13 26년 5월 모의고사

INstruction

평균변화율의 식이 준주기성을 나타내는 표현임을 파악했다면 어렵지 않다.
$f(x+a)=f(x)+b$ 와 같은 준주기성 표현은 자주 등장했으므로 처리하는 방법을 꼭 기억해두자.

정답: ②

해설

주어진 조건 (가)로부터

$$f(x)=\begin{cases} f(0) & (x=0) \\ \dfrac{ax}{\sqrt{2x+1}-1} & (0<x\le 12) \end{cases}$$

이고, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속 $\rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$

$\rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{ax}{\sqrt{2x+1}-1}$

으로부터

$f(0)=a$

이다.

또한, 주어진 조건 (나)로부터 모든 실수 k 에 대해

$\dfrac{f(k+12)-f(k)}{(k+12)-k}=\dfrac{1}{2} \rightarrow f(k+12)=f(k)+6$

이고, $k=0$ 을 대입하면

$f(12)=f(0)+6 \rightarrow 3a=a+6$

$\rightarrow a=3$

이므로

$$\begin{aligned} f(28)&=f(16)+6 \\ &=f(4)+12 \\ &=6+12 \\ &=18 \end{aligned}$$

이다.

CheckpoINt

$$\lim_{x\to 0+}\frac{ax}{\sqrt{2x+1}-1}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{ax(\sqrt{2x+1}+1)}{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{ax(\sqrt{2x+1}+1)}{2x}=a$$

$$f(12)=\frac{12a}{\sqrt{2\times 12+1}-1}=3a$$

$$f(4)=\frac{4a}{\sqrt{2\times 4+1}-1}=2a=6$$

IN'sight

같이 볼 문항: 27 지인선 n제 시즌1 수2 19번

함수의 연속성을 사용한다는 것은 '극한값=함숫값'을 사용하는 것이다.
정확한 논리에 기반하여 풀었는지 되짚어보자.

15 26년 5월 모의고사

INstruction

$\alpha(t)$, $\beta(t)$ 의 변화 양상을 관찰해보면, $\beta(t)$ 는 연속적으로 변화하는 반면 $\alpha(t)$ 는 $t=0$ 일 때 불연속적으로 변한다. $t=0$ 을 제외한 부분에서는 $g(t)$ 의 증감은 변하지 않으므로, 최댓값이 될 수 있는 후보군이 하나($t=0$)뿐임을 알아낼 수 있어야 한다.

정답: ⑤

해설

$t>-p$ 에서 t 의 값을 키워가며 함수 $g(t)$ 를 관찰해보자.

1) $-p<t<0$ 인 경우

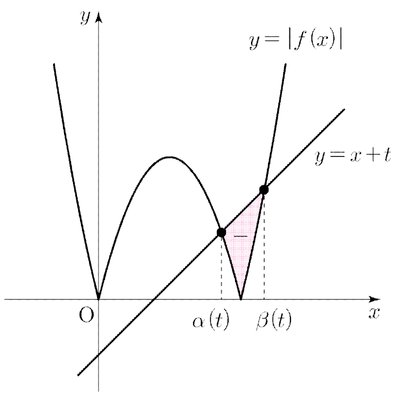
함수 $y=|f(x)|$ 와 $y=x+t$ 의 교점이 오직 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 의 2개이므로

$$g(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\{|f(x)|-(x+t)\}dx<0$$

이고,

t 의 값이 증가함에 따라 $g(t)$ 의 값은 감소함

을 알 수 있다.



2) $t\geq 0$ 인 경우

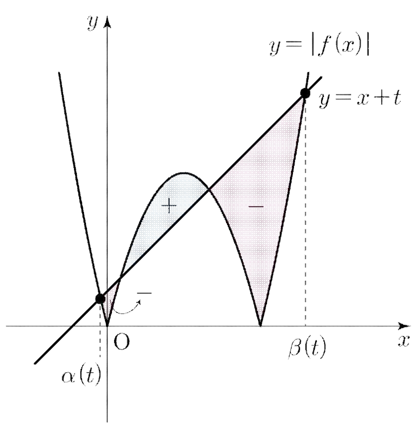
함수 $y=|f(x)|$ 와 $y=x+t$ 의 교점으로부터

$\alpha(t)\leq 0$, $\beta(t)\geq p$

이고

t 의 값이 증가함에 따로 $g(t)$ 의 값은 감소함

을 알 수 있다.



CheckpoINt

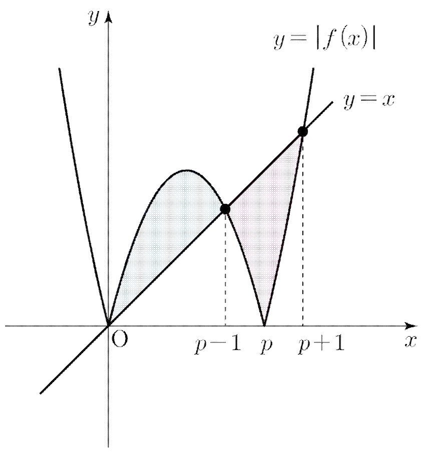
$g(t)=-$(색칠된 부분의 넓이)인데, $-p<t<0$ 에서 t 의 값이 증가하면 색칠된 부분의 넓이도 증가하므로, $g(t)$ 의 값은 감소한다.

$g(t)=-$(분홍색으로 색칠된 부분의 넓이) +(파란색으로 색칠된 부분의 넓이) 인데, $t\geq 0$ 에서 t 의 값이 증가하면 분홍색으로 색칠된 부분의 넓이는 증가하고, 파란색으로 색칠된 부분의 넓이는 감소하다 0 이 되므로, $g(t)$ 의 값은 계속해서 감소한다.

따라서 함수 $g(t)$는

$t=0$에서 최댓값 $\frac{1}{2}$

을 가진다.



이때, $t=0$일 때

$\alpha(t)=0$, $\beta(t)=p+1$

이므로

$$g(0)=\int_0^{p+1}(|f(x)|-x)dx$$
$$=\int_0^p(-f(x)-x)dx+\int_p^{p+1}(f(x)-x)dx$$
$$=\left(\frac{1}{6}p^3-\frac{1}{2}p^2\right)+\left(-\frac{1}{2}p-\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

로부터 $p>1$인 p의 값은

$p=4$

이다.

CheckpoINt

$$\int_0^p(-f(x)-x)dx$$
$$=\int_0^p\{-x^2+(p-1)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{p-1}{2}x^2\right]_0^p=\frac{1}{6}p^3-\frac{1}{2}p^2$$

이고,

$$\int_p^{p+1}(f(x)-x)dx$$
$$=\int_p^{p+1}\{x^2-(p+1)x\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{p+1}{2}x^2\right]_p^{p+1}=-\frac{1}{2}p-\frac{1}{6}$$

이다. 이때,

방정식 $\frac{1}{6}p^3-\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}p-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$을

변형해보면,

$\Leftrightarrow$ $p^3-3p^2-3p-4=0$

$\Leftrightarrow$ $(p-4)(p^2+p+1)=0$

이므로 $p=4$이다.

IN'sight

같이 볼 문항: 27 지인선 n제 시즌2 5회 21번

수식적 엄밀함보다는 그래프의 도움이 필수적인 문제이다. 정적분은 '부호를 가진 넓이'이므로, $g(t)$라는 함수에 넓이적 의미를 부여한 채로, t의 값을 변화시키며 관찰해나가는 논리는 꼭 배워가야 한다.

20 26년 5월 모의고사

INstruction

등차수열의 부호가 핵심이다. $\{a_n\}$ 의 부호가 같은 것끼리는 $\{b_n\}$ 도 등차수열을 이룸을 파악하며 풀이해보자.

정답: 155

해설

주어진 조건 (가)로부터 $a_p \le 0$ 을 만족하는 최소의 자연수 p 에 대해

$1 \le n \le p-1$ 에서 $a_n > 0 \rightarrow b_1$ 부터 b_{p-1} 까지는 등차수열을 이루고,

$n \ge p$ 에서 $a_n \le 0 \rightarrow n \ge p$ 일 때 b_n 은 등차수열을 이룸

을 알 수 있다.

이때, 주어진 조건 (나)로부터

b_3, b_4, b_5 는 등차수열을 이루지 않고,

b_4, b_5, b_6 은 등차수열을 이룸

을 알 수 있으므로,

$p=4$

임을 알 수 있다.

그러므로

$b_3 = a_3$, $b_4 = -2a_4$, $b_5 = -2a_5$

로부터 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$b_3 + b_5 = 2b_4 + 6 \rightarrow a_3 + (-2a_5) = -4a_4 + 6$$
$$\rightarrow 3a_1 + 6d = 6$$

이고, $a_1 = 8$ 이므로

$d = -3$

이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} b_k = \sum_{k=1}^{3} b_k + \sum_{k=4}^{10} b_k$$
$$= \sum_{k=1}^{3} a_k + \sum_{k=4}^{10} (-2a_k)$$
$$= 3a_2 - 2 \times 7a_7$$
$$= 155$$

CheckpoINt

만약 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 양수라면,
모든 자연수 n 에 대해 $a_n > 0$ 이므로
b_3, b_4, b_5 또한 등차수열을 이뤄 모순이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 은 n 의 값이 커짐에 따라
값이 양수에서 음수로 변한다.
이때 a_3, a_4, a_5 중 양수와 $a_n \le 0$ 인
것이 모두 존재하므로
a_4, a_5, a_6 은 모두 $a_n \le 0$ 이어야 하고,
따라서 $a_3 > 0$ 이다.

$a_2 = 5$, $a_7 = -10$

IN'sight

같이 볼 문항: 27 지인선 n제 시즌2 4회 13번

등차중항으로 표현된 식이 성립한다는 것을 통해 부호를 결정할 수 있었다. 등차수열을 결정하는데에는 2가지 조건이 필요한데, $\{a_n\}$ 의 첫째항 조건을 포함하여 등식이 3개 등장하므로, 어느 하나는 값 자체보다는 케이스를 결정하는 조건임을 예상가능하다.

21 26년 5월 모의고사

INstruction

확정된 실근(0 , p , $2p$)부터 찾아놓고 접근한다면 헷갈릴 일이 적을 것이다.

정답: 55

해설

STEP 1 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근 파악하기

조건 (가)로부터 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$g(x)$ 는 $x=p$ 에서 연속 $\to f(p)=kf(0)$

$\to f(p)=0$

이다.

이로부터 방정식 $g(x)=0$ 은

$x<p$ 에서 실근 $x=0$

$x\geq p$ 에서 실근 $x=p$, $x=2p$

를 가지는데, 만약 이 실근들이 방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 모든 실근이라면

(방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 모든 실근의 합) $=3p$

이므로 조건 (나)에 모순이다.

따라서

방정식 $g(x)=0$ 은 음의 실근을 최소 1 개 가져야하므로, 이 실근을 $x=\alpha$ 라 하면

방정식 $g(x)=0$ 은

$x<p$ 에서 실근 $x=\alpha$, $x=0$

$x\geq p$ 에서 실근 $x=p$, $x=2p$

를 가지고, 조건 (나)에 의해

(방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 모든 실근의 합) $=\alpha+3p$

$=2p$

이므로

$\alpha=-p$

이다.

따라서

$f(x)=(x+p)x(x-p)$

이다.

STEP 2 k 와 p 의 값 구하기

조건 (가)로부터 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$g(x) \text{ 는 } x=k \text{ 에서 미분가능} \Leftrightarrow \lim_{x\to p-}\frac{g(x)-g(p)}{x-p}=\lim_{x\to p+}\frac{g(x)-g(p)}{x-p}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to p-}\frac{f(x)}{x-p}=\lim_{x\to p+}\frac{kf(x-p)}{x-p}$$

$$\Leftrightarrow 2p^2=-kp^2$$

으로부터

$k=-2$

CheckpoINt

$\because\ f(0)=0$

조건 (나)에 의해 $g(x)=0$ 의 서로 다른 모든 실근의 합이 $2p$ 이므로, 방정식 $g(x)=0$ 이 음의 실근을 최소 1 개 가져야 한다.

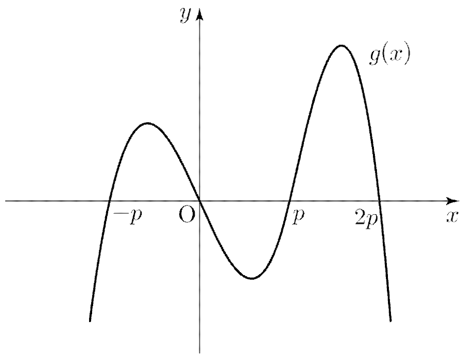
p 가 양수이므로 $g(x)=0$ 의 음의 실근은 $x<p$ 에서 발생한다. 이때, $f(x)=0$ 의 서로 다른 세 실근은 α , 0 , p 이므로 $f(x)=0$ 은 실근을 추가적으로 가질 수 없고, α 가 음수이므로 $x\geq p$ 에서 $kf(x-p)=0$ 의 실근은 $x=p$, $2p$ 뿐이다.

$$\lim_{x\to p-}\frac{f(x)}{x-p}=\lim_{x\to p-}\frac{(x+p)x(x-p)}{x-p}=2p^2$$

$$\lim_{x\to p+}\frac{kf(x-p)}{x-p}=\lim_{x\to p+}\frac{kx(x-p)(x-2p)}{x-p}$$

$$=-kp^2$$

이다.



또한 함수 $g(x)$의 극값 중 가장 큰 값은

$$g\left(\frac{p}{\sqrt{3}}+p\right)=\frac{4}{3\sqrt{3}}p^3$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

이므로

$$p=\frac{3}{2}$$

이다.

$\therefore\ f(x)=\left(x+\frac{3}{2}\right)x\left(x-\frac{3}{2}\right)\ \rightarrow\ f(4)=55$

CheckpoINt

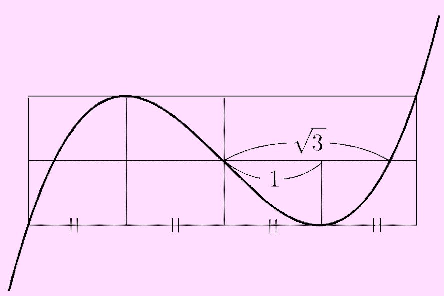
함수 $f(x)$는 $x=\pm\frac{p}{\sqrt{3}}$에서 극값을 가지므로, (삼차함수 비율관계)
함수 $g(x)$는
$x=-\frac{p}{\sqrt{3}}$와 $x=\frac{p}{\sqrt{3}}+p$에서 극댓값을 가지고, $x=\frac{p}{\sqrt{3}}$에서 극솟값을 가진다.

삼차함수 $f(x)$가 $(0,0)$에 대해 점대칭이므로 $\left|g\left(\frac{p}{\sqrt{3}}\right)\right|=\left|g\left(-\frac{p}{\sqrt{3}}\right)\right|$이고, $|k|>1$이므로 $g(x)$의 극값 중 가장 큰 값은 $g\left(\frac{p}{\sqrt{3}}+p\right)$이다.

IN'sight

같이 볼 문항: 27 지인선 n제 시즌2 7회 21번

삼차함수 비율관계



22 26년 5월 모의고사

INstruction

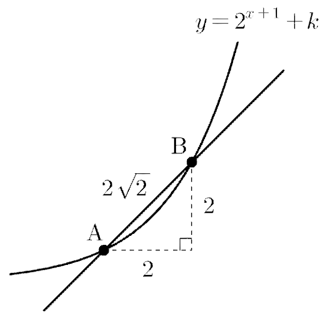
지수 로그 곡선 문제는 '점과 점 사이의 관계'를 찾는 것이 핵심이다.
첫 번째 풀이는 선분 AB의 중점이 $y=2^x+k+1$ 위의 점이므로 주어진 로그 곡선과 $y=x+1$ 대칭임을 사용하는 풀이이고,
두 번째 풀이는 좀 더 수식적인 센스를 발휘하는 풀이이다.

CheckpoINt

정답: 9

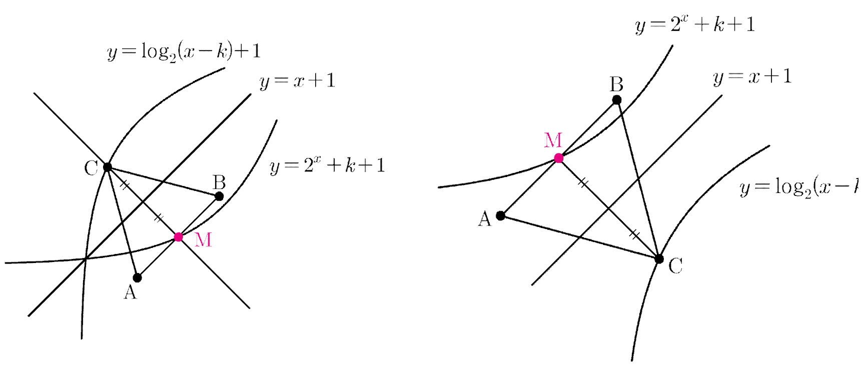
해설1: 대칭성으로 푸는 풀이

조건 (가), (나)에 의해
직선 AB의 기울기가 1이고, 선분 AB의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로
(점 A와 B의 x좌표 차이)=(점 A와 B의 y좌표 차이)=2
로부터
$\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(a+2, b+2)$
라 하면, 두 점 A와 B는 모두 곡선 $y=2^{x+1}+k$ 위의 점이므로
$b=2^{a+1}+k$, $b+2=2^{a+3}+k$
에서
$a=-\log_2 3$, $b=\frac{2}{3}+k \rightarrow \mathrm{A}\left(-\log_2 3, \frac{2}{3}+k\right)$, $\mathrm{B}\left(\log_2\frac{4}{3}, \frac{8}{3}+k\right)$
이다.



이때, 선분 AB의 중점을 점 M이라고 하면
점 M은 점 A를 x축의 방향으로 +1만큼, y축의 방향으로 +1만큼 평행이동한 점
$\rightarrow \mathrm{M}\left(\log_2\frac{2}{3}, \frac{5}{3}+k\right)$
이고, 점 A는 곡선 $y=2^{x+1}+k$ 위의 점이므로
점 M은 곡선 $y=2^x+k+1$ 위의 점
이며,
$y=2^x+k+1$ 과 $y=\log_2(x-k)+1$ 은 $y=x+1$ 에 대해 대칭
이다.

점 C는 $y=\log_2(x-k)+1$ 위의 점이다.



이때,
선분 CM의 기울기가 −1이고, 선분 CM의 길이가 $\sqrt{6}$ 이므로
점 C는 점 M을

선분 AB의 기울기가 1이므로
선분 CM의 기울기는 −1이고,
선분 AB의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로
정삼각형 ABC에서
선분 CM의 길이는 $\sqrt{6}$ 이다.

x축의 방향으로 $+\sqrt{3}$ 만큼, y축의 방향으로 $-\sqrt{3}$ 만큼 평행이동한 점이거나,

x축의 방향으로 $-\sqrt{3}$ 만큼, y축의 방향으로 $+\sqrt{3}$ 만큼 평행이동한 점

이고, 선분 CM의 중점은 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로

점 M을 x축의 방향으로 $+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 만큼, y축의 방향으로 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 만큼 평행이동한 점

혹은

점 M을 x축의 방향으로 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 만큼, y축의 방향으로 $+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 만큼 평행이동한 점

이 직선 $y=x+1$ 위에 있어야 한다.

그러므로

$$\left(\log_2\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{3}+k-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ 또는 } \left(\log_2\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{3}+k+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

이 $y=x+1$ 위에 있으므로

$$k=\log_2\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\sqrt{3} \text{ 또는 } k=\log_2\frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\sqrt{3}$$

으로부터

$$S=2\log_2\frac{2}{3}-\frac{4}{3}$$

이다.

$\therefore\ 2^{-S+\frac{2}{3}}=9$

해설2: 수식으로 푸는 풀이

조건 (가), (나)에 의해

직선 AB의 기울기가 1이고, 선분 AB의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

(점 A와 B의 x좌표 차이)=(점 A와 B의 y좌표 차이)=2

로부터

$$\mathrm{A}(a, b)\ ,\ \mathrm{B}(a+2, b+2)$$

라 하면, 두 점 A와 B는 모두 곡선 $y=2^{x+1}+k$ 위의 점이므로

$$b=2^{a+1}+k\ ,\ b+2=2^{a+3}+k$$

에서

$$a=-\log_2 3\ ,\ b=\frac{2}{3}+k \rightarrow \mathrm{A}\left(-\log_2 3, \frac{2}{3}+k\right)\ ,\ \mathrm{B}\left(\log_2\frac{4}{3}, \frac{8}{3}+k\right)$$

이다.

이때, 선분 AB의 중점을 점 M이라고 하면

$$\mathrm{M}\left(\log_2\frac{2}{3}, \frac{5}{3}+k\right)$$

이고, 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

(선분 CM의 기울기)$=-1$

로부터

$$\mathrm{C}\left(\log_2\frac{2}{3}+p, \frac{5}{3}+k-p\right)$$

라 하면

$$p=\pm\sqrt{3}$$

이다.

이때, 점 C는 곡선 $y=\log_2(x-k)+1$ 위의 점이므로

선분 AB의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로
정삼각형 ABC에서
선분 CM의 길이는 $\sqrt{6}$ 이므로
$p=\pm\sqrt{3}$ 이다.

$$\frac{5}{3}+k-p=\log_2\left(\log_2\frac{2}{3}+p-k\right)+1$$

이다.

$t=\log_2\frac{2}{3}+p-k$라고 치환하면 위 식은

$$\frac{2}{3}+\left(\log_2\frac{2}{3}-t\right)=\log_2 t \iff t+\log_2 t=\frac{2}{3}+\log_2\frac{2}{3}$$

인데, $y=x$ 와 $y=\log_2 x$ 는 모두 증가함수이므로 위 방정식의 실근은

$$t=\frac{2}{3}$$

뿐이다.

따라서 $t=\log_2\frac{2}{3}+p-k$로부터

$$k=\log_2\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+p$$

이고, $p=\pm\sqrt{3}$ 이므로

$$k=\log_2\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\sqrt{3} \quad \text{또는} \quad k=\log_2\frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\sqrt{3}$$

으로부터

$$S=2\log_2\frac{2}{3}-\frac{4}{3}$$

이다.

$\therefore\ 2^{-S+\frac{2}{3}}=9$

IN'sight

같이 볼 문항: 27 지인선 n제 시즌2 1회 22번

2026학년도 6월 모의평가처럼, 특정한 점(선분 AB의 중점)이 어느 곡선 위에 있는지를 활용하는 논리가 대단히 중요했다. 기울기가 -1인 직선은 $y=x+C$ 형태의 직선을 기준으로한 선대칭성을 의심할 수 있는 강력한 증거이다.