97.

수학 영역

69m

5지선다형

1. $2^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{32}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

$2^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}$

2. 곡선 $y=x^3+2x-1$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

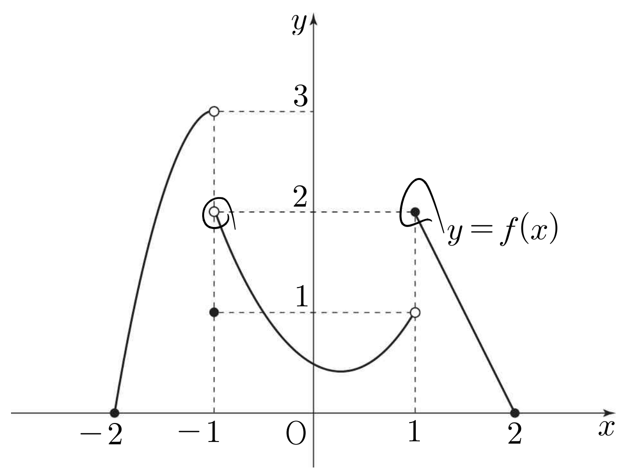
$3x^2+2$

3. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{d}{dx}f(x)=3x^2-5$이고 $f(0)=1$일 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$f(x)=x^3-5x+1$.

4. 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 원점을 지나는 곡선 $y=2^{x-a}+b$의 점근선이 직선 $y=-4$일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① -6　② -4　③ -2　④ 0　⑤ 2

$b=-4$　$a=-2.$

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin bx+1$의 주기가 3π이고 최댓값과 최솟값의 차가 6일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{3}$　② 4　③ $\frac{13}{3}$　④ $\frac{14}{3}$　⑤ 5

$\frac{2}{b}\pi=3\pi$　$b=\frac{2}{3}$

$a=3.$

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_a^x f(t)dt=x^2-3ax+2$$

를 만족시킨다. $f(0)>0$일 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

$-2a^2+2=0$

$f(x)=2x-3a.$　$a=-1$

$f(2)=4+3$

8. 첫째항이 음수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 \times a_5 = 36, \quad a_3 + 2a_4 = 2$$

를 만족시킬 때, a_2의 값은? [3점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

$a_3 = -6$ $a_4 = 4$

$r = -\frac{2}{3}$

9. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = (x^2 + x)f(x)$$

라 하자. $\lim_{h \to 0} \frac{g(1+h) - 4}{h} = 9$일 때, $f(1) \times f'(1)$의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{9}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 9

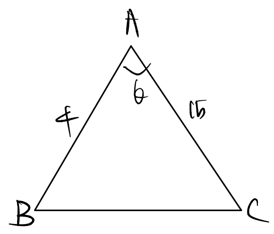
$f(1) = 2$ $3 \times 2 + 2f'(1) = 9$

$f'(1) = \frac{3}{2}$

10. 각 A가 예각인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는? [4점]

(가) $\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\overline{\mathrm{AC}} = 15$
(나) 삼각형 ABC의 넓이는 24이다.

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{65}{8}$ ③ $\frac{35}{4}$ ④ $\frac{75}{8}$ ⑤ 10



$\sin\theta = \frac{4}{5}$
$\cos\theta = \frac{3}{5}$

$BC^2 = 225 + 16 - 72 = 169$

$BC = 13$

$2r = \frac{13 \times 5}{4}$

11. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 값의 합은? [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1}=\begin{cases}-2a_n & (a_n<0)\\ a_n-3 & (a_n\ge 0)\end{cases}$$
>
> 이다.
>
> (나) $a_3=a_1+4$

① $-\frac{2}{3}$　② -1　③ $-\frac{4}{3}$　④ $-\frac{5}{3}$　⑤ -2

a_1　a_2　a_3

k　$-2k$　$-2k-3$　①

$k-3$　$-2k+6$　②

$k-6$　③

① $k=-\frac{7}{3}$ (o)

② $k=\frac{2}{3}$ (o)

③ (x)

12. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-11t+8$$ $(3t-8)(t-1)$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

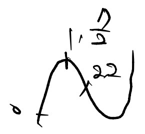
> 〈 보 기 〉
>
> ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 운동 방향이 바뀐다.
>
> ㄴ. 점 P의 가속도가 1이 되는 순간 점 P의 위치는 2이다.
>
> ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 6이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$a(t)=6t-11$　$x(t)=t^3-\frac{11}{2}t^2+8t$

ㄴ. $t=2$　$x(2)=8-22+16=2$ (T)

ㄷ.



$\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=5$ (F)

13. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(28)$의 값은? [4점]

(가) $0 \le x \le 12$인 모든 실수 x에 대하여

$$(\sqrt{2x+1}-1) \times f(x) = ax$$

이다. (단, a는 상수이다.)

(나) 모든 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$에서 x의 값이 k에서 $k+12$까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{1}{2}$이다.

① 16　② 18　③ 20　④ 22　⑤ 24

$f(x) = \frac{ax(\sqrt{2x+1}+1)}{2x} = \frac{a}{2}(\sqrt{2x+1}+1)$

$f(0) = a$

$f(k+12) = f(k)+6$

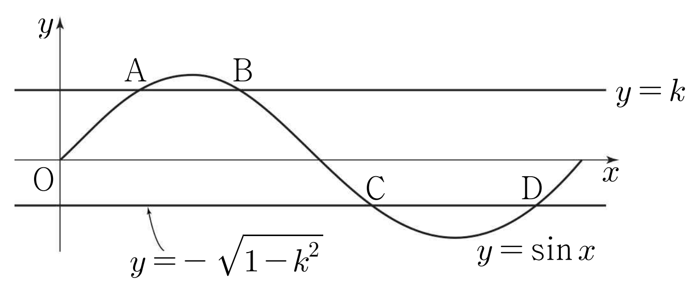
$f(12) = f(0)+6$

$3a = a+6$　　$a=3$

$f(16) = f(4)+6$ ---- $f(16)=12$

$f(28) = f(16)+6$ ---- $f(28)=18$

14. 그림과 같이 곡선 $y=\sin x\,(0 \le x \le 2\pi)$가 직선 $y=k$와 만나는 두 점을 A, B라 하고, 직선 $y=-\sqrt{1-k^2}$과 만나는 두 점을 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{AB}}=\frac{2}{9}\pi$일 때, 선분 AB의 길이는? (단, k는 $0<k<1$인 상수이다.) [4점]



① $\frac{13}{36}\pi$　② $\frac{3}{8}\pi$　③ $\frac{7}{18}\pi$　④ $\frac{29}{72}\pi$　⑤ $\frac{5}{12}\pi$

$k=\sin\alpha$　$-\sqrt{1-k^2} = -\cos\alpha$　$(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$

$A(\alpha, k)$　$B(\pi-\alpha, k)$

$C(\frac{3}{2}\pi-\alpha, \ )$　$D(\frac{3}{2}\pi+\alpha, \ )$

$\overline{CD} = 2\alpha$　$\overline{AB} = \pi-2\alpha$

$4\alpha = \frac{11}{9}\pi$

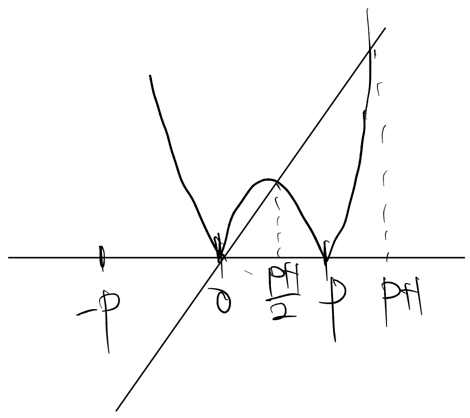
$AB = \frac{7}{18}\pi$

15. $p>1$인 상수 p에 대하여 함수 $f(x)=x^2-px$가 있다.
실수 $t(t>-p)$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와
직선 $y=x+t$가 만나는 점의 x좌표 중 가장 작은 값을 $\alpha(t)$,
가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자.
열린구간 $(-p,\infty)$에서 정의된 함수

$$g(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\{|f(x)|-(x+t)\}dx$$

의 최댓값이 $\frac{1}{2}$일 때, p의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4



t=0에서 최대.

$\int_0^p -f(x)-x + \int_p^{p+1} f(x)-x = \frac{1}{2}$

$p^3-3p^2-3p-4=0$

$p=4$

단답형

16. 반지름의 길이가 8이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{4}\pi$인 부채꼴의 넓이는 $a\pi$이다. a의 값을 구하시오. [3점]

$\frac{3}{2}$ $8\times3=a$

24

17. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{7}a_{2k}=\sum_{k=1}^{7}(k^2-a_{2k-1})$일 때, $\sum_{k=1}^{14}a_k$의 값을 구하시오. [3점]

1 4 9 16 25 36 49

50+40+50

140

18. 방정식

$x>6$

$$\log_2(x-4)=\log_{\frac{1}{2}}(x-6)+3$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x^2-10x+24=8$

$x^2-10x+16$

8

19. x에 대한 방정식 $x^3-3ax^2+40a^2=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 1일 때, 양수 a의 값을 구하시오. [3점]

$3x^2-6ax$ $\quad$ $0,\ 2a.$

$8a^3-12a^3+40a^2=0.$

10

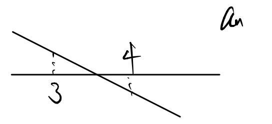
20. 첫째항이 8인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}-2a_n & (a_n\le 0)\\ a_n & (a_n>0)\end{cases}$$

이다.

(나) $b_3+b_5=2b_4+6,\quad b_4+b_6=2b_5$



$-4 \quad -4$

$2 \quad 8$

b_3	b_4	b_5	b_6
a_3	$-2a_4$	$-2a_5$	$-2a_6$
$8+2d$	$-16-6d$	$-16-8d.$	

$-8-6d=-26-12d.$

$6d=-18 \quad d=-3$

$\sum_{1}^{10} b_k = 8+5+2+2+8+14+20+26+32+38.$

$15+140$

155

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 양수 p와 실수 $k(k\neq 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<p) \\ kf(x-p) & (x\geq p) \end{cases}$$

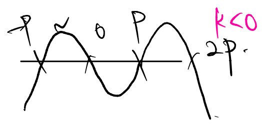
가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) x에 대한 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합이 $2p$이다.

함수 $g(x)$의 극값 중 가장 큰 값이 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $f(0)=f(p)=0$

$f'(p)=kf'(0)$



(나) $f(-p)=0$

$f(x)=x^3-p^2x$

$f'(x)=3x^2-p^2$ $\quad \pm\frac{p}{\sqrt{3}}$

$k=-2$

$\frac{4p^3}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{2}$ $\quad p=\frac{3}{2}$

$f(4)=64-9$ $\quad$ Ans 55

22. 다음 조건을 만족시키는 곡선 $y=2^{x+1}+k$ 위의 서로 다른 두 점 A, B와 곡선 $y=\log_2(x-k)+1$ 위의 점 C가 존재하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 S라 하자.

> (가) 직선 AB의 기울기는 1이다.
> (나) 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $2\sqrt{2}$인 정삼각형이다.

$2^{-S+\frac{2}{3}}$의 값을 구하시오. [4점]

$\cdot\, B(a+2, \underbrace{2^{a+3}+k}_{b+2})$

$\cdot\, A(a, \underbrace{2^{a+1}+k}_{b})$ $\quad \cdot\, C(\underbrace{2^{a+1}+k}_{b}, a+2)$ (∵ 함수의 대칭관계)

$2^a=\frac{1}{3}$ $\quad a=-\log_2 3$ $\quad b=\frac{2}{3}+k$

$(b-a)^2+(b-a-2)^2=8$

let $b-a=t$

$t^2-2t-2=0$ $\quad t=1\pm\sqrt{3}$

$b-a=\frac{2}{3}+\log_2 3+k=1\pm\sqrt{3}$

$k=-\log_2 3+\frac{1}{3}\pm\sqrt{3}$

$S=-2\log_2 3+\frac{2}{3}$

Ans 9

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. 함수 $f(x)=4\ln x$에 대하여 $f''(2)$의 값은? [2점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$f''(x) = -\frac{4}{x^2}$

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$이 수렴할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3^{n+1}}{a_n+3^{n-1}}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$\lim \frac{a_n}{3^n} = 0$.

25. 실수 $t\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 곡선 $y = \sin 2x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, \sin 2t)$를 지나고 직선 OP에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 4　② $\frac{9}{2}$　③ 5　④ $\frac{11}{2}$　⑤ 6

OP: $\frac{\sin 2t}{t} x$.

$PQ = -\frac{t}{\sin 2t}x + \frac{t^2}{\sin 2t} + \sin 2t$.

$Q\left(t + \frac{\sin^2 2t}{t}, 0\right)$　$1+4$

26. 다항함수 $f(x)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$$a_n = f(n)$$

이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{a_2}{a_1}$의 값은? [3점]

(가) $\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{a_n} - 2n\right) = 2$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{a_n + 1}$의 값은 자연수이다.

① $\frac{11}{6}$　② 2　③ $\frac{13}{6}$　④ $\frac{7}{3}$　⑤ $\frac{5}{2}$

$a_n = (2n+2)^2 - 1$

$a_1 = 15$　$a_2 = 35$.　$\frac{7}{3}$.

27. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = 2e^t - 3e^{-t}, \quad y = 2e^t + 6e^{-t}$$

을 C라 하자. 상수 k에 대하여 t에 대한 방정식 $2e^t + 6e^{-t} = k$는 서로 다른 두 실근 t_1, t_2를 갖는다. 곡선 C에서 $t = t_1$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $-\frac{1}{5}$이고, $t = t_2$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은 m이다. $k+m$의 값은? [3점]

① $\frac{75}{11}$ ② $\frac{79}{11}$ ③ $\frac{83}{11}$ ④ $\frac{87}{11}$ ⑤ $\frac{91}{11}$

$dx = 2e^t + 3e^{-t}$ $dy = 2e^t - 6e^{-t}$

$-10p^2 + 30 = 2p^2 + 3.$ $12p^2 = 27.$ $p = \frac{3}{2}$

$t_1 = \ln\frac{3}{2}$ $k = 3+4 = 7$

$2p^2 - 7p + 6.$

$(2p-3)(p-2)$ $t_2 = \ln 2.$

$m = \frac{4-3}{4+\frac{3}{2}} = \frac{2}{11}$

28. 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$(b_n - a_n)(b_n - |a_n|) = 0$$
> 이다.
>
> (나) $\sum_{n=k}^{\infty}(a_{2n+1} + b_{2n+1}) = 0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 2이다.

$b_1 - b_3 = 3a_3 + 5$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값은? [4점]

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

$a_1 < 0$ $b_3 = a_3$ $b_{2n+1} = |a_{2n+1}|$ $(n \geq 2)$.

$b_1 - 5 = a_1 \rightarrow b_1 = |a_1|$

$-2a_1 = 5$ $a_1 = -\frac{5}{2}$

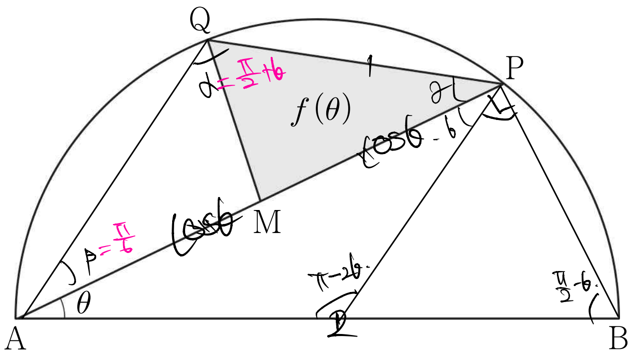
b_1 b_2 b_3 b_4 b_5

$\frac{5}{2}$ $\frac{5}{4}$ $-\frac{5}{8}$ $\frac{5}{16}$ $\frac{5}{32}$ $\cdots$

$5 - \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 점 P를 $\angle \mathrm{BAP}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$가 되도록 잡고, 호 AP 위에 점 Q를 $\overline{\mathrm{PQ}}=1$이 되도록 잡는다. 선분 AP의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 PQM의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\overline{\mathrm{AP}}=\frac{6}{5}$이 되도록 하는 θ의 값을 a라 할 때, $f'(a)=p+q\sqrt{3}$이다. $100\times|p+q|$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



$\sin\alpha = \cos\theta$. $\alpha = \frac{\pi}{2}+\theta$
$\cos\alpha = -\sin\theta$.

$\sin\beta : \cos\theta = 1 : 2\cos\theta$.

$\sin\beta = \frac{1}{2}$ $\beta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \partial = \frac{\pi}{3} - \theta$.

$f(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) \times \frac{\cos\theta}{2}$, $\cos a = \frac{3}{5}$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)\frac{\cos\theta}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 - \frac{cs}{4}$

$f'(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}cs + \frac{s^2}{4} - \frac{c^2}{4}$

$f'(a) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{12}{25} + \frac{16}{100} - \frac{9}{100}$

$-\frac{24\sqrt{3}}{100} + \frac{7}{100}$

$p+q = -\frac{17}{100}$ Ans 17

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 갖는다. 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)h(x)=x\ln(1+3|g(x)|)$$

이고 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $g(k)=0$인 상수 k에 대하여 함수 $h(x)-|g(x)|$는 $x=k$에서 미분가능하다. (나) $4g'(f(1))=3f(1)-4$

$g(0)=0$ or $h(0)=0$.

(가) $h(x)$ 가 [illegible] $k=0$ [illegible].

$\therefore g(0)=0$.

$h'(x) = \frac{g(x)\left(\ln|1+3|g(x)|| + \frac{3x\,|g(x)|'}{1+3|g(x)|}\right) - g'(x)\,x\left(\ln|1+3|g(x)||\right)}{(g(x))^2}$

$\lim_{x\to0^-} h'(x) = -3 + 2g(x)'$, $\lim_{x\to0^+} h'(x) = 3 - 2g(x)'$

$-3 + g'(0) = 3 - g'(0)$

$g'(0) = 3$ $f'(0) = \frac{1}{3}$

$\therefore f(x) = x^3 + ax^2 + \frac{1}{3}x$. $3a^2+2a+\frac{1}{3}$

$\frac{4}{f'(1)} = 3f(1) - 4 \Rightarrow \frac{4}{2a+\frac{10}{3}} = 3a$

$6a^2 + 10a - 4 = 0$.
$(3a-1)(a+2)$.

$a = \frac{1}{3}$ (∵ 역함수 존재)

$f(3) = 27+3+1 = 31$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.