수학 영역

5지선다형

1. $2^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{32}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

$2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{3}} = 2^2$

2. 곡선 $y = x^3 + 2x - 1$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$y' = 3x^2 + 2 \rightarrow \boxed{5}$

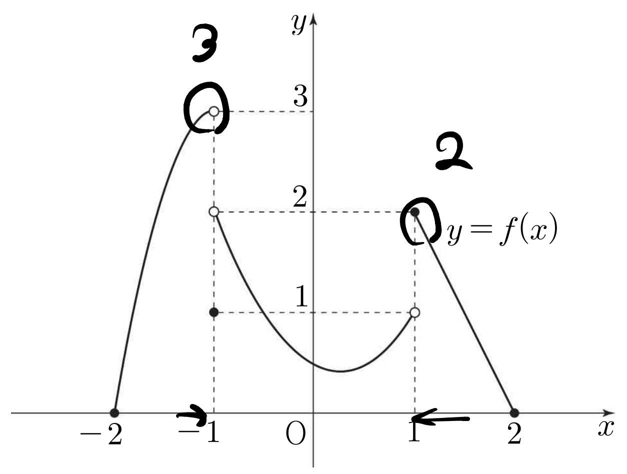
3. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{d}{dx}f(x) = 3x^2 - 5$이고 $f(0) = 1$일 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$f(x) = x^3 - 5x + 1$

$f(1) = -3$ (계수 합)

4. 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 원점을 지나는 곡선 $y=2^{x-a}+b$의 점근선이 직선 $y=-4$일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

$y=2^{x-a}-4$, $b=-4$

$0=2^{-a}-4$, $a=-2$

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin bx+1$의 주기가 3π이고 최댓값과 최솟값의 차가 6일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

$\frac{2\pi}{b}=3\pi$, $b=\frac{2}{3}$

$2a=6$, $a=3$

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_a^x f(t)dt=x^2-3ax+2$$

를 만족시킨다. $f(0)>0$일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$x=a$ 대입 ⇝ $a^2=1$

$f(x)=2x-3a \longrightarrow 2x+3$, $f(2)=7$

$(f(0)>0)$

8. 첫째항이 음수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 \times a_5 = 36, \quad a_3 + 2a_4 = 2$$

를 만족시킬 때, a_2의 값은? [3점]

① 3　② 6　③ 9　④ 12　⑤ 15

$a_4 = 4$

$a_3 = -6$

? -6, 4

$\boxed{9}$

9. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = (x^2 + x)f(x)$$

라 하자. $\lim_{h \to 0} \frac{g(1+h) - 4}{h} = 9$일 때, $f(1) \times f'(1)$의 값은? [4점]

① 3　② $\frac{9}{2}$　③ 6　④ $\frac{15}{2}$　⑤ 9

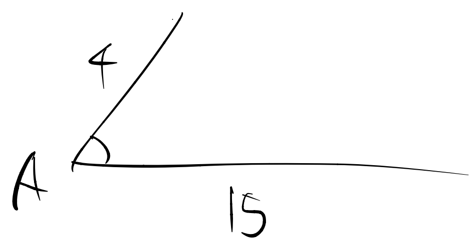
$2f(1) = 4 \rightarrow f(1) = 2$

$3f(1) + 2f'(1) = 9$　$f'(1) = \frac{3}{2}$

10. 각 A가 예각인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는? [4점]

(가) $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 15$ (나) 삼각형 ABC의 넓이는 24이다.

① $\frac{15}{2}$　② $\frac{65}{8}$　③ $\frac{35}{4}$　④ $\frac{75}{8}$　⑤ 10



$\frac{1}{2} \times 4 \times 15 \times \sin A = 24$

$\sin A = \frac{4}{5}$
$\cos A = \frac{3}{5}$) 예각 A

$\frac{3}{5} = \frac{4^2 + 15^2 - x^2}{2 \times 4 \times 15}$, $x = 13$

$2R \times \frac{4}{5} = 13$, $R = \frac{65}{8}$

11. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 값의 합은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} -2a_n & (a_n<0) \\ a_n-3 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

이다.

(나) $a_3=a_1+4$

음수가 될 때까지 3을 빼다가, 음수가 되면 ×(-2)로 양수 반드시 만들어주기!!

② ② ... ② ① ② ... ②

① $-\frac{2}{3}$ ② -1 ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{3}$ ⑤ -2

$a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3$

규칙 2번 따르기

① ① ~ 연속으로 불가능

① ② ~ $a_3=-2a_1-3$ → $a_1=-\frac{7}{3}$

② ① ~ $a_3=-2a_1+6$ → $a_1=\frac{2}{3}$

② ② ~ 차이가 6 → (나)와 모순

검토

$-\frac{7}{3} \rightarrow \frac{14}{3} \rightarrow \frac{5}{3}$ (o)

$\frac{2}{3} \rightarrow -\frac{7}{3} \rightarrow \frac{14}{3}$ (o)

$\Sigma a_1 = -\frac{5}{3}$

12. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-11t+8$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

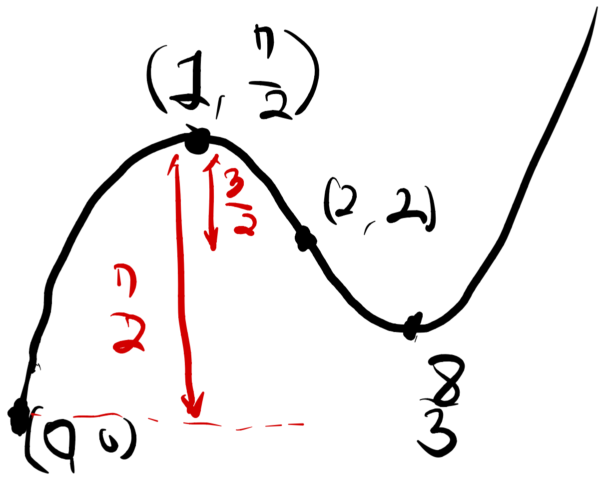
ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다. → O

ㄴ. 점 P의 가속도가 1이 되는 순간 점 P의 위치는 2이다. → $t=2$, (O)

ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 6이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$x(t)=t^3-\frac{11}{2}t^2+8t$



ㄷ → $\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=5$ (X)

13. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(28)$의 값은? [4점] ↳ 모든 함수: $f(x)=$ ~ 로 표기!!

(가) $0 \leq x \leq 12$인 모든 실수 x에 대하여 $(\sqrt{2x+1}-1)\times f(x)=ax$ 이다. (단, a는 상수이다.) (나) 모든 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$에서 x의 값이 k에서 $k+12$까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{1}{2}$이다.

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

(가): $x=0 \rightsquigarrow 0=0$

$0<x\leq 12 \rightsquigarrow f(x)=\dfrac{ax}{\sqrt{2x+1}-1}$

(나): $\dfrac{f(k+12)-f(k)}{k+12-k}=\dfrac{1}{2}$, $f(k+12)=f(k)+6$

→ 주기!!

$f(28)=12+f(4)$, a 구하기.

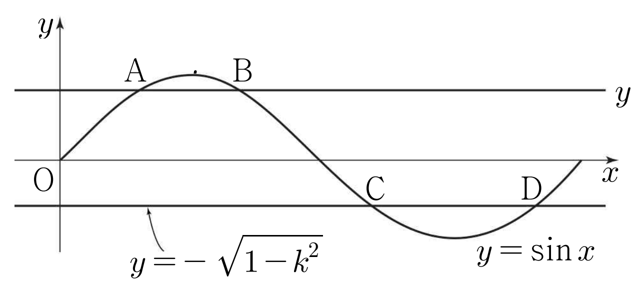
$\underbrace{f(12)}_{\frac{12a}{4}}=\underbrace{f(0)}_{\lim_{x\to 0+}\frac{ax}{\sqrt{2x+1}-1}=a}+6$

$3a=a+6$

$a=3$

$f(4)=2a=6$, $f(28)=18$

14. 그림과 같이 곡선 $y=\sin x\,(0\leq x\leq 2\pi)$가 직선 $y=k$와 만나는 두 점을 A, B라 하고, 직선 $y=-\sqrt{1-k^2}$과 만나는 두 점을 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2}{9}\pi$일 때, 선분 AB의 길이는? (단, k는 $0<k<1$인 상수이다.) [4점]



① $\frac{13}{36}\pi$ ② $\frac{3}{8}\pi$ ③ $\frac{7}{18}\pi$ ④ $\frac{29}{72}\pi$ ⑤ $\frac{5}{12}\pi$

$\sin x=-\sqrt{1-k^2} \rightsquigarrow \cos x=\pm k$

C는 3사분면에서 $\cos x=-k$인 점.

⇒ (1사분면에서 $\cos x=k$인 x좌표) $+\pi$

$=\frac{\pi}{2}-\alpha$

A의 x좌표가 α일 때,

x좌표는 A · B · C · D

α $\pi-\alpha$ $\frac{3}{2}\pi-\alpha$ $\frac{3}{2}\pi+\alpha$

$2\alpha-(\pi-2\alpha)=\frac{2}{9}\pi$

$\alpha=\frac{11}{36}\pi$, $\pi-2\alpha=\boxed{\frac{7}{18}\pi}$

15. $p>1$인 상수 p에 대하여 함수 $f(x)=x^2-px$가 있다. 실수 $t\,(t>-p)$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=x+t$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자.
열린구간 $(-p,\ \infty)$에서 정의된 함수

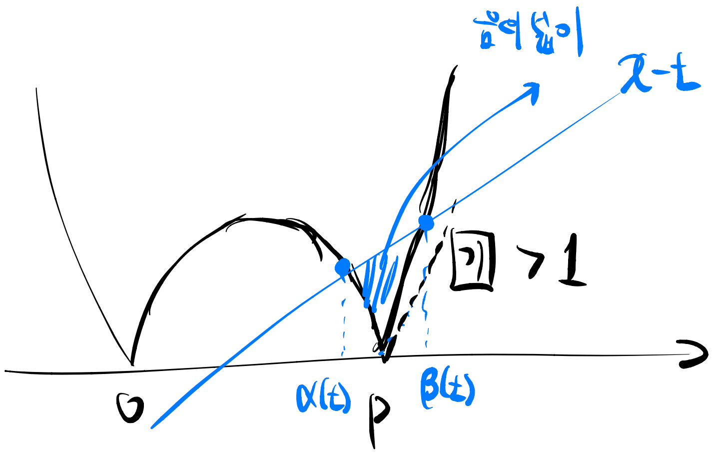
$$g(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\{|f(x)|-(x+t)\}dx$$

의 최댓값이 $\frac{1}{2}$일 때, p의 값은? [4점]

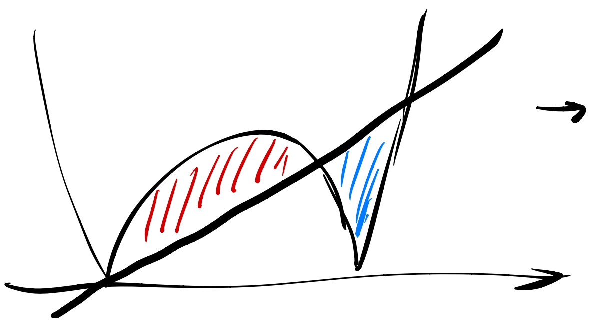
① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

$t>-p$ 이므로 ($y=x+t$ 의 x절편) $<p$

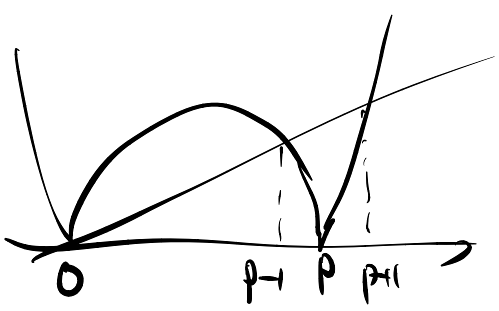
$|f(x)|-(x+t)$를 ㄷ 기준으로 적분..



(x절편)$=0$ 에서 처음으로 '양수 넓이' 발생



$x=0$에서 최대!!



$$\int_0^p -f(x)-x\,dx+\int_p^{p+1} f(x)-x\,dx=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^{p+1} -x\,dx+\int_0^{p+1}|f(x)|\,dx=\frac{1}{2}$$

$$-\frac{(p+1)^2}{2}+\frac{p^3}{6}+\int_p^{p+1} f(x)\,dx=\frac{1}{2},\quad p=4 \quad \boxed{4}$$

단답형

16. 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}\pi$인 부채꼴의 넓이는 $a\pi$이다. a의 값을 구하시오. [3점]

$S=\frac{1}{2}\times 64\times\frac{3}{4}\pi \rightarrow \boxed{24}$

17. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{7}a_{2k}=\sum_{k=1}^{7}(k^2-a_{2k-1})$일 때, $\sum_{k=1}^{14}a_k$의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{k=1}^{7}k^2=\sum_{k=1}^{7}a_{2k-1}+a_{2k}$

$=a_1 \sim a_{14}$

$\rightarrow \frac{7\times 8\times 15}{6}$

$=140$

18. 방정식

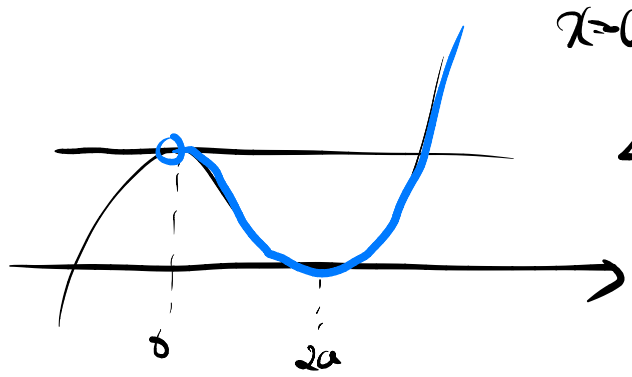
$$\log_2(x-4)=\log_{\frac{1}{2}}(x-6)+3$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x-4=\dfrac{8}{x-6}$ $x^2-10x+16=0$

8

19. x에 대한 방정식 $x^3-3ax^2+40a^2=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 1일 때, $\boxed{\text{양수 } a\text{의}}$ 값을 구하시오. [3점]



$x=a \rightarrow y=0$

$4a^3=40a^2$

$a=10$

$\boxed{10}$

20. 첫째항이 8인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$b_n=\begin{cases} -2a_n & (a_n \le 0) \\ a_n & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.
>
> (나) $\underbrace{b_3+b_5=2b_4+6}_{\text{등차X}}$, $\underbrace{b_4+b_6=2b_5}_{\text{등차O}}$

→ $a_n>0$과 $a_n<0$ 사이 교체!!

등차 X 등차 O

b_n: b_3 b_4 b_5 b_6

↓ ↓ ↓ ↓

a_3 $-2a_4$ $-2a_5$ $-2a_6$

$a_n>0$ ← | → $a_n \le 0$

$a_3-2a_5=-4a_4+6$

$(8+2d)-2(8+4d)=-4(8+3d)+6$

$d=-3$

$a_1+a_2+a_3-2(a_4+a_5+\cdots+a_{10})$

$=3a_3-14a_7$

$=15-14\times(-10)=\boxed{155}$

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 양수 p와 실수 $k(k\neq 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<p) \\ kf(x-p) & (x\geq p) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다. ↳ $x=p$ 부터의 개형은 k배해서 가져오기!

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) x에 대한 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 $2p$이다.

함수 $g(x)$의 극값 중 가장 큰 값이 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

$f(0)=0$

미.가 ~ $f(p)=0$, $f'(p)=kf'(0)$

$f(x)$ $(x\leq p)$가 0과 p에서 근

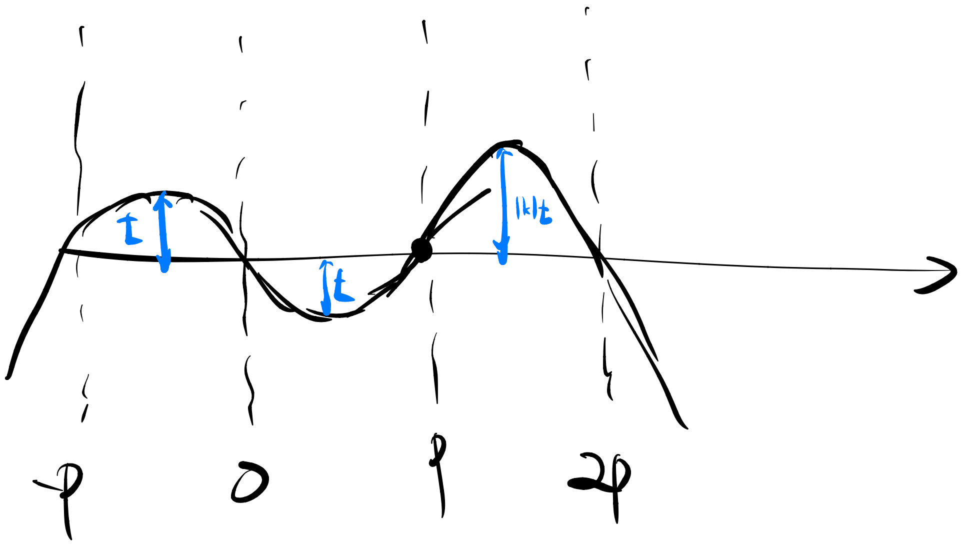
→ $kf(x-p)$ $(x\geq p)$가 p와 $2p$에서 근

(나) ~ $f(x)$ $(x\leq p)$가 $x=-p$에서도 근!!

(∵ 근의 합이 $2p$)

$f(x)=x^3-p^2x$,

↳ $g(x)$ 개형...



$f'(p)=kf'(0)$,
$k=-2$

$2f\left(-\frac{p}{\sqrt{3}}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\frac{4}{3\sqrt{3}}p^3=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$p=\frac{3}{2}$ $f(4)=\boxed{55}$

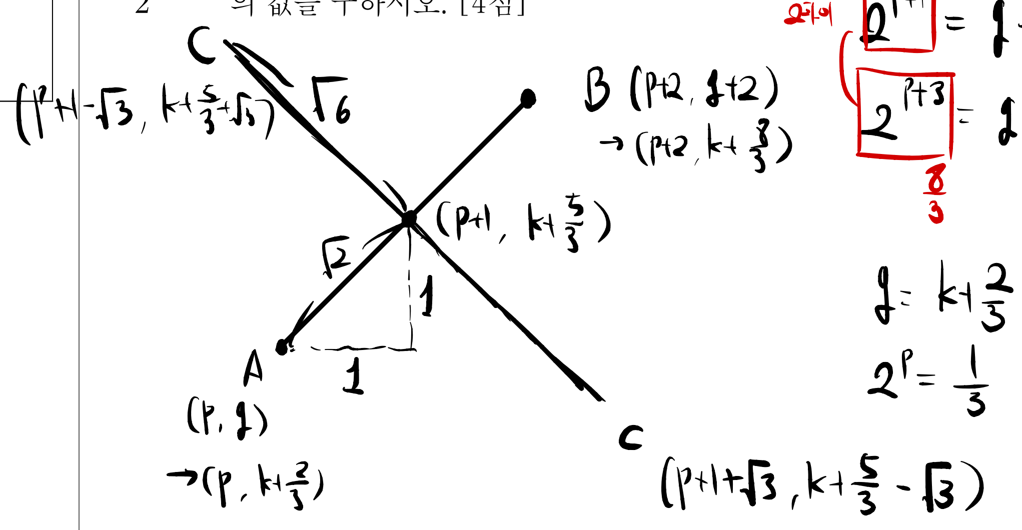
22. 다음 조건을 만족시키는 곡선 $y=2^{x+1}+k$ 위의 서로 다른 두 점 A, B와 곡선 $y=\log_2(x-k)+1$ 위의 점 C가 존재하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 S라 하자.

> (가) 직선 AB의 기울기는 1이다.
> (나) 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정삼각형이다.

$2^{-S+\frac{2}{3}}$의 값을 구하시오. [4점]

2배에 $\boxed{2^{p+1}}=y-k$ $\frac{2}{3}$

$\boxed{2^{p+3}}=y-k+2$ $\frac{8}{3}$



$y=k+\frac{2}{3}$

$2^p=\frac{1}{3}$

C의 좌표는 $(p+1+\sqrt{3},\ k+\frac{5}{3}-\sqrt{3})$

or

$(p+1-\sqrt{3},\ k+\frac{5}{3}+\sqrt{3})$

$p-k_1+1+\sqrt{3}=2^{k_1+\frac{2}{3}-\sqrt{3}}$

$p-k_2+1-\sqrt{3}=2^{k_2+\frac{2}{3}+\sqrt{3}}$

$k_1-\sqrt{3}=A$, $-A+(p+1)=2^{A+\frac{2}{3}}$

$k_2+\sqrt{3}=B$ $-B+(p+1)=2^{B+\frac{2}{3}}$ ⇒ $A=B$

$\frac{2}{3}+\log_2\frac{2}{3}=A+\frac{2}{3}+2^{A+\frac{2}{3}}$ $k_1+k_2=2A$

$\log_2\frac{2}{3}=A+\frac{2}{3}$, $2^{-2A+\frac{2}{3}}$

$=2^{2-\log_2\frac{4}{9}}=\boxed{9}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 7개의 문자 a, a, a, b, b, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 70　② 105　③ 140　④ 175　⑤ 210

$\frac{7!}{3!3!}$

$\frac{\overset{20}{\cancel{120}}\times\cancel{6}\times 7}{\cancel{6}\times 6}$

24. 두 사건 A, B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{8},\quad \mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}$$

일 때, $\mathrm{P}\left(B^C\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{8}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{5}{8}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{7}{8}$

25. $(2x^2+1)^4\left(x-\dfrac{1}{2x}\right)$의 전개식에서 x^5의 계수는? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$x\ (x)\quad 4\times{}_4C_2=24$

$x\left(-\dfrac{1}{2x}\right)\ 8\times{}_4C_3\times-\dfrac{1}{2}=-16$

$\boxed{8}$

26. 다음 조건을 만족시키는 6 이하의 자연수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$의 모든 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$의 개수는? [3점]

> (가) $a_5-a_1=4$이고,
> $2\le k\le 4$인 모든 자연수 k에 대하여 $a_1\le a_k\le a_5$이다.
> (나) $a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5$의 값은 짝수이다.

① 163 ② 178 ③ 193 ④ 208 ⑤ 223

1 _ _ _ 5 → 125 − 22

2 _ _ _ 6 → 125

모두 홀수

27. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수는? [3점]

> (가) $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5)$
> (나) 1과 3은 함수 f의 치역의 원소이다.

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

$${}_4H_5 - \underbrace{2 \times {}_3H_5}_{1제외 / 3제외} + \underbrace{{}_2H_5}_{1·3모두 제외}$$

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 일대일대응 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

> (가) $f(1) < f(3)$, $f(2) < f(4)$
> (나) 함수 f의 역함수 f^{-1}에 대하여
> $|f(1) - f(5)| \ge f^{-1}(1)$이다.

역색....

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{11}{60}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{13}{60}$

$f^{-1}(1) = 1$ ~ 1 → 1, 2 2, 3 3, 4 4, 5 5

$\underbrace{4}_{f(5)} \times \underbrace{3}_{f(3)} \times \underbrace{1}_{f(2),\, f(4)\ 자동!!}$

$= 2$ ~ 1 1, 2 → 1, 3 3, 4 4, 5 5

$(f(1),\ f(5))$	$f(5)\ f(3)$
$(2,\ 4\text{-}5)$	$\to 2 \times 2 = 4$
$(3,\ 5)$	$\to 1 \times \underset{f(3)}{1} = 1$
$(4,\ 2)$	$\to \underset{f(5)}{1} \times \underset{f(2)}{1} = 1$
$(5,\ x)$	

$= 3$ ~ $f(3) = 1$, $f(1)$ 불가!

$= 4$ ~ $f(4) = 1$, $f(2)$ 불가!

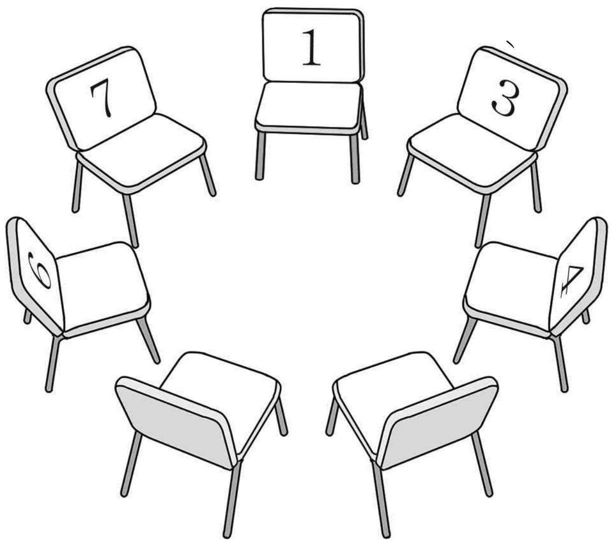
$= 5$ ~ $|f(1) - f(5)| \ge 5$ 불가!

$$\frac{18}{5!} = \frac{3}{20}$$

단답형

29. 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 7개의 의자가 있다. 이 7개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

> (가) 6이 적힌 의자와 이웃한 2개의 의자에 적힌 두 수의 합은 9이다.
> (나) 7이 적힌 의자와 이웃하지 않은 4개의 의자에 적힌 네 수의 곱은 12의 배수이다.



6고정! , 9=2+7 or 4+5

6

2 ↔ 7 $\quad 2\times 2\times 3! = 24$

0 ... 0 → 1, 5만 가능

6

4 ↔ 5 $\quad 2\times$

7 위치에 따라

7이 위치하면, 4와5는 이웃하거나 가능 → $3\times 3! = 18$

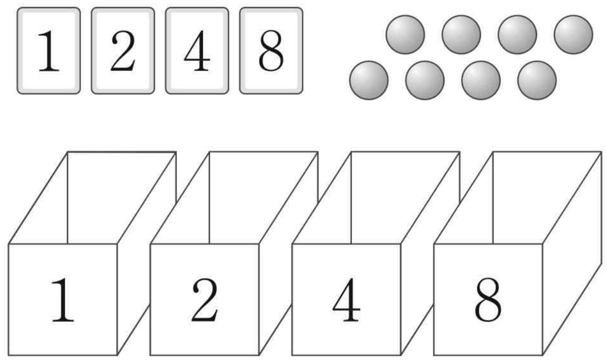
7이 위치하면, 2의 위치 제한 → $2\times 2 = 4$

$24+44=68$

$\boxed{68}$

30. 8개의 공과 숫자 1, 2, 4, 8이 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 있다. 숫자 1, 2, 4, 8이 하나씩 적혀 있는 4개의 빈 상자에 8개의 공과 4장의 카드를 남김없이 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공이나 카드를 넣지 않는 상자가 있을 수 있다.) [4점]

> (가) 1이 적힌 상자에 들어 있는 카드의 개수는 1이고 8이 적힌 상자에 들어 있는 카드의 개수는 2 이상이다. ①
> (나) $n\,(n=2,\ 4,\ 8)$이 적힌 상자에는 n의 배수가 적힌 카드가 들어 있거나 공이 n개 이상 들어 있다. ②



카드 배치→ 반드시 한 박스에는 카드 X

→공으로 채워 주어야 한다.

① 또는 ②로 (나) 조건 해결시, 가장 어려운 것은 8 box

②로 채우려면 8개 필요

→ 나은 카드 없는 박스에 넣을 공 X ...

∴ 즉, 8 box는 카드 8 (①)로 우선 해결!

1 box는 어차피 카드나 있어도 ①로 해결

	1	2	4	8 (8 고정)	
카드	1	0	0	3	$3\times {}_4H_2 = 30$
	1	0	1 (4배수 0)	2	$2\times {}_4H_6 = 168$
	1	0	1 (4배수X)	2	$2\times 2\times {}_4H_2 = 40$
	1	1 (2배수 0)	0	2	$2\times 2\times {}_4H_4 = 140$
	1	1 (2배수X)	0	2	$2\times {}_4H_2 = 20$

$\boxed{398}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

5지선다형

23. 함수 $f(x)=4\ln x$에 대하여 $f''(2)$의 값은? [2점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$f' = \frac{4}{x}$

$f'' = -\frac{4}{x^2}$

$f''(2) = -1$

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$이 수렴할 때,

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 3^{n+1}}{a_n + 3^{n-1}}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

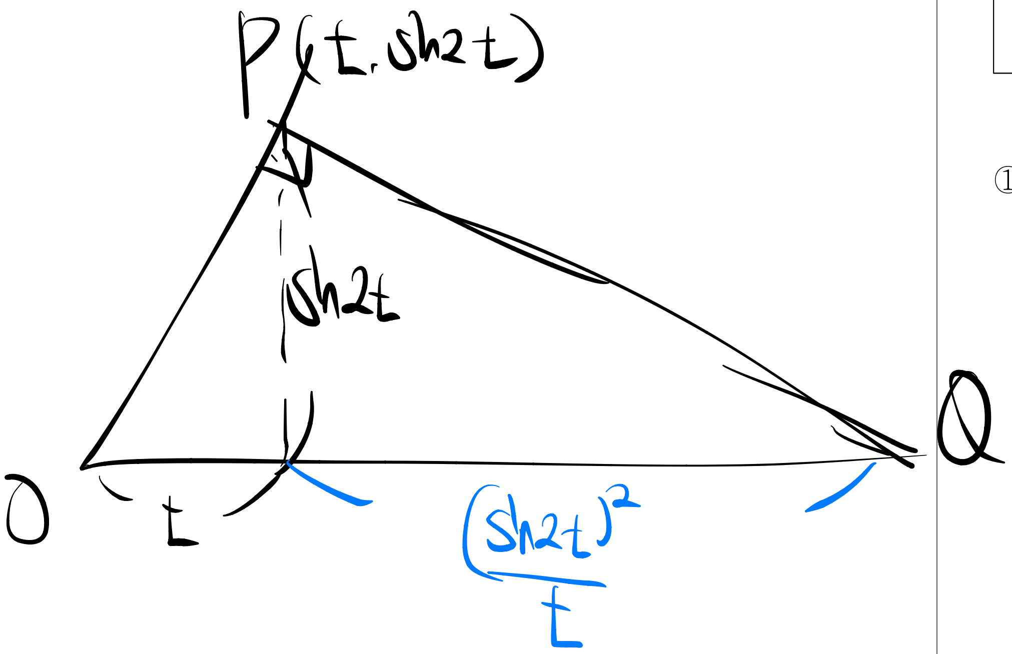
$n\to\infty$: $\frac{a_n}{3^n} \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boxed{\frac{a_n}{3^n}} + 3}{\boxed{\frac{a_n}{3^n}} + \frac{1}{3}} = 9$$

0 ← 0 ←

25. 실수 $t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 곡선 $y=\sin 2x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin 2t)$를 지나고 직선 OP에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6



$$\lim_{t\to 0^+} 1+\frac{\sin^2 t}{t^2}=\boxed{5}$$

26. 다항함수 $f(x)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$a_n=f(n)$

이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{a_2}{a_1}$의 값은? [3점]

(가) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n}-2n\right)=2$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{a_n+1}$의 값은 자연수이다.

① $\frac{11}{6}$ ② 2 ③ $\frac{13}{6}$ ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

$a_n = 4n^2 + pn + q$

$a_n + 1$이 완전제곱식!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{pn+q}{\sqrt{4n^2+pn+q}+2n}=2,\quad p=8$$

$q=3,\quad a_n=4n^2+8n+3$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{35}{15}=\frac{7}{3}$$

27. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = 2e^{t} - 3e^{-t}, \quad y = 2e^{t} + 6e^{-t}$$

을 C라 하자. 상수 k에 대하여 t에 대한 방정식 $2e^{t} + 6e^{-t} = k$는 서로 다른 두 실근 t_1, t_2를 갖는다. 곡선 C에서 $t = t_1$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $-\frac{1}{5}$이고, $t = t_2$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은 m이다. $k+m$의 값은? [3점]

① $\frac{75}{11}$ ② $\frac{79}{11}$ ③ $\frac{83}{11}$ ④ $\frac{87}{11}$ ⑤ $\frac{91}{11}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{t} - 6e^{-t}}{2e^{t} + 3e^{-t}}$$

$$\frac{2e^{t_1} - 6e^{-t_1}}{2e^{t_1} + 3e^{-t_1}} = -\frac{1}{5}$$

$$12e^{t_1} = 27e^{-t_1}, \quad e^{t_1} = \frac{3}{2}$$

$$k = 3 + 4 = 7, \quad 2e^{2t} - 7e^{t} + 6 = 0$$

$$e^{t_2} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4-3}{4+\frac{3}{2}} = \frac{2}{11} = m$$

$$7 + \frac{2}{11} = \frac{79}{11}$$

28. 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$(b_n - a_n)(b_n - |a_n|) = 0$$

이다.

(나) $\sum_{n=k}^{\infty}(a_{2n+1} + b_{2n+1}) = 0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 2이다.

$b_1 - b_3 = 3a_3 + 5$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값은? [4점]

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

$a_n > 0 \to b_n = a_n$

$a_n < 0 \to b_n = \pm a_n$

$k = 1$과 2의 차이?

$a_3 + b_3$이 더해짐 → $a_3 + b_3 \neq 0$ ~ $a_3 = b_3$

이유로는 $a_{2n+1} + b_{2n+1}$이 항상 0!!

$n \geq 2$ ~ $b_{2n+1} = -a_{2n+1}$

~ $a_{홀수} < 0$

$b_1 = 4a_3 + 5$

$4a_3 - 4a_3$

(X) → $a_3 = -\frac{5}{8}$

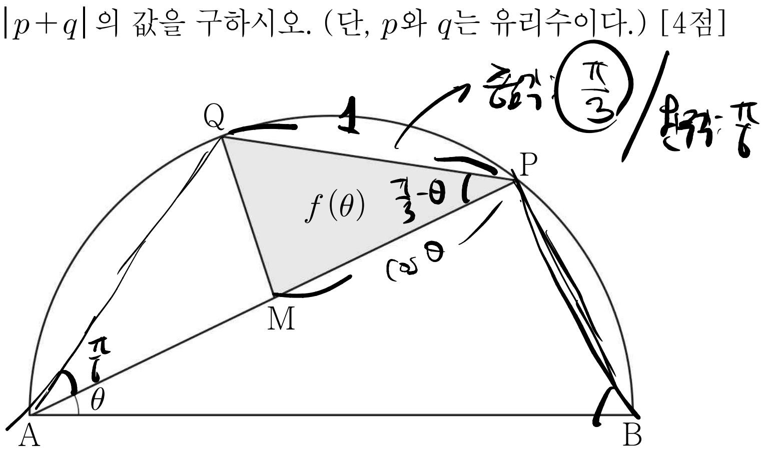
$b_n = \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \frac{5}{32} \cdots$

$$\frac{5}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{5}{8} \times 2 = \boxed{\frac{15}{4}}$$

$x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 점 P를 $\angle BAP = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{3}\right)$가 되도록 잡고, 호 AP 위에 점 Q를 $\overline{PQ} = 1$이 되도록 잡는다. 선분 AP의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 PQM의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\overline{AP} = \frac{6}{5}$이 되도록 하는 θ의 값을 a라 할 때, $f'(a) = p + q\sqrt{3}$이다. $100 \times |p+q|$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



$\overline{PQ} = 1$, $\overline{MP} = \cos\theta$: $\angle APQ$ 필요!!

원주각 of $\overline{PQ} = \frac{\pi}{6}$ ⇝ $\angle PAQ = \frac{\pi}{6}$

$\angle ABP = \frac{\pi}{2} - \theta \rightarrow \angle AQP = \frac{\pi}{2} + \theta$

$\rightarrow \angle MPQ = \frac{\pi}{3} - \theta$

$f(\theta) = \frac{1}{2}\cos\theta \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$

$\overline{AP} = \frac{6}{5} \rightarrow \cos\theta = \frac{3}{5}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$,

미.

$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}$

$f' = \frac{1}{2}\left(-\sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) - \cos\theta \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\right)$

$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{-12\sqrt{3} + 16}{50} + \frac{-9 - 12\sqrt{3}}{50}\right)$

$= \frac{7 - 24\sqrt{3}}{100}$

⇝ $\boxed{17}$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 갖는다. 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)h(x) = x\ln(1 + 3|g(x)|)$$

이고 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $g(k) = 0$인 상수 k에 대하여
> 함수 $h(x) - |g(x)|$는 $x = k$에서 미분가능하다.
> (나) $4g'(f(1)) = 3f(1) - 4$

$x = k$ 미.분

$h(x)$는 $x = k$ 연속.

→ $h(x)$는 $x = k$ 미.분.

⊕ $h(x)$의 우미계 − 좌미계

= $|g(x)|$의 우미계 − 좌미계

$g(x) = 0$ ⇝ $0 = 0$

$g(x) \neq 0$ ⇝ $h(x) = x \times \frac{\ln(1 + 3|g(x)|)}{g(x)}$

$\lim_{x \to k} h(x) = \lim_{x \to k} \boxed{x} \times \underbrace{\frac{\ln(1 + 3|g(x)|)}{|g(x)|}}_{\to 3} \times \underbrace{\frac{|g(x)|}{g(x)}}_{\to \pm 1}$

0이 되어야!! → $k = 0$

⇒ $h(x)$의 (우미계) − (좌미계) $= \frac{2}{f'(0)}$

$\lim_{a \to 0+} \frac{h(a) - h(0)}{a} - \frac{h(0) - h(-a)}{a}$, $h(0) = 0$

$= \lim_{a \to 0+} \underbrace{\frac{\ln(1 + 3g(a))}{g(a)}}_{\to 3} - \underbrace{\frac{\ln(1 - 3g(-a))}{g(-a)}}_{\to -3} = \frac{2}{f'(0)}$, $f'(0) = \frac{1}{3}$

$f = x^3 + px^2 + \frac{1}{3}x$,

(나) → $\frac{4}{f'(1)} = 3f(1) - 4$, → $\frac{4}{\frac{10}{3} + 2p} = 3p$

$p = \frac{1}{3}$ or -2

역함수 X

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

$f(3) = 27 + 3 + 1 = 31$

$\boxed{31}$