2020학년도 수능 (가형) 30번

양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오.

곡선 $y=t^3\ln(x-t)$는 위로 볼록이고 $y=2e^{x-a}$는 아래로 볼록이므로 두 곡선이 오직 한 점에서 만나기 위해선 두 곡선이 접해야 한다. 접하는 점의 x좌표를 s라 하자.
$x=s$에서 서로 만나기 때문에 함수값 또한 같다.

$$t^3\ln(s-t)=2e^{s-a} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

을 얻을 수 있다. 두 곡선이 $x=s$에서 접하기 때문에 $x=s$에서 두 곡선의 미분계수 또한 같아야 한다.

$$\frac{t^3}{s-t}=2e^{s-a} \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

개념)

독립관계 vs 종속관계

축자적 의미로 단어를 파악해보면 독립관계란 서로 영향을 주지 않는 상태이고, 종속관계란 어떤 것이 다른 것에 의존하거나 영향을 받는 상태를 말한다.
그렇다면 수학에서 “서로 영향을 준다”는 것은 무엇을 의미할까?

예를 들어

$$x^2+y^2=1$$

이라는 관계식이 있다고 하자.
이때 x의 값을 $\frac{1}{2}$로 정하는 순간, y의 값은 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$으로 결정된다.
즉, 한 변수의 값을 정하면 다른 변수의 값이 함께(유한개로) 결정되는 관계를 종속관계라고 한다.

x값과 y값이 정해진다고 해도 1(상수)는 영향을 받지 않는다. 혹여나 문제에서

어떤 자연수 n에 대하여~

$$x^2+y^2=n$$

라고 나왔을 때, n의 값은 뭐든 될 수 있다.(위 조건 한에서) 여기서 n에 특정한 값을 넣는다고 해도 x값과 y값은 여전히 무한하다.
즉, 한 변수의 값을 정했을 때 다른 변수의 값이 여전히 무한개로 결정이 되지 않는 관계를 독립관계라고 한다.

왜 종속관계와 독립관계를 파악하는 것일까?
미분을 할 때 관계가 다르면 미분한 결과도 다르게 나오기 때문이다.

$$x^2+y^2=n$$

의 식을 x에 관해 미분하면

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

을 쉽게 알 수 있다.
즉, 종속관계는 서로 영향을 주고 받는 관계이기 때문에 미분을 할 때도 $\frac{dy}{dx}$을 써서 표현을 한 것이다. 하지만 독립관계는 서로 영향을 주고 받지 않기 때문에 상수취급을 해도 무관하

다.
2020학년도 수능 가형 30번에서 변수 사이의 관계를 파악해보자.

우선 변수는 총 5개가 나온다.

x, y, t, s, a

문제에서 $a=f(t)$라 했으므로 a와 t는 당연히 서로 종속관계인 것을 알 수 있다.

만약 t값이 정해지는 순간 바로 s값 또한 단 한 개(유한개)로 결정되기 때문에
t, s, a는 서로 종속관계이다.

이때, x의 값에 무엇을 넣든 t, s, a의 값에 전혀 영향을 주지 않으므로 x는 독립관계인 것을 알 수 있다. x의 값을 결정하면 y의 값 또한 단 한 개(유한개)로 결정되므로 x와 y는 종속관계이다.

즉, 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$와 곡선 $y=2e^{x-a}$의 미분계수를 구하기 위해 x에 관해 미분하면 각각 $y'=\dfrac{t^3}{x-t}$, $y=2e^{x-a}$이다.

하지만 ①식을 t에 관해 미분하면

$$3t^2\ln(s-t)+t^3\times\frac{1}{s-t}\left(\frac{ds}{dt}-1\right)=2e^{s-a}\left(\frac{ds}{dt}-\frac{da}{dt}\right)$$

이다.

이건 첫 번째 레슨 : 적당한 풀이

①식과 ②식의 우변이 동일하기 때문에

$$t^3\ln(s-t) = \frac{t^3}{s-t}\ ,\ (s-t)\ln(s-t) = 1 \quad (t\text{는 양수})$$

를 얻을 수 있다. ($\log$의 진수 조건 때문에 $(s-t)$는 항상 양수)

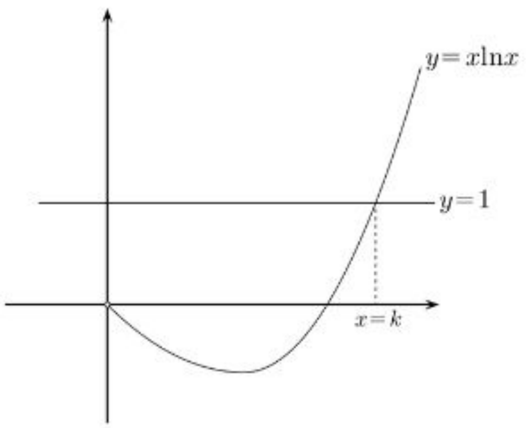
고1수학을 제대로 복습했다면 $(s-t)\ln(s-t)=1$ 의 식을 보고

$$x\ln x = 1$$

의 한 실근이 $s-t$인 것을 알 수 있다. 방정식은 항상 함수로 끌고가는 습관과 함께 $y=x\ln x$와 $y=1$을 좌표평면에 나타내면 두 그래프는 한 점에서 만난다. 그때의 실근은 상수로 정해져있기 때문에

$$s-t=k \quad (\text{단, } k\text{는 상수})$$

로 쓸 수 있다.



위에서 얻은 식과 ①식 혹은 ②식을 통해 관계식을 얻어내야 한다.
①식과 ②식 중 어느 식을 사용해야 할까?

①식을 미분하면 ln함수가 포함되어 있기 때문에 분수가 생겨 상당히 심란하다.
②식을 살펴보면 분수가 있지만 양 변에 ln을 취함으로 편하게 미분이 가능한 것을 알 수 있다.

②식 양변에 ln을 취하면

$$3\ln t - \ln(s-t) = \ln 2 + s - a \ , \ 3\ln t - \ln k = \ln 2 + t + k - f(t)$$

양 변을 미분하면

$$\frac{3}{t} = 1 - f(t) \ , \ f(t) = 1 - \frac{3}{t}$$

를 얻을 수 있다.

이건 두 번째 레슨 : 지수•로그 성질

$$t^3\ln(x-t)=2e^{x-a}$$

를 풀어야 하므로 좌변과 우변 중 한 개의 함수를 조금 쉽게 표현해보자.
우선 양 변을 t^3으로 나누면

$$\ln(x-t)=\frac{2}{t^3}e^{x-a}$$

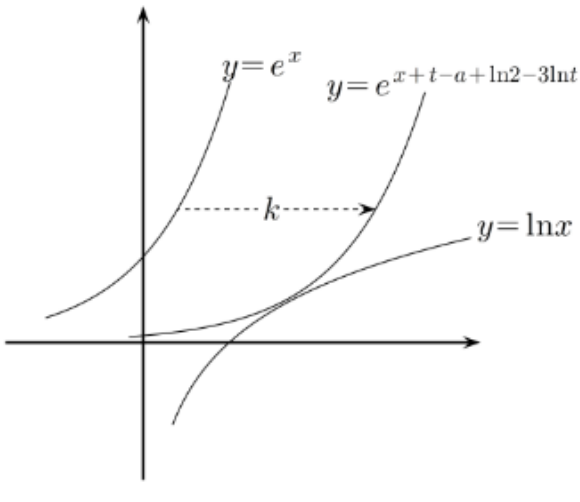
이고 x대신 $x+t$를 대입하면

$$\ln x=\frac{2}{t^3}e^{x+t-a}$$

를 얻을 수 있다. 여기서 수1과정이 잘 되어있는 학생이라면 $\frac{2}{t^3}=e^{\ln\frac{2}{t^3}}=e^{\ln2-3\ln t}$ 정도로 바꿔 표현하면

$$\ln x=e^{x+t-a+\ln2-3\ln t}$$

으로 바꿀 수 있다. 위 식을 좌표평면에서 생각해보면 $y=e^x$를 $y=\ln x$와 접할때까지 평행이동을 하는 것이다.



즉, 평행이동 값은 항상 상수로 일정하기 때문에

$$-t+a-\ln2+3\ln t=k \quad (\text{단, } k\text{는 상수})$$

양 변을 t에 관해 미분하면

$$-1+f'(t)+\frac{3}{t}=0$$

이므로 $f'(t)=1-\dfrac{3}{t}$ 임을 알 수 있다.

이건 세 번째 레슨 : 현우진 왈 “라이프니츠의 위엄”

실제로 유튜브에 “라이프니츠의 위엄”이라고 치면 현우진 영상이 가장 위에 뜨는데 그 영상을 참고하면 좋다.

①식의 양변을 t에 대해 미분하면

$$3t^2\ln(s-t)+t^3\times\frac{1}{s-t}\left(\frac{ds}{dt}-1\right)=2e^{s-a}\left(\frac{ds}{dt}-\frac{da}{dt}\right)$$

이므로 ①식과 ②식을 이용하여 정리하면

$$\frac{6}{t}e^{s-a}+2e^{s-a}\left(\frac{ds}{dt}-1\right)=2e^{s-a}\left(\frac{ds}{dt}-\frac{da}{dt}\right)$$

양 변을 $2e^{s-a}$로 나눠주면(단, $2e^{s-a}>0$)

$$\frac{3}{t}+\frac{ds}{dt}-1=\frac{ds}{dt}-\frac{da}{dt}$$

이므로 $\frac{da}{dt}=f'(t)=1-\frac{3}{t}$ 이다.