장 큰 값이 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

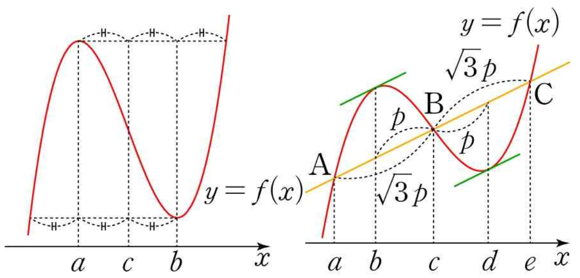
21번

Note1. 다항함수 n차 함수 구하기
$\Rightarrow$ 관계식 $(n+1)$개 구하기

Note2. $f(x)=\begin{cases} g(x) & x \geq a \\ h(x) & x<a \end{cases}$의 미분가능
$\Rightarrow$ ① $g(a)=h(a)$, $g'(a)=h'(a)$
② 두 곡선 $g(x)$, $h(x)$이 $x=a$에서 서로 접한다.

Note3. 미지수 구하기
$\Rightarrow$ 미지수 개수만큼 관계식 구하기

Note4. 삼차함수의 비율관계

$\Rightarrow$ 

22. 다음 조건을 만족시키는 곡선 $y=2^{x+1}+k$ 위의 서로 다른 두 점 A, B와 곡선 $y=\log_2(x-k)+1$ 위의 점 C가 존재하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 S라 하자.

> (가) 직선 AB의 기울기는 1이다.
> (나) 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정삼각형이다.

$2^{-S+\frac{2}{3}}$의 값을 구하시오.

22번

Note1. 직선의 기울기, 두 점 거리, $\Delta x, \Delta y$
$\Rightarrow$ 세 값 중 두 개를 알면 나머지 하나를 구해서 이용하기

Note2. 곡선 위 두 점의 Δx, Δy가 주어져 있을 때
$\Rightarrow$ $f(k+\Delta x)=f(k)+\Delta y$를 관계식으로 이용하기

Note3. 곡선이 미지수 포함하는 경우
$\Rightarrow$ 곡선 위의 점 구해서 관계식으로 이용하기

Note4. 대칭성 혹은 평행이동, 대칭이동을 한 함수가 주어진 경우
$\Rightarrow$ 그래프를 그려서 기하적인 해석을 시도하기

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 일대일대응 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은?

> (가) $f(1)<f(3)$, $f(2)<f(4)$
> (나) 함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
> $|f(1)-f(5)| \geq f^{-1}(1)$이다.

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{11}{60}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{13}{60}$

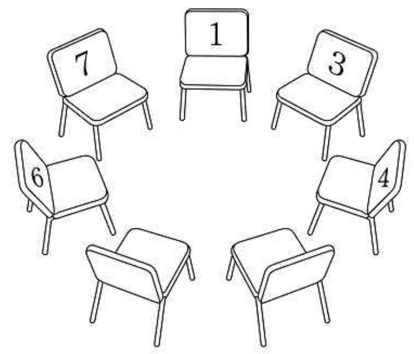
28번

Note1. 정의역 r개 공역 n개 함수의 개수 구하기
조건의 없는 경우 $\Rightarrow {}_n\Pi_r$
$f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow {}_n\mathrm{H}_r$
$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow {}_n\mathrm{C}_r$
일대일함수 $\Rightarrow {}_n\mathrm{P}_r$

Note2. 케이스 나눌 때 주로 기준이 되는 경우
$\Rightarrow$ 영향력이 큰 요소를 기준으로 나누는 게 좋다.

29. 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7개의 의자가 있다. 이 7개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

> (가) 6이 적힌 의자와 이웃한 2개의 의자에 적힌 두 수의 합은 9이다.
> (나) 7이 적힌 의자와 이웃하지 않은 4개의 의자에 적힌 네 수의 곱은 12의 배수이다.



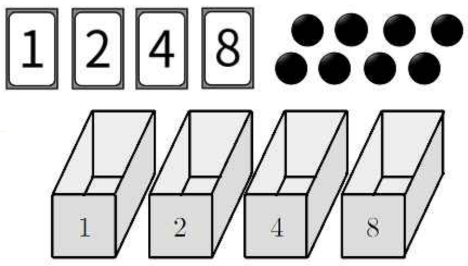
29번

Note1. 개를 원순열
$\Rightarrow$ ① $(n-1)!$
② 회전하여 겹치지 않는 고정할 자리의 수 곱하기

Note2. 적어도, 또는, 이상 이하가 없어도 모든 경우의 수나 확률을 구하는 경우
$\Rightarrow$ 항상 여사건이 빠른지 의심해야 한다. 특히 케이스를 나누는 겨우에서 사건보다 여사건이 케이스의 수가 적은 경우 여사건이 빠를 가능성이 높다.

30. 8개의 공과 숫자 1, 2, 4, 8이 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 있다. 숫자 1, 2, 4, 8이 하나씩 적혀 있는 4개의 빈 상자에 8개의 공과 4장의 카드를 남김없이 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공이나 카드를 넣지 않는 상자가 있을 수 있다.)

> (가) 1이 적힌 상자에 들어 있는 카드의 개수는 1이고 8이 적힌 상자에 들어 있는 카드의 개수는 2 이상이다.
> (나) n $(n=2, 4, 8)$이 적힌 상자에는 n의 배수가 적힌 카드가 들어 있거나 공이 n개 이상 들어 있다.



30번
Note1. 서로 같은 것을 같은 것에 나눠주기 ⇒ 자연수 분할
서로 같은 것을 다른 것에 나눠주기 ⇒ 중복조합
서로 다른 것을 다른 것에 나눠주기 ⇒ 중복순열
서로 다른 것을 같은 것에 나눠주기 ⇒ 집합의 분할

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

28. 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

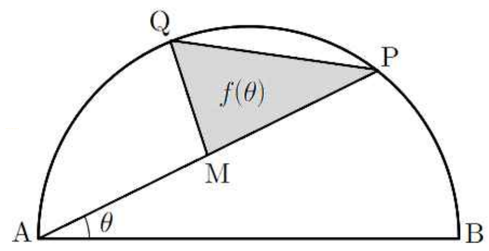
> (가) 모든 자연수 n에 대하여 $(b_n - a_n)(b_n - |a_n|) = 0$이다.
>
> (나) $\sum_{n=k}^{\infty}(a_{2n+1} + b_{2n+1}) = 0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 2이다.

$b_1 - b_3 = 3a_3 + 5$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값은?

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

28번
Note1. 등차수열, 등비수열의 일반항 구하기
⇒ 관계식 2개 구하기
Note2. 조건을 만족시키는 경우가 두 가지 이상인 경우
⇒ 귀류법 (부등식, 자연수 조건)을 이용하여 모순인 경우 제외시키기

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 점 P를 $\angle \mathrm{BAP} = \theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right)$가 되도록 잡고, 호 AP 위에 점 Q를 $\overline{\mathrm{PQ}} = 1$이 되도록 잡는다. 선분 AP의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 PQM의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\overline{\mathrm{AP}} = \frac{6}{5}$이 되도록 하는 θ의 값을 a라 할 때, $f'(a) = p + q\sqrt{3}$이다. $100 \times |p+q|$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.)



29번
Note1. 원 위의 점이 주어진 경우
⇒ 중심과 보조선 연결하여 원의 성질 이용하기
Note2. 미적분에서 각의 연산이 나오는 경우
⇒ 삼각함수의 덧셈정리 이용하기

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 갖는다. 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)h(x)=x\ln(1+3|g(x)|)$$

이고 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

(가) $g(k)=0$인 상수 k에 대하여 함수 $h(x)-|g(x)|$는 $x=k$에서 미분가능하다.
(나) $4g'(f(1))=3f(1)-4$

30번

Note1. 항등식 $f(x)g(x)=h(x)$이 주어지고 $f(x)$가 연속인 경우
$\Rightarrow$ $f(x)=\dfrac{h(x)}{g(x)}$로 바꿔서 분수식의 연속성 관점에서 해석하기

Note2. 초월함수의 극한값 구하기
$\Rightarrow$
$\dfrac{e^x-1}{x}$, $\dfrac{\ln(x+1)}{x}$, $\dfrac{a^x-1}{x}$, $\dfrac{\log_a(x+1)}{x}$, $\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{\tan x}{x}$
로 꼴 맞추기

Note3. 다항함수 n차 함수 구하기
$\Rightarrow$ 관계식 $(n+1)$개 구하기

Note4. 절댓값 함수
$\Rightarrow$ 절댓값 벗기기 $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq 0 \\ -f(x) & f(x)<0 \end{cases}$

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

정답 및 해설

9) [정답] ①

[해설]
$\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-4}{h}=9$이고 $\lim_{h\to0}h=0$이므로
$\lim_{h\to0}(g(1+h)-4)=0$
함수 $g(x)=(x^2+x)f(x)$가 다항함수이므로
$\lim_{h\to0}(g(1+h)-4)=g(1)-4=0$에서
$g(1)=2f(1)=4,\ f(1)=2$
$\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-4}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=g'(1)$이므로
$g'(1)=9$
또한 $g'(x)=(2x+1)f(x)+(x^2+x)f'(x)$에서
$g'(1)=3f(1)+2f'(1)=6+2f'(1)$이므로
$f'(1)=\frac{3}{2}$
따라서 $f(1)\times f'(1)=2\times\frac{3}{2}=3$

10) [정답] ②

[해설]
삼각형 ABC의 넓이가 24이므로
$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A=\frac{1}{2}\times4\times15\times sinA=24$
에서 $\sin A=\frac{4}{5}$
각 A가 예각이므로 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{3}{5}$
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A$
$=4^2+15^2-2\times4\times15\times\frac{3}{5}=169$
에서 $\overline{BC}=13$
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{13}{\frac{4}{5}}=\frac{65}{4}$
따라서 $R=\frac{65}{8}$

11) [정답] ④

[해설]
조건 (가)를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여
(ⅰ) $a_1<0$일 때
$a_2=-2a_1>0$이므로 $a_3=a_2-3=-2a_1-3$
조건 (나)에 의하여 $-2a_1-3=a_1+4$
$a_1=-\frac{7}{3}$
(ⅱ) $a_1\ge0$일 때
$a_2=a_1-3$
(a) $a_2\ge0$일 때
$a_3=a_2-3=a_1-6$이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(b) $a_2<0$일 때
$a_2=a_1-3<0$이므로 $a_1<3$
$a_3=-2a_2=-2(a_1-3)$
조건 (나)에 의하여 $-2(a_1-3)=a_1+4$
$a_1=\frac{2}{3}$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 a_1의 값의 합은 $\left(-\frac{7}{3}\right)+\frac{2}{3}=-\frac{5}{3}$

12) [정답] ②

[해설]
ㄱ. $v(t)=3t^2-11t+8=(3t-8)(t-1)=0$에서
$t=1$ 또는 $t=\frac{8}{3}$
$0\le t<1$에서 $v(t)>0$,
$1<t<\frac{8}{3}$에서 $v(t)<0$이므로
시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다. (참)
ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면
$a(t)=\frac{d}{dt}v(t)=6t-11$
$a(t)=1$에서 $t=2$
그러므로 점 P의 가속도가 1이 되는 순간의 시각 t는 2이다.
시각 $t=0$일 때 원점을 출발하므로 점 P의 가속도가 1인 순간 점 P의 위치는
$0+\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^2(3t^2-11t+8)\,dt$
$=\left[t^3-\frac{11}{2}t^2+8t\right]_0^2$
$=2-0=2$ (참)
ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는
$\int_0^2|v(t)|\,dt$
$=\int_0^2|3t^2-11t+8|\,dt$

$= \int_0^1 (3t^2 - 11t + 8)\,dt + \int_1^2 (-3t^2 + 11t - 8)\,dt$

$= \left[t^3 - \frac{11}{2}t^2 + 8t\right]_0^1 + \left[-t^3 + \frac{11}{2}t^2 - 8t\right]_1^2$

$= \left(\frac{7}{2} - 0\right) + \left\{-2 - \left(-\frac{7}{2}\right)\right\} = 5$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

13) [정답] ②

[해설]

조건 (가)에서

$0 < x \leq 12$일 때 $f(x) = \dfrac{ax}{\sqrt{2x+1}-1}$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(0) = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{ax(\sqrt{2x+1}+1)}{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}$

$= \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{ax(\sqrt{2x+1}+1)}{2x}$

$= \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{a(\sqrt{2x+1}+1)}{2} = a$

㉠에 의하여 $f(12) = \dfrac{12a}{\sqrt{2 \times 12 + 1} - 1} = 3a$

조건 (나)에서 모든 실수 k에 대하여

$\dfrac{f(k+12) - f(k)}{(k+12) - k} = \dfrac{1}{2}$

$f(k+12) = f(k) + 6$ …… ㉡

㉡의 양변에 $k=0$을 대입하면

$f(12) = f(0) + 6$, $3a = a + 6$에서 $a = 3$

㉠에 의하여 $f(4) = \dfrac{12}{\sqrt{2 \times 4 + 1} - 1} = 6$

따라서 ㉡에 의하여

$f(28) = f(16) + 6 = (f(4) + 6) + 6 = 18$

14) [정답] ③

[해설]

점 A의 x좌표를 a $\left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right)$라 하자.

곡선 $y = \sin x$가 직선 $x = \frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

점 B의 x좌표는 $\pi - a$

$\sin a = k$에서

$-\sqrt{1-k^2} = -\sqrt{1-\sin^2 a} = -\cos a$이고

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi \pm a\right) = -\cos a$이며,

곡선 $y = \sin x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$와

직선 $y = -\sqrt{1-k^2}$의 교점은 C, D뿐이므로

두 점 C, D의 x좌표는 각각 $\frac{3}{2}\pi - a$, $\frac{3}{2}\pi + a$이다.

$\overline{\mathrm{AB}} = (\pi - a) - a = \pi - 2a$

$\overline{\mathrm{CD}} = \left(\frac{3}{2}\pi + a\right) - \left(\frac{3}{2}\pi - a\right) = 2a$

$\overline{\mathrm{CD}} - \overline{\mathrm{AB}} = 2a - (\pi - 2a) = 4a - \pi = \frac{2}{9}\pi$에서

$a = \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{9}\pi + \pi\right) = \frac{11}{36}\pi$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = \pi - 2 \times \frac{11}{36}\pi = \frac{7}{18}\pi$

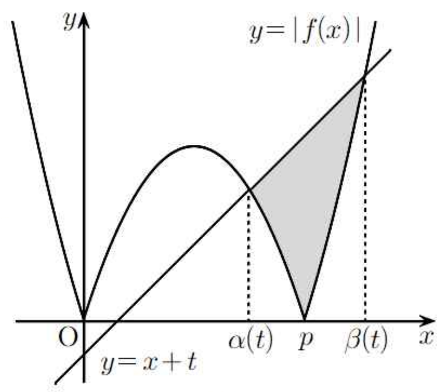
15) [정답] ⑤

[해설]

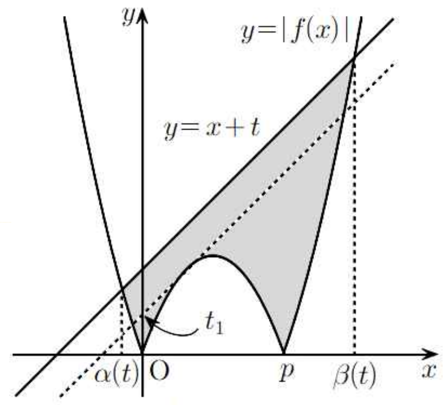
함수 $y = -f(x)$의 그래프에 접하는 직선 중 기울기가 1인 직선의 y절편을 t_1이라 하자.

$-p < t < 0$ 또는 $t \geq t_1$일 때

[그림1], [그림2]와 같이 $\alpha(t) \leq x \leq \beta(t)$인 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)| \leq x + t$이므로 $g(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \{|f(x)| - (x+t)\}\,dx \leq 0$



[그림 1]



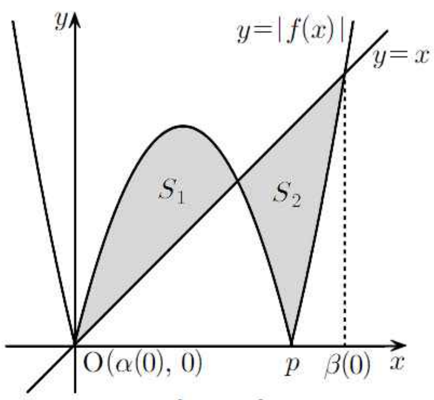
[그림 2]

그러므로 함수 $g(t)$는 $0 \leq t < t_1$에서 최댓값 $\frac{1}{2}$을 갖는다.

$t = 0$일 때의 함수 $y = |f(x)|$의 그래프와 직선 $y = x + t$의 개형은 [그림3]과 같고,

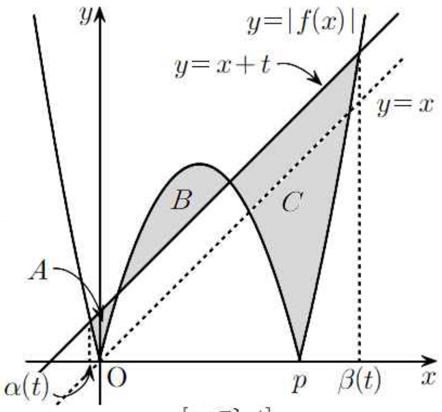
함수 $y = |f(x)|$의 그래프와 직선 $y = x$로 둘러싸인 2개 영역의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$g(0) = S_1 - S_2$



[그림 3]

$0<t<t_1$일 때의 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와
직선 $y=x+t$의 개형은 [그림4]와 같고,
함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=x+t$로
둘러싸인 3개 영역의 넓이를 각각 A, B, C라 하면
$g(t)=-A+B-C$



[그림 4]

$0<t<t_1$인 모든 실수 t에 대하여
$B<S_1$, $C>S_2$이므로
$-A+B-C<B-C<S_1-S_2$
그러므로 $0\le t<t_1$인 모든 실수 t에 대하여
$g(t)\le g(0)$이며 $g(0)=\dfrac{1}{2}$
방정식 $|f(x)|=x$의 해가 0, $p-1$, $p+1$이므로
$\alpha(0)=0$, $\beta(0)=p+1$

$$
\begin{aligned}
g(0)&=\int_{\alpha(0)}^{\beta(0)}(|f(x)|-x)\,dx\\
&=\int_0^{p+1}|f(x)|\,dx-\int_0^{p+1}x\,dx\\
&=\int_0^{p}(-f(x))\,dx+\int_p^{p+1}f(x)\,dx-\int_0^{p+1}x\,dx\\
&=\int_0^{p}(-x^2+px)\,dx+\int_p^{p+1}(x^2-px)\,dx-\frac{(p+1)^2}{2}\\
&=\frac{p^3-3p^2-3p-1}{6}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$p^3-3p^2-3p-4=(p-4)(p^2+p+1)=0$
따라서 $p=4$

20) [정답] 67

[해설]
자연수 t에 대하여
$a_{5t-4}+a_{5t-3}+a_{5t-2}+a_{5t-1}+a_{5t}$
$=(5t-4)+(5t-3)+(5t-2)+(5t-1)+\{(-4)\times 5t+10\}$
$=20t-10+(-20t+10)=0$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{5t}a_k&=\sum_{k=1}^{t}\left(a_{5k-4}+a_{5k-3}+a_{5k-2}+a_{5k-1}+a_{5k}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{t}0=0
\end{aligned}
$$

그러므로

$$
\sum_{k=1}^{m}a_k=\begin{cases}5t-4 & (m=5t-4)\\ 10t-7 & (m=5t-3)\\ 15t-9 & (m=5t-2)\\ 20t-10 & (m=5t-1)\\ 0 & (m=5t)\end{cases}
$$

(ⅰ) $m=5t-4$이면 $20\le 5t-4<30$에서 $t=5$, 6이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 21, 26이다.
(ⅱ) $m=5t-3$이면 $20\le 10t-7<30$에서 $t=3$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 12이다.
(ⅲ) $m=5t-2$이면 $20\le 15t-9<30$에서 $t=2$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 8이다.
(ⅳ) $m=5t-1$이면 $20\le 20t-10<30$에서 $\dfrac{3}{2}\le t<2$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.
(ⅰ)~(ⅳ)에서 모든 자연수 m의 값의 합은
$21+26+12+8=67$

21) [정답] 155

[해설]
조건 (나)에서 $b_3+b_5\ne 2b_4$이므로
세 수 b_3, b_4, b_5는 이 순서대로
등차수열을 이루지 않는다. …… ㉠
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.
$d\ge 0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이 되어 $b_n=a_n$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.
그러므로 $d<0$이며 $a_3>a_4>a_5$이다.
(ⅰ) $a_3>a_4>a_5>0$일 때
$b_3=a_3$, $b_4=a_4$, $b_5=a_5$이므로
㉠을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $a_3>a_4>0\ge a_5$일 때
$a_6=a_5+d<0$이므로 $b_6=-2a_6$

$$
\begin{aligned}
(b_4+b_6)-2b_5&=(a_4-2a_6)-2(-2a_5)\\
&=(8+3d)-2(8+5d)+4(8+4d)\\
&=24+9d\\
&=3a_4>0
\end{aligned}
$$

$b_4+b_6\ne 2b_5$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ⅲ) $a_3>0\ge a_4>a_5$일 때
$a_3=8+2d>0$에서 $d>-4$이고
$a_4=8+3d\le 0$에서 $d\le-\dfrac{8}{3}$이므로

$-4<d\le -\frac{8}{3}$

$a_6=a_5+d<0$ 이므로 $b_6=-2a_6$

$b_4=-2a_4$, $b_5=-2a_5$, $b_6=-2a_6$ 이므로

$b_4+b_6=2b_5$가 성립한다.

$b_3+b_5=2b_4+6$에서

$a_3+(-2a_5)=2\times(-2a_4)+6$

$(8+2d)-2\times(8+4d)=-4\times(8+3d)+6$

$-8-6d=-26-12d$, $d=-3$

(iv) $0\ge a_3>a_4>a_5$일 때

$b_3=-2a_3$, $b_4=-2a_4$, $b_5=-2a_5$이므로

㉠을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 -3이므로

$a_n=8-3(n-1)=-3n+11$이고

$b_n=\begin{cases} a_n & (n\le 3) \\ -2a_n & (n\ge 4)\end{cases}$

따라서

$\sum_{k=1}^{10}b_k=\sum_{k=1}^{3}a_k-2\sum_{k=4}^{10}a_k$

$=(8+5+2)-2\times\frac{7(a_4+a_{10})}{2}$

$=15-7(-1-19)=155$

22) [정답] 48

[해설]

$g(x)=\int_0^x(f(t)-|f(t)|)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)-|f(x)|$이므로

$g'(x)=\begin{cases} 2f(x) & (f(x)<0) \\ 0 & (f(x)\ge 0)\end{cases}$

조건 (가)에서 $x\ge 2$인 모든 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이고 충분히 작은 양수 h에 대하여 열린구간 $(2-h, 2)$에서 $f(x)<0$이다.

삼차함수 $f(x)$의 부호가 $x=2$의 좌우에서 음에서 양으로 바뀌어야 하므로 $f(2)=0$이다.

$f(x)$는 최고차항이 1인 삼차함수이고

$f(0)=0$, $f(2)=0$이며 $x\ge 2$에서 $f(x)\ge 0$이므로

$f(x)=x(x-2)(x-a)$를 만족시키는 실수 a $(a<2)$가 존재한다.

(i) $0<a<2$인 경우

$0<x\le a$인 모든 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이고 $a<x<2$인 모든 x에 대하여 $f(x)<0$이므로

$g(2)=\int_0^2(f(t)-|f(t)|)dt$

$=\int_0^a 0\,dt+\int_a^2 2f(t)dt$

$=\int_a^2 2t(t-2)(t-a)dt$

$=\int_a^2\{2t^3-(2a+4)t^2+4at\}dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^4-\frac{2a+4}{3}t^3+2at^2\right]_a^2$

$=\frac{1}{6}a^4-\frac{2}{3}a^3+\frac{8}{3}a-\frac{8}{3}$

$h(x)=\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{8}{3}x-\frac{8}{3}$이라 하면

$h'(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3}=\frac{2}{3}(x+1)(x-2)^2$

$0<x<2$에서 $h'(x)>0$이고 $h(0)=-\frac{8}{3}$이므로

$0<a<2$인 모든 a에 대하여 $h(a)>-\frac{8}{3}$이다.

그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a\le 0$인 경우

$0<x<2$인 모든 x에 대하여 $f(x)<0$이고

조건 (나)에서 $g(2)=-8$이므로

$g(2)=\int_0^2(f(t)-|f(t)|)dt=\int_0^2 2f(t)dt$

$=\int_0^2 2t(t-2)(t-a)dt$

$=\int_0^2\{2t^3-(2a+4)t^2+4at\}dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^4-\frac{2a+4}{3}t^3+2at^2\right]_0^2$

$=\frac{8}{3}a-\frac{8}{3}=-8$

에서 $a=-2$

(i), (ii)에 의하여 $f(x)=x(x-2)(x+2)$

따라서 $f(4)=4\times 2\times 6=48$

23) [정답] 55

[해설]

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=p$에서 연속이다.

$\lim_{x\to p-}g(x)=\lim_{x\to p-}f(x)=f(p)$이고

$g(p)=kf(0)=0$이므로 $f(p)=0$

$f(x)=x(x-p)(x-a)$ (a는 상수)라 하면

$g(x)=\begin{cases} x(x-p)(x-a) & (x<p) \\ k(x-p)(x-2p)\{x-(a+p)\} & (x\ge p)\end{cases}$

$p>0$이므로 0, p, $2p$는 방정식 $g(x)=0$의 실근이다.

$a=p$ 또는 $a=0$이면 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근이 0, p, $2p$뿐이므로 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 $3p$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i) $a>p$일 때

방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근은

0, p, $2p$, $a+p$

$0+p+2p+(a+p)\ne 2p$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $0<a<p$일 때

방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근은

0, a, p, $a+p$, $2p$

$0+a+p+(a+p)+2p \neq 2p$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $a<0$일 때

방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은

$a+0+p+2p=a+3p$

조건 (나)에 의하여 $a+3p=2p$에서 $a=-p$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$a=-p$이며 $f(x)=x(x+p)(x-p)$

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$가 $x=p$에서

미분가능하므로

$\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{g(p+h)-g(p)}{h}=\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{(p+h)h(2p+h)}{h}=2p^2$,

$\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{g(p+h)-g(p)}{h}=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{kh(-p+h)(p+h)}{h}$

$=-kp^2$

에서 $2p^2=-kp^2$, $k=-2$

그러므로 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<p) \\ -2f(x-p) & (x \geq p) \end{cases}$

$f'(x)=3x^2-p^2=0$에서

$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}p$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}p$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

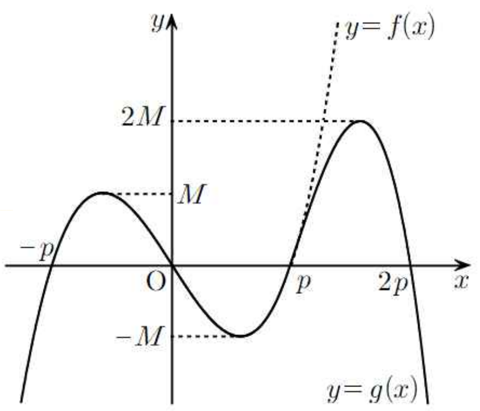
x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}p$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}p$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}p^3$	↘	$-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}p^3$	↗

함수 $f(x)$의 극댓값을 M이라 하면

함수 $f(x)$의 극솟값은 $-M$이다.

$k=-2$이므로 함수 $g(x)$의 극값 중 가장 큰 값은 $2M$이며

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)$의 극값 중 가장 큰 값이 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이므로

$2M=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$2\times\dfrac{2\sqrt{3}}{9}p^3=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$에서 $p=\dfrac{3}{2}$

그러므로 $f(x)=x^3-\dfrac{9}{4}x$

따라서 $f(4)=4^3-\dfrac{9}{4}\times 4=55$

24) [정답] 9

[해설]

두 점 A, B 중에서 x좌표가 작은 점을 A라 하고,

점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(a,\ 2^{a+1}+k)$ (a는 실수)라 하자.

직선 AB의 기울기가 1이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$이므로

$\mathrm{B}(a+2,\ 2^{a+1}+k+2)$

점 B가 곡선 $y=2^{x+1}+k$ 위의 점이므로

$2^{a+1}+k+2=2^{(a+2)+1}+k$

$(2^3-2)\times 2^a=2$에서

$2^a=\dfrac{1}{3}$, $a=-\log_2 3$ …… ㉠

이제 선분 AB의 중점을 M이라 하자.

점 M의 좌표가 $\mathrm{M}(a+1,\ 2^{a+1}+k+1)$이므로

점 M은 곡선 $y=2^x+k+1$ 위의 점이다.

점 M을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨

점 $\mathrm{M}'(a+1,\ 2^{a+1}+k)$는 곡선 $y=2^x+k$ 위에 있고,

점 C는 곡선 $y=\log_2(x-k)+1$ 위에 있으므로

점 C를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨

점 C′은 곡선 $y=\log_2(x-k)$ 위에 있다.

직선 CM의 기울기가 -1이므로

직선 C′M′의 기울기도 -1이고,

두 곡선 $y=2^x+k$, $y=\log_2(x-k)$가 직선 $y=x$에

대하여 대칭이므로 점 C′은 점 M′을 직선 $y=x$에

대하여 대칭이동시킨 점이다.

점 C′의 좌표는 $\mathrm{C}'(2^{a+1}+k,\ a+1)$이므로

점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(2^{a+1}+k,\ a+2)$이다.

삼각형 ABC가 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인

정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{CM}}=\sqrt{6}$이고,

직선 CM의 기울기가 -1이므로

점 C의 x좌표와 점 M의 x좌표의 차는 $\sqrt{3}$이다.

$|(2^{a+1}+k)-(a+1)|=\sqrt{3}$

$k=-2^{a+1}+a+1+\sqrt{3}$

또는 $k=-2^{a+1}+a+1-\sqrt{3}$

그러므로 $S=-2\times 2^{a+1}+2a+2$

㉠에 의하여

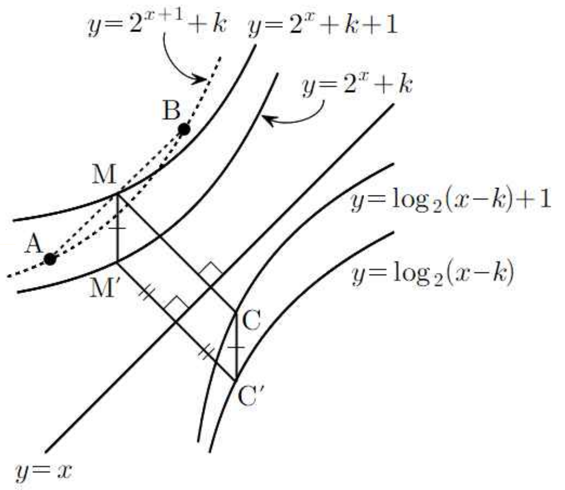
$S=-2\times\dfrac{2}{3}+2\times(-\log_2 3)+2$

$=\dfrac{2}{3}-2\log_2 3$

따라서 $2^{-S+\frac{2}{3}}=2^{2\log_2 3}=2^{\log_2 9}=9$

[참고]

$k=-2^{a+1}+a+1+\sqrt{3}$일 때의 네 점 M, M′, C, C′의 관계를 나타내면 그림과 같다.



28) [정답] ①

[해설]

X에서 X로의 모든 일대일대응 f의 개수는 $5!=120$

조건 (가)에 의하여 $f(3)\neq 1$, $f(4)\neq 1$

또한 $f(5)=1$이면 $2\le f(1)\le 5$에서

$1\le f(1)-f(5)\le 4$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 가능한 $f^{-1}(1)$의 값은 1, 2이다.

(i) $f^{-1}(1)=1$인 경우

$f(1)=1$이므로 $f(3)$, $f(5)$의 값에 관계없이 $f(1)<f(3)$과 $|f(1)-f(5)|\ge 1$을 만족시킨다. $f(2)<f(4)$를 만족시키는 일대일대응 f의 개수는 $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{P}_2=12$

(ii) $f^{-1}(1)=2$인 경우

$f(2)=1$이므로 $f(4)$의 값에 관계없이

$f(2)<f(4)$를 만족시킨다.

(a) $f(3)<f(5)$인 경우

$f(1)<f(3)<f(5)$이므로 $f(5)$의 값에 관계없이

$|f(1)-f(5)|\ge 2$를 만족시킨다.

$f(1)<f(3)<f(5)$를 만족시키는 일대일대응

f의 개수는 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{C}_1=4$

(b) $f(5)<f(3)$인 경우

$|f(1)-f(5)|\ge 2$인 경우는

$f(1)=2$, $f(4)=3$, $f(5)=4$, $f(3)=5$ 또는

$f(5)=2$, $f(4)=3$, $f(1)=4$, $f(3)=5$뿐이므로

일대일대응 f의 개수는 2

그러므로 구하는 경우의 수는 $4+2=6$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은 $\dfrac{12+6}{120}=\dfrac{3}{90}$

29) [정답] 68

[해설]

조건 (가)에 의하여 6이 적힌 의자와 이웃한

2개의 의자에 적힌 수는 2, 7이거나 4, 5이다.

(i) 6이 적힌 의자와 이웃한 2개의 의자에 적힌 수가 2, 7인 경우

2, 7이 적힌 의자 모두 6이 적힌 의자와

이웃하는 경우의 수는 $2!=2$

조건 (나)에 의하여 3, 4가 적힌 의자는 모두

7이 적힌 의자와 이웃하지 않아야 하므로

1 또는 5가 적힌 의자 중 하나가 7이 적힌 의자와 이웃해야 한다.

1 또는 5가 적힌 의자 중 하나가 7이 적힌

의자와 이웃하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$

1, 2, 6, 7 또는 2, 5, 6, 7이 적힌 4개의

의자를 하나의 의자로 생각하여 4개의 의자를

원형으로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{4}=6$

그러므로 구하는 경우의 수는 $2\times2\times6=24$

(ii) 6이 적힌 의자와 이웃한 2개의 의자에 적힌 수가 4, 5인 경우

4, 5가 적힌 의자 모두 6이 적힌 의자와

이웃하는 경우의 수는 $2!=2$

7이 적힌 의자와 6이 적힌 의자는 이웃하지

않으므로 조건 (나)에 의하여 2, 4가

적힌 의자 중 적어도 하나는 7이 적힌 의자와

이웃하지 않아야 한다.

그러므로 구하는 경우의 수는 조건 (가)를

만족시키도록 7개의 의자를 원형으로 배열하는 경우에서 2, 4가 적힌 의자 모두 7이 적힌

의자와 이웃하는 경우를 제외한 경우의 수이다.

(a) 조건 (가)를 만족시키는 경우

4, 5, 6이 적힌 3개의 의자를 하나의 의자로 생각하여 5개의 의자를 원형으로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{5}=24$

(b) 조건 (가)를 만족시키면서 2, 4가 적힌

의자 모두 7이 적힌 의자와 이웃하는 경우

4가 적힌 의자와 6이 적힌 의자가 이웃하므로

2, 4, 5, 6, 7이 적힌 5개의 의자를 하나의

의자로 생각하여 3개의 의자를 원형으로

배열하는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{3}=2$

그러므로 구하는 경우의 수는 $2\times(24-2)=44$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $24+44=68$

30) [정답] 398

[해설]

조건 (가)에 의하여 2, 4가 적힌 상자 중

적어도 하나의 상자에는 카드를 넣을 수 없다.

이때 조건 (나)에 의하여 2, 4가 적힌 상자에

넣는 공의 개수의 합은 2 이상이어야 하므로

공 8개 모두를 8이 적힌 상자에 넣을 수 없다.

그러므로 8이 적힌 카드는 8이 적힌 상자에 넣어야 한다.

(i) 2가 적힌 상자에 2의 배수가 적힌 카드를 넣는 경우

2가 적힌 상자에 2 또는 4가 적힌 카드를 넣고
1, 8이 적힌 상자에 남은 두 장의 카드를
하나씩 넣는 경우의 수는 $2\times2!=4$
4가 적힌 상자에 4개의 공을 넣고
남은 4개의 공을 4개의 상자에 넣는
경우의 수는 서로 다른 4개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4=35$
그러므로 구하는 경우의 수는 $4\times35=140$

(ii) 4가 적힌 상자에 4의 배수가 적힌 카드를 넣는 경우
4가 적힌 상자에 4가 적힌 카드를 넣고
1, 8이 적힌 상자에 남은 두 장의 카드를
하나씩 넣는 경우의 수는 $2!=2$
2가 적힌 상자에 2개의 공을 넣고
남은 6개의 공을 4개의 상자에 넣는
경우의 수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{H}_6={}_9\mathrm{C}_6=84$
그러므로 구하는 경우의 수는 $2\times84=168$

(iii) 2가 적힌 상자에 2의 배수가 적힌 카드를 넣지 않고, 4가 적힌 상자에 4의 배수가 적힌 카드를 넣지 않는 경우
2, 4가 적힌 상자에 각각 2개, 4개의 공을 넣고
남은 2개의 공을 4개의 상자에 넣는
경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는
중복조합의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

(a) 8이 적힌 상자에 2장의 카드를 넣는 경우
2가 적힌 상자에 1이 적힌 카드를 넣고
1, 8이 적힌 상자에 남은 두 장의 카드를
하나씩 넣은 경우의 수는 $2!=2$
4가 적힌 상자에 1 또는 2가 적힌 카드를
넣고 1, 8이 적힌 상자에 남은 두 장의
카드를 하나씩 넣는 경우의 수는 $2\times2!=4$
그러므로 구하는 경우의 수는 $2+4=6$

(b) 8이 적힌 상자에 3장의 카드를 넣은 경우
1이 적힌 상자에 1 또는 2 또는 4가 적힌
카드를 넣는 경우의 수는 3

그러므로 구하는 경우의 수는 $10\times(6+3)=90$
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
$140+168+90=398$

28) [정답] ⑤

[해설]
조건 (가)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
$b_n=a_n$ 또는 $b_n=|a_n|$
$a_1=0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=b_n=0$
그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n+1}+b_{2n+1})=0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
$a_1>0$이면 모든 자연수 n에 대하여
$a_{2n-1}>0$이므로 $b_{2n-1}=a_{2n-1}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(a_{2n+1}+b_{2n+1})=\sum_{n=2}^{\infty}2a_{2n+1}$$
$$=\frac{2a_5}{1-\frac{1}{4}}=\frac{a_1}{6}>0$$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
그러므로 $a_1<0$
모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n}>0$이므로 $b_{2n}=a_{2n}$
모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n-1}<0$이므로
$a_{2n-1}+b_{2n-1}=2a_{2n-1}$ 또는 $a_{2n-1}+b_{2n-1}=0$에서
$a_{2n-1}+b_{2n-1}\le0$
$\sum_{n=2}^{\infty}(a_{2n+1}+b_{2n+1})=0$이므로
2 이상의 모든 자연수 n에 대하여
$a_{2n+1}+b_{2n+1}=0$, $b_{2n+1}=-a_{2n+1}$
조건 (나)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n+1}+b_{2n+1})$$
$$=a_3+b_3+\sum_{n=2}^{\infty}(a_{2n+1}+b_{2n+1})=a_3+b_3\ne0$$

이므로 $b_3=a_3$
$b_1-b_3=3a_3+5$에서 $b_1=4a_3+5=a_1+5$
이때 $b_1=a_1$이면 $b_1\ne a_1+5$이므로
$b_1=-a_1$이고 $a_1=-\frac{5}{2}$
그러므로 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\quad b_n=\begin{cases}|a_n| & (n\ne3)\\ a_3 & (n=3)\end{cases}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|-|a_3|+a_3$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+2a_3$$
$$=\frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{5}{4}=\frac{15}{4}$$

29) [정답] 17

[해설]
선분 AB가 반원의 지름이므로 $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$이고
점 M이 선분 AP의 중점이므로
$\overline{\mathrm{MP}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\cos\theta=\cos\theta$
반원의 중심을 O라 하면
삼각형 OPQ는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이고,
삼각형 OPA는 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{QPA}=\angle\mathrm{QPO}-\angle\mathrm{APO}=\dfrac{\pi}{3}-\theta$

삼각형 PQM의 넓이 $f(\theta)$는

$f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PM}}\times\sin(\angle\mathrm{QPA})$

$=\dfrac{1}{2}\times1\times cos\,\theta\times sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)$

$=\dfrac{1}{2}\cos\theta\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\theta-\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\theta\right)$

$=\dfrac{1}{4}(\sqrt{3}\cos^2\theta-\cos\theta sin\theta)$

$f'(\theta)=\dfrac{1}{4}\{\sqrt{3}\times2\cos\theta(-\sin\theta)$

$-(-\sin\theta)\sin\theta-\cos\theta cos\theta\}$

$=\dfrac{1}{4}(-2\sqrt{3}\cos\theta sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$\overline{\mathrm{AP}}=2\cos a=\dfrac{6}{5}$에서 $\cos a=\dfrac{3}{5}$, $\sin a=\dfrac{4}{5}$이므로

$f'(a)=\dfrac{1}{4}(-2\sqrt{3}\cos a\sin a+\sin^2 a-\cos^2 a)$

$=\dfrac{1}{4}\left\{-2\sqrt{3}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{5}+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right\}$

$=\dfrac{7}{100}-\dfrac{6}{25}\sqrt{3}$

에서 $p=\dfrac{7}{100}$, $q=-\dfrac{6}{25}$

따라서 $100\times|p+q|=100\times\left|\dfrac{7}{100}-\dfrac{6}{25}\right|=17$

30) [정답] 31

[해설]

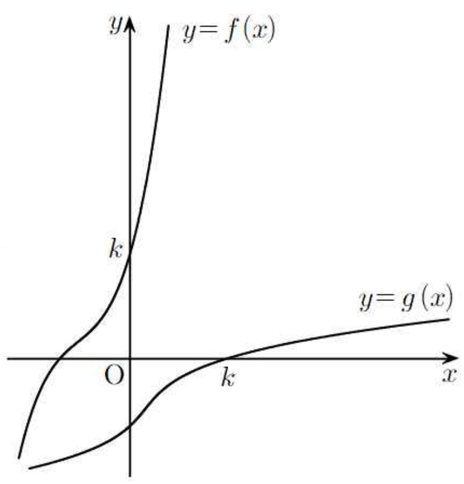
조건 (가)에 의하여 함수 $h(x)-|g(x)|$는 $x=k$에서 연속이다.

삼차함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $|g(x)|$는 $x=k$에서 연속이다. 그러므로 함수 $h(x)$는 $x=k$에서 연속이다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 가지므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$ …… ㉠

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$x>0$일 때 $f(x)>k$이므로 $x>k$일 때 $g(x)>0$

$\displaystyle\lim_{x\to k+}h(x)=\lim_{x\to k+}\frac{x\ln(1+3|g(x)|)}{g(x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to k+}\left(3x\times\frac{\ln(1+3g(x))}{3g(x)}\right)=3k$

$x<0$일 때 $f(x)<k$이므로 $x<k$일 때 $g(x)<0$

$\displaystyle\lim_{x\to k-}h(x)=\lim_{x\to k-}\frac{x\ln(1+3|g(x)|)}{g(x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to k-}\left(-3x\times\frac{\ln(1-3g(x))}{-3g(x)}\right)=-3k$

$\displaystyle\lim_{x\to k+}h(x)=\lim_{x\to k-}h(x)=h(k)$이므로 $3k=-3k$에서

$k=0$, $h(0)=0$

그러므로 $f(0)=g(0)=0$

함수 $h(x)-|g(x)|$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{(h(x)-|g(x)|)-(h(0)-|g(0)|)}{x-0}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0+}\frac{h(x)-g(x)}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0+}\left(\frac{\ln(1+3g(x))}{g(x)}-\frac{g(x)}{x}\right)$ …… ㉡

의 값이 존재하고

$\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+3g(x))}{g(x)}=3$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{g(x)}{x}$의 값이 존재한다.

또한

$\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{(h(x)-|g(x)|)-(h(0)-|g(0)|)}{x-0}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0-}\frac{h(x)+g(x)}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0-}\left(\frac{\ln(1-3g(x))}{g(x)}+\frac{g(x)}{x}\right)$ …… ㉢

의 값이 존재하고

$\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{\ln(1-3g(x))}{g(x)}=-3$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{g(x)}{x}$의 값이 존재한다.

이때 $f'(0)=0$이면 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\infty$가 되어

$\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{g(x)}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{g(x)}{x}$의 값이 존재할 수 없다.

그러므로 $f'(0)\neq0$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

㉡, ㉢에 의하여

$3-g'(0)=-3+g'(0)$, $g'(0)=3$

$g'(0)=\dfrac{1}{f'(0)}$에서 $f'(0)=\dfrac{1}{3}$

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 $f'(0)=b=\dfrac{1}{3}$

이때 $f'(1)=0$이면 조건 (나)를 만족시키지 않으므로

$f'(1)\neq0$

$f(1)=a+\frac{4}{3}$, $g'(f(1))=\frac{1}{f'(1)}=\frac{3}{6a+10}$ 이므로

조건 (나)에 의하여

$4\times\frac{3}{6a+10}=3\times\left(a+\frac{4}{3}\right)-4$

$3a^2+5a-2=0$ 에서 $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

㉠에 의하여

이차방정식 $f'(x)=3x^2+2ax+\frac{1}{3}=0$ 의 판별식을

D라 하면

$D=(2a)^2-4\times3\times\frac{1}{3}=4(a^2-1)\leq 0$

$-1\leq a\leq 1$ 이므로 $a=\frac{1}{3}$

그러므로 $f(x)=x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x$

따라서 $f(3)=31$