2026학년도 5월 고3 전국연합학력평가 문제지

수학 영역

약 70분

$\boxed{100}$

제 2 교시

5지선다형

1. $2^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{32}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

$2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{3}} = 2^{2} = \boxed{4}$

2. 곡선 $y = x^3 + 2x - 1$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$y' = 3x^2 + 2$

$y'(1) = \boxed{5}$

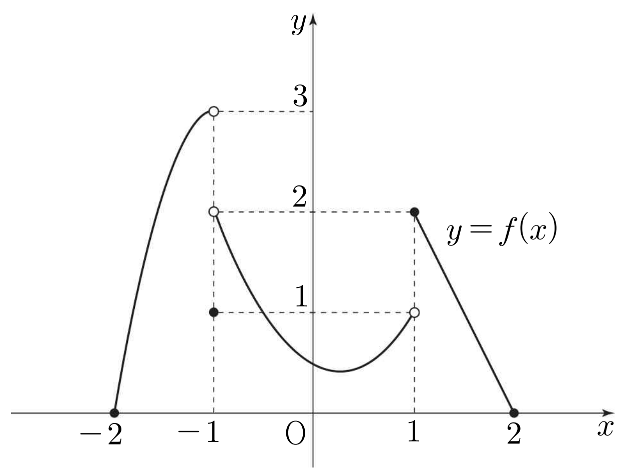
3. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{d}{dx}f(x) = 3x^2 - 5$이고 $f(0) = 1$일 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$f(x) = x^3 - 5x + 1$

$f(1) = \boxed{-3}$

4. 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x \to -1-} f(x) + \lim\limits_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

3 2

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 원점을 지나는 곡선 $y=2^{x-a}+b$의 점근선이 직선 $y=-4$일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

$b=-4$

$(0,0) \to 0=2^{-a}-4$, $-a=2$, $a=-2$

$a+b=\boxed{-6}$

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin bx+1$의 주기가 3π이고 최댓값과 최솟값의 차가 6일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

$\frac{2\pi}{b}=3\pi$, $b=\frac{2}{3}$

$2a=6$, $a=3$

$a+b=\boxed{\frac{11}{3}}$

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_a^x f(t)dt=x^2-3ax+2$$

를 만족시킨다. $f(0)>0$일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$x=a \to -2a^2+2=0$, $a=\pm1$

$f(x)=2x-3a$, $f(0)=-3a>0$ $\to a<0$, $a=-1$

$f(x)=2x+3$, $f(2)=\boxed{7}$

8. 첫째항이 음수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 \times a_5 = 36, \quad a_3 + 2a_4 = 2$$

를 만족시킬 때, a_2의 값은? [3점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

$a_1 = a$, 공비 $= r$, $a<0$, 홀수항 <0

$a_3{}^2 = 36$, $a_3 < 0$ $\rightarrow a_3 = -6$

$a_3 + 2a_4 = -6 + 2a_4 = 2$, $a_4 = 4$

$\therefore r = -\frac{2}{3}$

$a_2 = \frac{a_3}{r} = \left(-\frac{3}{2}\right) \times (-6) = \boxed{9}$

9. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = (x^2 + x) f(x)$$

라 하자. $\lim_{h \to 0} \frac{g(1+h) - 4}{h} = 9$일 때, $f(1) \times f'(1)$의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{9}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 9

$g(1) = 4$, $g'(1) = 9$

$g(1) = 2f(1) = 4$, $f(1) = 2$

$g'(x) = (2x+1)f(x) + (x^2+x)f'(x)$

$g'(1) = 3f(1) + 2f'(1) = 2f'(1) + 6 = 9$

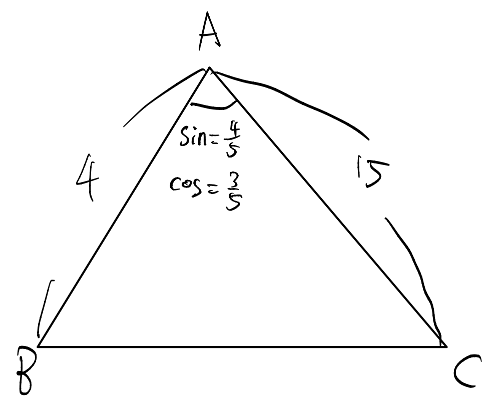
$f'(1) = \frac{3}{2}$

$\therefore f(1) \times f'(1) = \boxed{3}$

10. 각 A가 예각인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는? [4점]

> (가) $\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\overline{\mathrm{AC}} = 15$
> (나) 삼각형 ABC의 넓이는 24이다.

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{65}{8}$ ③ $\frac{35}{4}$ ④ $\frac{75}{8}$ ⑤ 10



$\overline{BC}^2 = 241 - 120 \times \frac{3}{5} = 169$, $\overline{BC} = 13$

$2R = \frac{\overline{BC}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} \times 13 = \frac{65}{4}$ $\therefore R = \boxed{\frac{65}{8}}$

11. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 값의 합은? [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases}-2a_n & (a_n<0)\\ a_n-3 & (a_n\geq 0)\end{cases}$$
> 이다.
> (나) $a_3=a_1+4$

① $-\frac{2}{3}$ ② -1 ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{3}$ ⑤ -2

1. $a_1\geq 0$ $a_2\geq 0$

$\rightarrow$ $a_2=a_1-3$, $a_3=a_1-6=a_1+4$ (모순)

2. $a_1\geq 0$ $a_2<0$

$\rightarrow a_2=a_1-3$, $a_3=-2a_2=-2a_1+6=a_1+4$

$a_1=\frac{2}{3}$, $a_2=-\frac{7}{3}$, $a_3=\frac{14}{3}$

$\therefore a_1=\frac{2}{3}$

3. $a_1<0$, $a_2\geq 0$

$\rightarrow a_2=-2a_1$, $a_3=-2a_1-3=a_1+4$

$a_1=-\frac{7}{3}$, $a_2=\frac{14}{3}$, $a_3=\frac{5}{3}$

$\therefore a_1=-\frac{7}{3}$

4. $a_1<0$, $a_2<0$

$\rightarrow a_2=-2a_1>0$ (모순)

$\therefore a_1=\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}$, 합$=\boxed{-\frac{5}{3}}$

12. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-11t+8$$

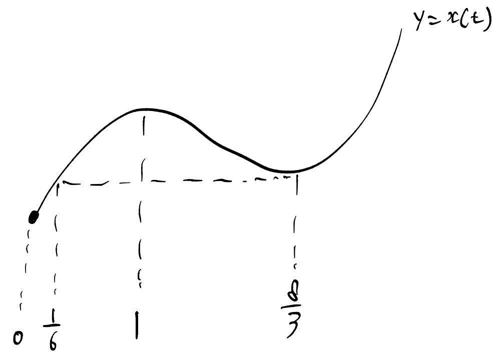
이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> 〈 보 기 〉
> ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.
> ㄴ. 점 P의 가속도가 1이 되는 순간 점 P의 위치는 2이다.
> ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 6이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$v(t)=(t-1)(3t-8)$

$x(t)=t^3-\frac{11}{2}t^2+8t$, $a(t)=6t-11$



$\therefore$ ㄱ) (o)

ㄴ) $a(t)=6t-11=1$ $\rightarrow t=2$

$x(2)=8-22+16=2$ (o)

ㄷ) $x(0)=0$
$x(1)=\frac{7}{2}$
$x(2)=2$

$\rightarrow$ $t=0\sim1$ 이동거리 $\frac{7}{2}$
$t=1\sim2$ 이동거리 $\frac{3}{2}$
$\rightarrow$ $t=0\sim2$ 이동거리 5 (x)

$\therefore$ $\boxed{ㄱ,ㄴ}$

13. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(28)$의 값은? [4점]

> (가) $0 \le x \le 12$인 모든 실수 x에 대하여
>
> $$(\sqrt{2x+1}-1)\times f(x)=ax$$
>
> 이다. (단, a는 상수이다.)
>
> (나) 모든 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$에서 x의 값이 k에서 $k+12$까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{1}{2}$이다.

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

$x \neq 0 \rightarrow f(x)= \frac{ax}{\sqrt{2x+1}-1} = \frac{ax(\sqrt{2x+1}+1)}{2x}$

$f(x)$는 $\mathbb{R}$에서 연속

$\therefore$ $\mathbb{R}$에서 $f(x)=\frac{a}{2}\times(\sqrt{2x+1}+1)$

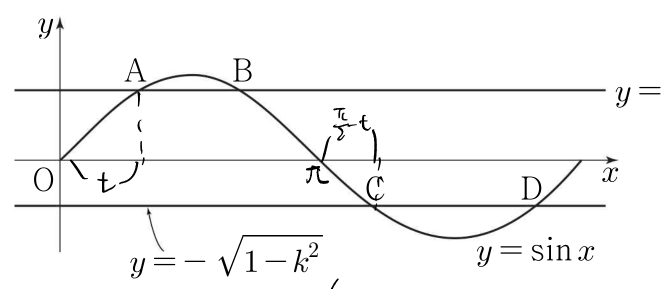
$f(0)=a$, $f(12)=3a$

(나) $k=0 \rightarrow \frac{f(12)-f(0)}{12}=\frac{1}{2}=\frac{6}{12}$

$f(12)-f(0)=2a=6$, $a=3$

$\therefore f(28)=f(16)+6=f(4)+12=2a+12=\boxed{18}$

14. 그림과 같이 곡선 $y=\sin x\,(0\le x\le 2\pi)$가 직선 $y=k$와 만나는 두 점을 A, B라 하고, 직선 $y=-\sqrt{1-k^2}$과 만나는 두 점을 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2}{9}\pi$일 때, 선분 AB의 길이는? (단, k는 $0<k<1$인 상수이다.) [4점]



① $\frac{13}{36}\pi$ ② $\frac{3}{8}\pi$ ③ $\frac{7}{18}\pi$ ④ $\frac{29}{72}\pi$ ⑤ $\frac{5}{12}\pi$

$\sin x=k \rightarrow \cos x=\sqrt{1-k^2}$, $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$

$\therefore A(t, \sin t)$, $B(\pi-t, \sin t)$

$C(\frac{3}{2}\pi-t, -\cos t)$, $D(\frac{3}{2}\pi+t, -\cos t)$

$\overline{CD}=2t$, $\overline{AB}=\pi-2t$

$\overline{CD}-\overline{AB}=4t-\pi=\frac{2}{9}\pi$

$4t=\frac{11}{9}\pi$, $t=\frac{11}{36}\pi$

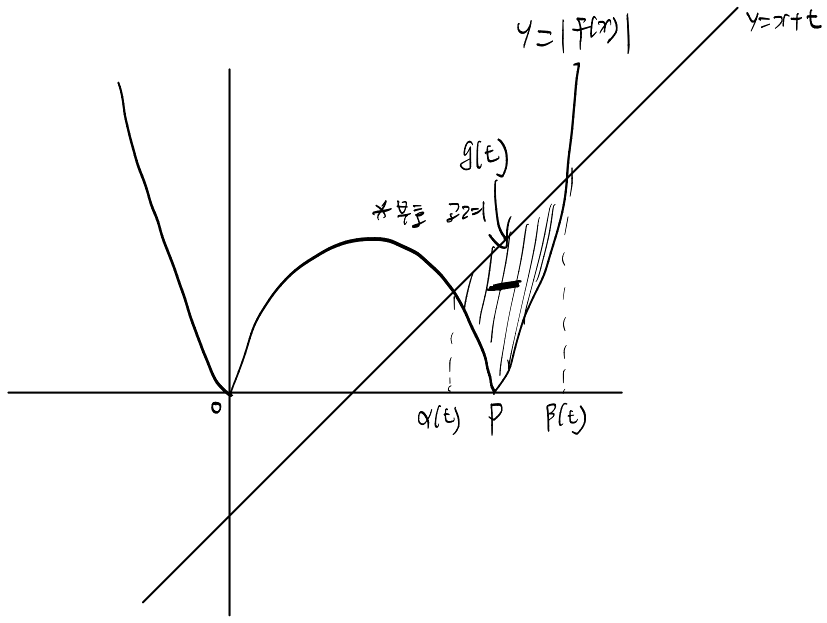
$\overline{AB}=\pi-2t=\pi-\frac{11}{18}\pi=\boxed{\frac{7}{18}\pi}$

15. $p>1$인 상수 p에 대하여 함수 $f(x)=x^2-px$가 있다. 실수 $t\,(t>-p)$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=x+t$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자.
열린구간 $(-p,\ \infty)$에서 정의된 함수

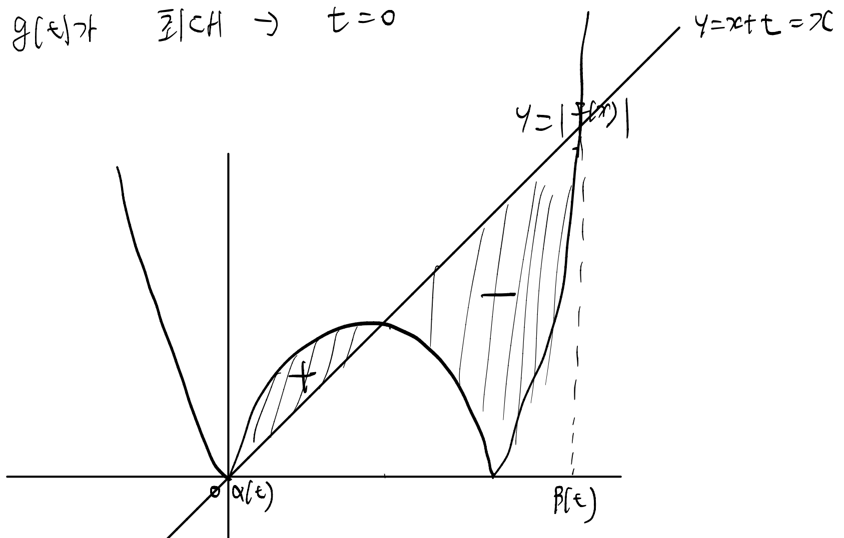
$$g(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\{|f(x)|-(x+t)\}dx$$

의 최댓값이 $\frac{1}{2}$일 때, p의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4



g(t)가 최대 → t=0



$x^2-px=x$

$x^2-(p+1)x=x(x-(p+1))=0$

$\therefore \alpha(t)=0,\ \beta(t)=p+1$

$g(t)=\int_0^p -x^2+px-x\,dx+\int_p^{p+1} x^2-px-x$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{p-1}{2}x^2\right]_0^p+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{p+1}{2}x^2\right]_p^{p+1}$

$=-\frac{1}{3}p^3+\frac{p^2(p-1)}{2}+\frac{1}{3}(3p^2+3p+1)-\frac{p+1}{2}(2p+1)$

$=-\frac{1}{3}p^3+\frac{1}{2}p^3-\frac{1}{2}p^2+p^2+p+\frac{1}{3}-p^2-\frac{3}{2}p-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{6}p^3-\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}p-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}p^3-\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}p-\frac{2}{3}=0$

$p^3-3p^2-3p-4=(p-4)(p^2+p+1)=0$ $\therefore \boxed{p=4}$

단답형

16. 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}\pi$인 부채꼴의 넓이는 $a\pi$이다. a의 값을 구하시오. [3점]

$a=\frac{1}{2}\times 8^2\times\frac{3}{4}=\boxed{24}$

17. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{7}a_{2k}=\sum_{k=1}^{7}\left(k^2-a_{2k-1}\right)$일 때, $\sum_{k=1}^{14}a_k$의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{k=1}^{7}a_{2k}=\sum_{k=1}^{7}k^2-\sum_{k=1}^{7}a_{2k-1}$

$\sum_{k=1}^{7}a_{2k}+\sum_{k=1}^{7}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{14}a_k$

$=\sum_{k=1}^{7}k^2=\frac{7\cdot 8\cdot 15}{6}=\boxed{140}$

18. 방정식

$$\log_2(x-4)=\log_{\frac{1}{2}}(x-6)+3$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x>6$

$\log_2(x-4)=-\log_2(x-6)+\log_2 8$

$\log_2(x-4)+\log_2(x-6)$

$=\log_2(x^2-10x+24)=\log_2 8$

$x^2-10x+24=8$

$x^2-10x+16=0$

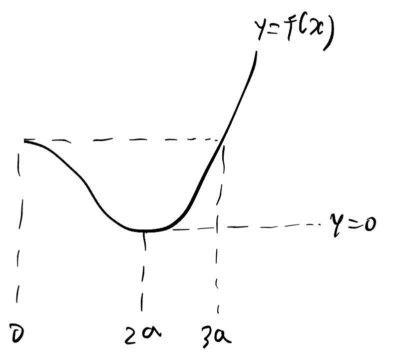
$x=2,8$

$x>6 \rightarrow x=\boxed{8}$

19. x에 대한 방정식 $x^3-3ax^2+40a^2=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 1일 때, 양수 a의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=x^3-3ax^2+40a^2$

$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$



$f(2a)=8a^3-12a^3+40a^2$

$=40a^2-4a^3=4a^2(10-a)=0$, $a>0$

$\therefore a=\boxed{10}$

20. 첫째항이 8인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$b_n=\begin{cases}-2a_n & (a_n\le 0)\\ a_n & (a_n>0)\end{cases}$$
> 이다.
> (나) $b_3+b_5=2b_4+6$, $b_4+b_6=2b_5$

$\{a_n\}$의 공차$=d$

$b_4+b_6=2b_5 \rightarrow a_4$부터는 모두 0 이하

$b_3+b_5\ne 2b_4 \rightarrow a_3>0$

$b_3=a_3$
$b_4=-2a_4$
$b_5=-2a_5$

$\rightarrow a_3-2a_5=-4a_4+6$

$(8+2d)-2(8+4d)=-4(8+3d)+6$

$-8-6d=-26-12d$

$6d=-18$, $d=-3$

$\{a_n\}$: $8,5,2,-1,-4,-7,-10,-13,-16,-19$

$\{b_n\}$: $\underbrace{8,5,2}_{5\times3=15},\underbrace{2,8,14,20,26,32,38}_{20\times7=140}$

$\boxed{155}$

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 양수 p와 실수 $k(k \neq 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<p) \\ kf(x-p) & (x \geq p) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (나) x에 대한 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 $2p$이다.

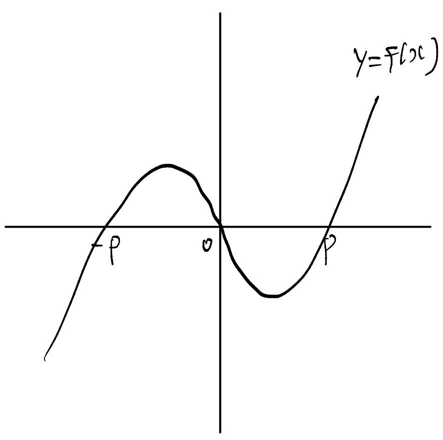
함수 $g(x)$의 극값 중 가장 큰 값이 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

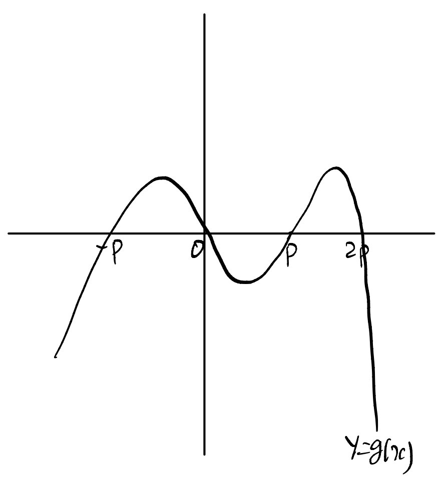
(가) → $f(p)=f(0)=0$

(나) → $g(x)=0$의 근에는 $0, p, 2p$ 포함

→ $g(-p)=f(-p)=0$

$\therefore f(x)=x(x-p)(x+p)$





$f(x)=x^3-p^2x$, $f'(x)=3x^2-p^2$

$f'(0)=-p^2$, $f'(p)=2p^2$

$g(x)$ $x=p$ 미분가능 → $f'(p)=kf'(0)$, $k=-2$

$g(x)$ 극값 최대는 $(p, 2p)$ 구간에 존재 ($\because |k|>1$)

이때 $1:\sqrt{3}$ 비율 관계에 의해

이 점의 x좌표 $=(1+\frac{1}{\sqrt{3}})p$

$g\left((1+\frac{1}{\sqrt{3}})p\right)=-2f(\frac{1}{\sqrt{3}}p)=-2\left(\left(\frac{p}{\sqrt{3}}\right)^3-p^2\cdot\frac{p}{\sqrt{3}}\right)$

$=-2\left(\frac{p^3}{3\sqrt{3}}-\frac{3p^3}{3\sqrt{3}}\right)$

$=-2\times\left(-\frac{2p^3}{3\sqrt{3}}\right)$

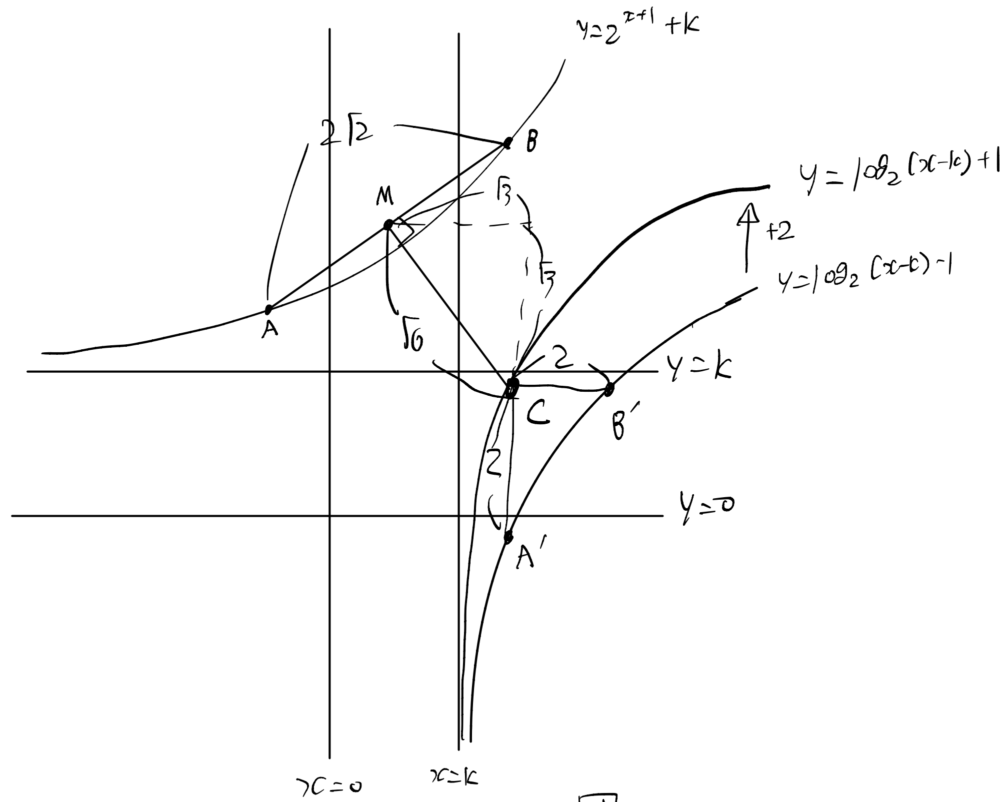
$=\frac{4}{3\sqrt{3}}p^3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $8p^3=27$, $p=\frac{3}{2}$

$\therefore f(4)=64-4p^2=\boxed{55}$

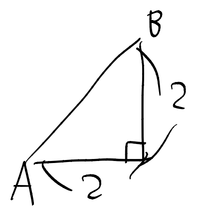
22. 다음 조건을 만족시키는 곡선 $y=2^{x+1}+k$ 위의 서로 다른 두 점 A, B와 곡선 $y=\log_2(x-k)+1$ 위의 점 C가 존재하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 S라 하자.

(가) 직선 AB의 기울기는 1이다. (나) 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정삼각형이다.

$2^{-S+\frac{2}{3}}$의 값을 구하시오. [4점]



$y=2^{x+1}+k \xrightarrow{\text{역}} y=\log_2(x-k)-1$



$\therefore A(a, 2^{a+1}+k)$, $B(a+2, 2^{a+1}+k+2)$

B는 곡선 위 → $2^{a+3}+k=2^{a+1}+k+2$

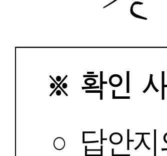
$8\times2^a=2\times2^a+2$, $2^a=\frac{1}{3}$, $a=\log_2\frac{1}{3}$

$A(\log_2\frac{1}{3}, \frac{2}{3}+k)$, $B(\log_2\frac{4}{3}, \frac{8}{3}+k)$

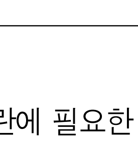
중점 $M(\log_2\frac{2}{3}, \frac{5}{3}+k)$

→ $\overline{CM}=\sqrt{6}$

$A'(\frac{2}{3}+k, \log_2\frac{1}{3})$, $B'(\frac{8}{3}+k, \log_2\frac{4}{3})$ → $C(\frac{2}{3}+k, \log_2\frac{4}{3})$



OR



→ $\begin{cases} \frac{2}{3}+k=\log_2\frac{2}{3}+\sqrt{3} \\ \log_2\frac{4}{3}=\frac{5}{3}+k-\sqrt{3} \end{cases}$

$k=\log_2\frac{2}{3}+\sqrt{3}-\frac{2}{3}$

OR $\begin{cases} \frac{2}{3}+k=\log_2\frac{2}{3}-\sqrt{3} \\ \log_2\frac{4}{3}=\frac{5}{3}+k+\sqrt{3} \end{cases}$

$k=\log_2\frac{2}{3}-\sqrt{3}-\frac{2}{3}$

$S=2\log_2\frac{2}{3}-\frac{4}{3}$

$\therefore 2^{-S+\frac{2}{3}}$

$=2^{2-2\log_2\frac{2}{3}}$

$=2^{\log_2 4-\log_2\frac{4}{9}}$

$=2^{\log_2 9}$

$=\boxed{9}$

※ **확인 사항**

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. 함수 $f(x)=4\ln x$에 대하여 $f''(2)$의 값은? [2점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$f'(x)=\frac{4}{x}$

$f''(x)=-\frac{4}{x^2}$

$f''(2)=\boxed{-1}$

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$이 수렴할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3^{n+1}}{a_n+3^{n-1}}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n}=0$

$\therefore$ (준식)$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{3^n}+3}{\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}}=\frac{3}{\frac{1}{3}}=\boxed{9}$

25. 실수 $t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 곡선 $y=\sin 2x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, \sin 2t)$를 지나고 직선 OP에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

$\overline{OP}$: $y=\frac{\sin 2t}{t}x$

$\overline{PQ}$: $y=-\frac{t}{\sin 2t}(x-t)+\sin 2t$

$y\sin 2t=-tx+t^2+(\sin 2t)^2$

$y=0 \rightarrow x=t+\frac{(\sin 2t)^2}{t}$ = Q의 x좌표

$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{\overline{OQ}}{t}=\lim_{t\to 0+}\left(1+\left(\frac{\sin 2t}{t}\right)^2\right)$

$=1+2^2=\boxed{5}$

26. 다항함수 $f(x)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$$a_n=f(n)$$

이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{a_2}{a_1}$의 값은? [3점]

(가) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n}-2n\right)=2$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{a_n+1}$의 값은 자연수이다.

① $\frac{11}{6}$ ② 2 ③ $\frac{13}{6}$ ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

a_n은 $4n^2+$ ___ 의 2차식

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4n^2}{\sqrt{a_n}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4n^2}{4n}=2$

$\therefore a_n=4n^2+8n+$ ___

(나) $\rightarrow 4n^2+8n+4=(2n+2)^2$

$\therefore a_n+1=4n^2+8n+4$

$a_n=4n^2+8n+3$

$a_1=15,\ a_2=35$

$\frac{a_2}{a_1}=\boxed{\frac{7}{3}}$

27. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = 2e^{t} - 3e^{-t}, \quad y = 2e^{t} + 6e^{-t}$$

을 C라 하자. 상수 k에 대하여 t에 대한 방정식 $2e^{t} + 6e^{-t} = k$는 서로 다른 두 실근 t_1, t_2를 갖는다. 곡선 C에서 $t = t_1$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $-\frac{1}{5}$이고, $t = t_2$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은 m이다. $k + m$의 값은? [3점]

① $\frac{75}{11}$ ② $\frac{79}{11}$ ③ $\frac{83}{11}$ ④ $\frac{87}{11}$ ⑤ $\frac{91}{11}$

$x' = 2e^{t} + 3e^{-t}$, $y' = 2e^{t} - 6e^{-t}$

$2e^{2t} - ke^{t} + 6 = 0 \rightarrow t = t_1, t_2$

$e^{t_1} = \alpha$, $e^{t_2} = \beta \rightarrow 2x^2 - kx + 6 = 0$ 의 근은 $x = \alpha$, $x = \beta$
$\alpha > 0$, $\beta > 0$

$\therefore \alpha + \beta = \frac{k}{2}$, $\alpha\beta = 3$

$t = t_1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{2\alpha - \frac{6}{\alpha}}{2\alpha + \frac{3}{\alpha}} = \frac{2\alpha^2 - 6}{2\alpha^2 + 3} = -\frac{1}{5}$

$10\alpha^2 - 30 = -2\alpha^2 - 3$

$12\alpha^2 = 27$, $\alpha^2 = \frac{9}{4}$

$\alpha > 0 \quad \therefore \alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = 2$ $(\because \alpha\beta = 3)$

$\frac{k}{2} = \alpha + \beta = \frac{7}{2} \rightarrow k = 7$

$m = \beta$에서 $\frac{y'}{x'} = \frac{4-3}{4+\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{11}{2}} = \frac{2}{11}$

$\therefore k + m = 7 + \frac{2}{11} = \boxed{\frac{79}{11}}$

28. 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$(b_n - a_n)(b_n - |a_n|) = 0$$
> 이다.
>
> (나) $\sum_{n=k}^{\infty}(a_{2n+1} + b_{2n+1}) = 0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 2이다.

$b_1 - b_3 = 3a_3 + 5$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값은? [4점]

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

$b_n = a_n$ or $b_n = |a_n|$

$\Rightarrow a_n \geq 0 \rightarrow b_n = a_n$
$a_n < 0 \rightarrow b_n = a_n$ or $b_n = -a_n$

(나) $\rightarrow$ $(k=1)$ $a_3 + b_3 \neq 0$
$(k=2)$ $a_5 + b_5 = 0$
$(k=3)$ $a_7 + b_7 = 0$
$(k=4)$ $a_9 + b_9 = 0$
$\vdots$

$\Rightarrow b_3 = a_3$, $b_5 = -a_5$, $b_7 = -a_7$, $\cdots$

$a_3, a_5, a_7, \cdots < 0 \qquad \therefore a_1 < 0$

$b_3 = a_3$

$\Rightarrow b_1 - b_3 = b_1 - a_3 = 3a_3 + 5$

$b_1 = 4a_3 + 5$
$= 4(a_1 \times (-\frac{1}{2})^2) + 5$
$= a_1 + 5 = -a_1$

$\therefore a_1 = -\frac{5}{2}$, $b_1 = \frac{5}{2}$

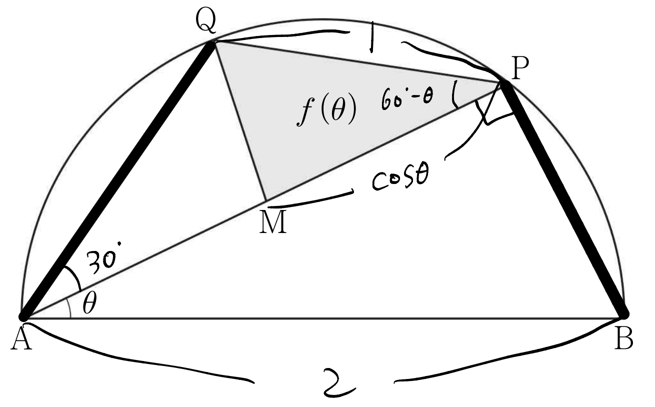
a_n	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{5}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\cdots$
b_n	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{64}$	$\cdots$

$\frac{5}{2} + \frac{5}{4} - \frac{5}{8} = \frac{25}{8}$ $\qquad$ $\frac{\frac{5}{16}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{8}$

$\therefore \frac{25}{8} + \frac{5}{8} = \boxed{\frac{15}{4}}$

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 점 P를 $\angle \mathrm{BAP} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right)$가 되도록 잡고, 호 AP 위에 점 Q를 $\overline{\mathrm{PQ}} = 1$이 되도록 잡는다. 선분 AP의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 PQM의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\overline{\mathrm{AP}} = \frac{6}{5}$이 되도록 하는 θ의 값을 a라 할 때, $f'(a) = p + q\sqrt{3}$이다. $100 \times |p+q|$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



$2R=2$, $\overline{PQ}=1$

$\therefore \dfrac{\overline{PQ}}{\sin\angle PAQ} = \dfrac{1}{\sin\angle PAQ} = 2$

$\sin\angle PAQ = \frac{1}{2}$, $\angle PAQ = 30°$

□ABPQ는 원에 내접

$\to \angle QAB + \angle QPB = 180°$, $\angle QAB = \theta + 30°$

$\to \angle QPB = 150° - \theta$, $\angle APB = 90°$

$\angle QPA = 60° - \theta$

한편, $\overline{AP} = 2\cos\theta \to \overline{PM} = \cos\theta$

$\Rightarrow f(\theta) = \frac{1}{2}\cos\theta\sin(60°-\theta)$

$= \frac{1}{2}\cos\theta(\sin 60°\cos\theta - \cos 60°\sin\theta)$

$= \frac{1}{2}\cos\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)$

$= -\frac{1}{4}\sin\theta\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2\theta$

$= -\frac{1}{8}\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2\theta$ $(\because 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta)$

$f'(\theta) = -\frac{1}{4}\cos 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\sin\theta$

$= -\frac{1}{4}\cos 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\theta$

한편, $\overline{AP} = 2\cos a = \frac{6}{5} \to \cos a = \frac{3}{5}$, $\sin a = \frac{4}{5}$

$\cos 2a = -\frac{7}{25}$, $\sin 2a = \frac{24}{25}$

$f'(a) = \frac{7}{100} - \frac{6\sqrt{3}}{25}$

$p = \frac{7}{100}$, $q = -\frac{6}{25}$

$p+q = -\frac{17}{100}$ $\therefore 100 \times |p+q| = \boxed{17}$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 갖는다. 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)h(x) = x\ln(1+3|g(x)|)$$

이고 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $g(k)=0$인 상수 k에 대하여
> 함수 $h(x) - |g(x)|$는 $x=k$에서 미분가능하다.
> (나) $4g'(f(1)) = 3f(1) - 4$

$x=0 \to g(0)h(0)=0$, $g(x)=0$인 x는 1개 존재

(가) $\to$ $g(x)$는 x축과 안 접하므로

$|g(x)|$: $x=k$에서 첨점

이때 미분가능 $\to h(x)$도 $x=k$ 첨점

$\to h(k)=0$

$\to g(k)h(k)=0$

$\therefore k=0$, $f(0)=g(0)=0$

$x>0 \to f(x)>0$, $g(x)>0$

$\therefore x>0 \to h(x) = \dfrac{x\ln(1+3g(x))}{g(x)}$

$= 3x \times \dfrac{\ln(1+3g(x))}{3g(x)}$

$h'(x) = 3 \times \dfrac{\ln(1+3g(x))}{3g(x)} + 3x \times \left(\dfrac{\ln(1+3g(x))}{3g(x)}\right)'$

$|g(x)|$는 $x=k$ 연속 $\to h(x)$도 연속

$\therefore \lim_{x\to 0+} h'(x) = 3$ $\left(\because \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\right)$, $\lim_{x\to 0-} h'(x) = -3$

$\to g'(0)=3$, $f'(0)=\frac{1}{3}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + \frac{1}{3}x$, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + \frac{1}{3}$

$D/4 = a^2 - 1 < 0$

(나) $\dfrac{4}{f'(1)} = 3f(1) - 4 \to \dfrac{4}{2a+\frac{10}{3}} = 3\left(a+\frac{4}{3}\right) - 4 = 3a$, $4 = 3a\left(2a+\frac{10}{3}\right) = 6a^2+10a$

$6a^2+10a-4 = (2a+4)(3a-1) = 0$, $a^2-1<0$

$\therefore a = \frac{1}{3}$

$f(x) = x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$

$f(3) = \boxed{31}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.