제 2 교시

수학 영역

홀수형

빠른 정답

9	⑤	3	13	②	3
10	③	4	14	④	4
11	①	4	20	8	4
12	②	4	21	27	4

27학년도 워너비 하프 모의고사 8회로 인사드립니다.
8회차는 전반적으로 살짝 쉽게 출제하였습니다.

수1에서는 수열을 제외한 파트는 함수와 좌표의 관계를 파악하는 문제들로 구성하였고, 수열은 등차수열과 귀납적 정의로 구성하였습니다. 등차중항을 이용하여 주어진 식을 단순화하는 작업이 필요한 12번, 최댓값이 확정된 상황에서 최솟값을 어떻게 활용할지 추론하는 21번으로 파트를 나누었습니다. 수2는 14번에서 함수의 연속을 딥하게 물었고, 20번은 구간별로 정의된 함수의 적분을 추론하는 형태로 살짝 까다롭게 출제했습니다.

여러분들을 응원합니다. 파이팅!

〈난이도〉

전체 난이도: 살짝 쉬움

★☆☆☆☆: 9번, 10번, 11번
★★☆☆☆: 12번, 13번, 20번, 21번
★★★☆☆: X
★★★★☆: 14번
★★★★★: X

< 해설 유형 >

[상세한 풀이]: 정석적으로 자세히 서술하여 해설에 비약이 최대한 적도록 하였습니다.

[실전 풀이]: '실전에서 이렇게 해야한다'의 느낌으로 서술하여 풀이에 비약이 있을 수 있습니다.

9. ★☆☆☆☆

〔상세한 풀이〕

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는

$$f'(x)=x^2+2ax-4$$

이다. $f'(1)=2a-3$이고, $f'(2)=4a$이므로, $4a(2a-3)<0$에서 $0<a<\frac{3}{2}$이고 정수 조건에 따라 a는 1이다. 따라서 $f(a+3)=f(4)=\frac{64}{3}+16a-16=\frac{64}{3}$임을 얻는다.

10. ★☆☆☆☆

〔상세한 풀이〕

함수 $y=a^{x-3}$과 함수 $y=a^{7-x}$가 만나는 점의 좌표는 $\mathrm{A}(5, a^2)$이다. 두 점 B, C에 대하여 삼각형 ABC가 넓이가 $4\sqrt{3}$인 정삼각형이려면, 선분 BC 길이가 4여야 한다. 따라서 점 B의 x좌표는 3임을 얻는다. 이로써 $\mathrm{B}(3, 1)$이고, 점 A와 점 B의 y좌표의 차는 $2\sqrt{3}$이므로 $a^2-1=2\sqrt{3}$임을 얻는다.

11. ★☆☆☆☆

〔상세한 풀이〕

$$G(x)-F(x)=\int xf(x)dx$$

이므로 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\int xf(x)dx}{x^3}=\dfrac{2}{3}$이다. 따라서 $xf(x)$는 최고차항의 차수가 2이다. 따라서 $f(x)=ax+b$이다.

$$\int xf(x)dx=\int(ax^2+bx)dx=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+c$$

에서 $\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{3}$이므로 $a=2$이다. 또한, $f(0)=1$이므로

$b=1$이다. 따라서 $G(x)-F(x)=\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+c$ 이다.

$G(2)-F(2)=\dfrac{16}{3}+2+c=2$에서 $c=-\dfrac{16}{3}$이다.

$F(0)=1$이므로

$$G(0)-F(0)=G(0)-1=-\frac{16}{3}\to G(0)=-\frac{13}{3}$$

이다. 따라서 함수 $G(x)$는

$$G(x)=\int(x+1)(2x+1)dx=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x-\frac{13}{3}$$

이고, $x=1$을 대입하여 $G(1)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{2}+1-\dfrac{13}{3}=-\dfrac{7}{6}$임을 얻는다.

12. ★★☆☆☆

〔상세한 풀이〕

등차중항의 성질을 이용하면 $\sum_{n=1}^{5}a_n=5a_3$이므로

$a_3\times\sum_{n=1}^{5}|a_n|=13$이다. 모든 항이 정수이므로 a_3과 $\sum_{n=1}^{5}|a_n|$도 정수이다. $a_3<\sum_{n=1}^{5}|a_n|$이고 $\sum_{n=1}^{5}|a_n|>0$이므로

$a_3=1$, $\sum_{n=1}^{5}|a_n|=13$임을 얻는다. $a_2+a_3\le0$이므로 공차가 2 이상인 자연수임을 확정지을 수 있다.

$$a_1=1-2d,\ a_2=1-d,\ a_3=1,\ a_4=1+d,\ a_5=1+2d$$

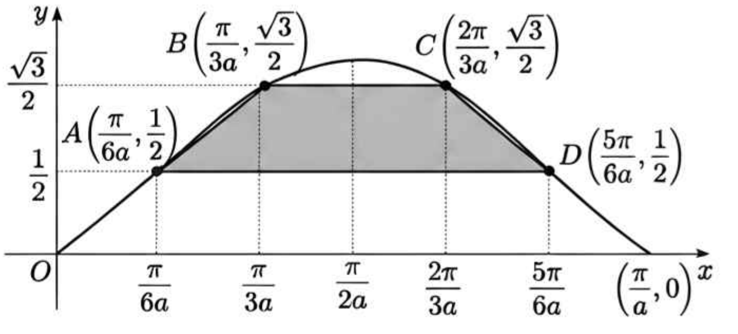
이므로 $\sum_{n=1}^{5}|a_n|=-a_1-a_2+a_3+a_4+a_5=1+6d=13$

에서 $d=2$이다. 따라서 $a_8=a_3+5d=1+5d=11$임을 얻는다.

13. ★★☆☆☆

〔실전 풀이〕

해당 문제를 만족시키는 상황은 다음과 같다.



넓이가 $\dfrac{7}{2}\pi$이므로 사각형 ABCD의 넓이를 좌표간의 관계를 이용하면 $\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\pi}{3a}+\dfrac{2\pi}{3a}\right)\times\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)=\dfrac{7}{2}\pi$이다. 이를 정리하면 $\dfrac{1}{a}\times(\sqrt{3}-1)=14$이므로 $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{14}$임을 얻는다.

14. ★★★★☆

〔실전 풀이〕

함수 $g(x)-f(2x)$는 $f(x)\ne0$일 때

$$g(x)-f(2x)=\frac{f(2x)\{f(x+1)-f(x)\}}{f(x)}$$

이다. 이를 함수 $h(x)$에 대입하면 $g(x)\ne f(2x)$일 때

$$h(x)=\frac{f(x)f(2x+1)}{f(2x)\{f(x+1)-f(x)\}}$$

이다. 함수 $f(x)$를 $f(x)=x^2+px+q$라 할 때,

$$f(x+1)-f(x)=2x+p+1$$

이다. 함수 $h(x)$가 연속이 되려면 분모가 0이 되는 x값에 대하여 분자도 반드시 0이어야 한다. $f(x+1)=f(x)$의 근은 $x=-\dfrac{p+1}{2}$로 필연적이므로, 방정식 $f(x)=0$의 해가 존재한다.

$f\left(-\dfrac{p+1}{2}\right)=0$인 경우나 $f(-p)=0$인 경우는 결국 똑같은 아웃풋이 나오므로 $f(-p)=0$인 경우로 풀겠다. 이때 $f(x)=x(x+p)$이다. 따라서 함수 $h(x)$는 $g(x)\ne f(2x)$일 때

$$h(x)=\frac{x(x+p)(2x+p+1)(2x+1)}{2x(2x+p)(2x+p+1)}$$

이다. 이 함수가 연속이 되도록 하는 p의 값은 1이고, 계산하면

$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)f(x+1)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(2x+1)(x+1)(x+2)}{x(x+1)}=4=a$

$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{f(x)f(2x+1)}{f(2x)\{f(x+1)-f(x)\}}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{x(x+1)(2x+1)(2x+2)}{4x(x+1)(2x+1)}=\frac{1}{4}=k$

임을 얻는다. $h(6)=\frac{7}{2}$이므로 $a+k+h(6)=\frac{31}{4}$임을 얻는다.

20. ★★☆☆☆

〔상세한 풀이〕

$x=a$를 경계로 적분 값의 부호가 바뀌는 것에 초점을 맞춰 a의 값을 구해야 한다.

$\int_{n-1}^{n} f(x)dx=a_n$이라 하면 $a_n=(-1)^n\times\frac{n}{6}$이고,

$\int_{n-1}^{n} (-f(x))dx=b_n$이라 하면 $b_n=(-1)^{n+1}\times\frac{n}{6}$이다.

즉 $\int_{0}^{11} g(x)dx=\sum_{k=1}^{a}a_n+\sum_{k=a+1}^{11}b_k$임을 얻는다.

(1) a가 짝수인 경우 ($a=2m$(m은 자연수))

$$\int_{0}^{11} g(x)dx=\sum_{n=1}^{2m}a_n+\sum_{n=2m+1}^{11}b_n=\frac{m}{6}-\frac{5-m}{6}=\frac{m+3}{3}$$

이므로 적분값이 0이 될 수 없다.

(2) a가 홀수인 경우 ($a=2m-1$(m은 자연수))

$$\int_{0}^{11} g(x)dx=\sum_{n=1}^{2m-1}a_n+\sum_{n=2m}^{11}b_n=-\frac{m}{6}+\frac{6-m}{6}=\frac{3-m}{3}$$

이므로 적분값이 0이 되도록 하는 m의 값은 3이다. 따라서 $a=5$임을 얻는다.

$$\int_{0}^{15} f(x)dx=\frac{7}{6}-\frac{15}{6}=-\frac{4}{3}$$

이므로 $-6\int_{0}^{15} f(x)dx=(-6)\times\left(-\frac{4}{3}\right)=8$임을 얻는다.

21. ★★☆☆☆

〔실전 풀이〕

첫째항이 최댓값이 되도록 하는 경우는 a_6에서 a_1로 갈 때 3씩 더하면 되므로 $a_6+15=16=a_1$이다. 따라서 첫째항의 최솟값은 9임을 얻는다. $a_{n+1}=ka_n$의 경우를 최대한 많이 채택해야 한다. $a_{n+1}=ka_n$의 테크를 타는 횟수를 m번이라 할 때,

$m=1$인 경우, $a_1=\frac{1}{k}+12\quad(13<a_1<15)$

$m=2$인 경우, $a_1=\frac{1}{k^2}+9\quad(10<a_1\le 12)$

$m=3$인 경우, $a_1=\frac{1}{k^3}+6\quad(7<a_1\le 9)$

$m=4$인 경우, $a_1=\frac{1}{k^4}+3\quad(4<a_1\le 6)$

$m=5$인 경우, $a_1=\frac{1}{k^5}\quad(1<a_1\le 3)$

이므로, $\frac{1}{k^3}+6=9$이다. $k=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$이므로 따라서 $\frac{1}{k^9}=27$임을 얻는다.