2027학년도
MATH ATELIER 모의평가 1회
- 정답과 해설 -

#정답

[공통]

1	3	16	3
2	4		
3	3	17	33
4	2		
5	5	18	21
6	1		
7	1	19	78
8	4		
9	2	20	6
10	2		
11	5	21	9
12	4		
13	1	22	11
14	5		
15	4		

[확률과 통계]

23	4	29	977
24	4		
25	4		
26	3	30	280
27	5		
28	1		

[미적분]

23	2	29	19
24	1		
25	3		
26	4	30	16
27	3		
28	2		

#난이도

[시험지 전체]

매우 어려움

[공통]

쉬움	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 16, 17, 18, 19
보통	10
어려움	11, 12, 13, 14, 20
매우 어려움	15, 21, 22

[확률과 통계]

쉬움	23, 24, 25, 26, 27
보통	-
어려움	28
매우 어려움	29, 30

[미적분]

쉬움	23, 24, 25, 26, 27
보통	-
어려움	-
매우 어려움	28, 29, 30

#예상 등급 구분 점수

[확률과 통계, 미적분]

1등급	80
2등급	70

예상 등급 구분 점수는 수능 표본 기준입니다.
(3월 전국연합학력평가 표본 아님)

#MATH ATELIER란?

‘수학을 다루는 작업장’이라는 의미를 갖고 있는 수학 콘텐츠 팀입니다. 다년간의 모의고사 출제 경험이 있는 팀으로, 출판 가능한 수준의 고품질 콘텐츠를 제작하고 있습니다.

저희 팀의 새로운 소식이 궁금하시면 인스타그램

@math_atelier

팔로우 부탁드립니다.

#1회 출제자

트루키

[출제 문항]

공통	1~22
확률과 통계	23~30
미적분	23~30

[소개]

서울시립대학교 수학과
(현) **MATH ATELIER** 소속
(현) 대형 학원 모의고사 출제진
(전) 메가스터디 QUBE 우수 마스터
(전) 시대인재학원 출제진 제의
(전) 강남대성학원 출제진 제의

[문의]

본 모의평가와 관련하여 문의 사항이 있을 경우 아래 주소로 이메일을 보내 주시기 바랍니다.

truekey14@naver.com

#1회 검토진

곽희윤(증류수) 님

다정북스 콘텐츠팀 Leader
(전) 서바이벌 모의고사 출제
(전) 이해원 모의고사, 이해원 N제 출제
(전) 강대모의고사 K 출제

짱구기여워 님

(현) 대형 학원 모의고사 출제진

y 님

#저작권 안내

#글꼴 안내

해설지의 모든 글꼴은 서울서체로 구성되어 있습니다.
서울서체는 출처 표시를 조건으로 누구나 자유롭게 이용할 수 있는 글꼴입니다.

#해설

[공통]

1. 지수법칙에 의하여

$2^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{3}} = 2^2 = 4$

2. $f'(x) = 4x^3 + 2$

$\Rightarrow f'(1) = 6$

3. $\sum_{n=1}^{9}(n^2 - 2n)$

$= \sum_{n=1}^{9} n^2 - 2\sum_{n=1}^{9} n = \dfrac{9\times 10\times 19}{6} - 2\times \dfrac{9\times 10}{2} = 195$

4. 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2-} f(x) = f(2) = \lim_{x\to 2+} f(x)$

$\Rightarrow 2 = 4 - a$

$\Rightarrow a = 2$

5. $\int_0^1 (x^2 + x)\,dx = \left[\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \dfrac{5}{6}$

6. 주어진 식을 정리하자.

$\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow -3\sin\theta = 4\cos\theta$

$\Rightarrow 9\sin^2\theta = 16\cos^2\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$에서 $|\sin\theta| = \dfrac{4}{5}$

$\pi < \theta < 2\pi$에서 $\sin\theta < 0$이므로 $\sin\theta = -\dfrac{4}{5}$

7. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - f(x)}{x^2} = 0$이므로

$x^3 - f(x)$는 일차 이하의 다항함수이다.

따라서 $f(x) = x^3 + ax + b$로 놓을 수 있다.

(단, a, b는 상수이다.)

$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2} = 10$에서 $f(2) = 0$, $f'(2) = 10$

$\Rightarrow 8 + 2a + b = 0$, $12 + a = 10$이므로

$\Rightarrow a = -2$, $b = -4$

따라서 $f(x) = x^3 - 2x - 4$

$\Rightarrow f(4) = 52$

8. $a_1 + a_3 + a_5 = 2a_4 + 2a_6 + 2a_8$이므로

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$\dfrac{a_1 + a_3 + a_5}{a_4 + a_6 + a_8} = \dfrac{1}{r^3} = 2$

$\Rightarrow r^3 = \dfrac{1}{2}$

한편, $a_2 \times r^9 = a_{11} = 1$

$\Rightarrow a_2 = 8$

9. k가 음수이거나 0이면 조건을 만족시키지 않으므로

$k > 0$이다. 한편,

$|f(x)| = k$

$\Leftrightarrow f(x) = -k$ 또는 $f(x) = k$

이므로

$f(x) = -k$ 또는 $f(x) = k$인 실수 x의 개수 … ㉠

가 4인 k의 값을 구하면 된다.

$k > 0$이므로

$f(x) = k$의 서로 다른 실근의 개수는 항상 2

이고,

$f(x) = -k$의 서로 다른 실근의 개수는 아래 표와 같다.

$0 < k < 4$인 경우	4
$k = 4$인 경우	2
$k > 4$인 경우	0

따라서 ㉠이 4이기 위해서는 $k = 4$

10. $f(x) = -x^2 + 20x$라 하면

$\log_a f(x)$의 값이 자연수

$\Leftrightarrow$ $f(x)$의 값이 a^n인 자연수 n이 존재 … ㉠

이다.

$f(x)$는 최댓값이 100인 이차함수이므로

㉠인 실수 x의 개수가 5

$\Rightarrow a^3 = 100$

$\Rightarrow a = 10^{\frac{2}{3}}$

11. 주어진 식을 정리하자.

$t^2-2t+1 \le \{v(t)\}^2 \le t^4-2t^2+1$

$\Rightarrow \ |t-1| \le |v(t)| \le |t^2-1| \ \cdots$ ㉠

이다. 한편,

점 P의 가속도가 항상 양수

$\Leftrightarrow \ v(t)$가 미분가능하고 $v'(t)>0$

$\Rightarrow \ v(t)$가 증가 $\cdots$ ㉡

이다.

㉠에 $t=1$을 대입하면 $v(1)=0$

㉠에 $t=0$을 대입하면 $|v(0)|=1$

㉡ $\Rightarrow \ v(0)<v(1)=0$

$\Rightarrow \ v(0)<0$

이므로 $v(0)=-1$

따라서 ㄱ은 거짓이다.

$v(1)=0$이고 ㉡이므로

$0 \le t < 1$일 때 $v(t)<0$

$t>1$일 때 $v(t)>0$

이다. $t=1$을 기준으로 $v(t)$의 부호가 음수에서 양수로 바뀌므로 점 P의 운동 방향은 시각 $t=1$일 때 바뀐다.

따라서 ㄴ은 참이다.

점 P의 위치를 $x(t)$라 하면 $x(0)=0$이고

$$x(2)=\int_0^2 v(t)dt$$

이다. $0 \le t \le 1$일 때 $v(t) \le 0$이므로

㉠ $\Rightarrow \ v(t) \le t-1 \ \ (0 \le t \le 1)$

$1 \le t \le 2$일 때 $v(t) \ge 0$이므로

㉠ $\Rightarrow \ v(t) \le t^2-1 \ \ (1 \le t \le 2)$

따라서

$$x(2) \le \int_0^1 (t-1)dt+\int_1^2 (t^2-1)dt=\frac{5}{6}$$

이다. 한편, $x(2)=\frac{5}{6}$이면

$$v(t)=\begin{cases} t-1 & (0 \le t \le 1) \\ t^2-1 & (1 \le t \le 2) \end{cases}$$

$\Rightarrow \ t=1$일 때 $v(t)$가 미분가능하지 않음

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

그렇다면 $x(2) \ne \frac{5}{6}$이므로 $x(2)<\frac{5}{6}$

따라서 ㄷ은 참이다.

ㄱ은 거짓, ㄴ, ㄷ은 참이므로

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은 ㄴ, ㄷ이다.

12. $\angle \mathrm{BAC}=\alpha$, $\angle \mathrm{BCA}=\beta$라 하자. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$이다.

삼각형 ABD의 외접원의 반지름이 $15\sqrt{2}$이므로

사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}=30\sqrt{2}\sin(\pi-\alpha)=30\sqrt{2}\sin\alpha \ \cdots$ ㉠

삼각형 CBD의 외접원의 반지름이 $20\sqrt{2}$이므로

사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}=40\sqrt{2}\sin\beta \ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$3\sin\alpha=4\sin\beta$

$\Rightarrow \ \overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:4$

삼각형 ABC는 $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{AC}}=3:4:5$

이다. 따라서 양수 t에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}=3t$, $\overline{\mathrm{BC}}=4t$, $\overline{\mathrm{AC}}=5t \ \cdots$ ㉢

로 놓을 수 있다. 한편,

$\overline{\mathrm{DA}}=3\overline{\mathrm{AC}}=15t$

$\Rightarrow \ \overline{\mathrm{DC}}=20t$

이다. ㉢에서 $\sin\beta=\frac{3}{5}$이므로

㉡ $\Rightarrow \ \overline{\mathrm{BD}}=24\sqrt{2}$

이다.

삼각형 BCD에서 $\overline{\mathrm{BC}}=4t$, $\overline{\mathrm{CD}}=20t$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$이므로

코사인법칙에 의하여

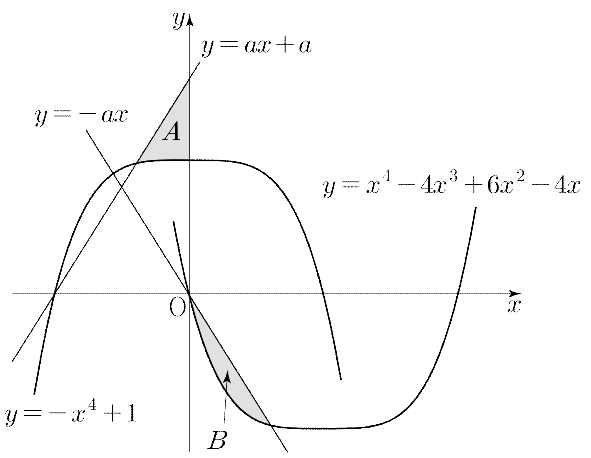
$$\overline{\mathrm{BD}}^2=(4t)^2+(20t)^2-2\times 4t\times 20t\times\frac{4}{5}$$

$\Rightarrow \ \overline{\mathrm{BD}}=12\sqrt{2}\,t=24\sqrt{2}$

이므로 $t=2$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{BC}}=8$, $\overline{\mathrm{AC}}=10$이므로 삼각형 ABC의 둘레는 24

13. 문제의 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



곡선 $y=-x^4+1$과 직선 $y=ax+a$가 만나는 점 중 $(-1,\,0)$이 아닌 점의 x좌표를 α라 하고,

곡선 $y=x^4-4x^3+6x^2-4x$와 직선 $y=-ax$가 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x좌표를 β라 하자.

α는 x에 대한 방정식

$ax+a=1-x^4 \quad (x \neq -1)$

$\Leftrightarrow a(x+1)=1-x^4 \quad (x \neq -1) \ \cdots$ ㉠

의 해이고 β는 x에 대한 방정식

$-ax=x^4-4x^3+6x^2-4x \quad (x \neq 0)$

$\Leftrightarrow ax=1-(x-1)^4 \quad (x \neq 0)$

의 해이다. $t=x-1$이라 하면

$ax=1-(x-1)^4 \quad (x \neq 0)$

$\Leftrightarrow a(t+1)=1-t^4 \quad (t \neq -1) \ \cdots$ ㉡

$1<a<4$이므로 두 방정식 ㉠, ㉡의 해는 오직 하나뿐이다. 따라서 $\beta=\alpha+1$

한편,

$$(A\text{의 넓이})=\int_{\alpha}^{0}(ax+a)-(1-x^4)dx$$

이고,

$$(B\text{의 넓이})=\int_{0}^{\beta}(-ax)-(x^4-4x^3+6x^2-4x)dx$$

$$=\int_{0}^{\beta}(-ax)-\{(x-1)^4-1\}dx$$

$$=\int_{-1}^{\alpha}\{-ax-a\}-(x^4-1)dx$$

이다. 따라서

$$\int_{\alpha}^{0}(ax+a)-(1-x^4)dx$$

$$=\int_{-1}^{\alpha}\{-ax-a\}-(x^4-1)dx$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0}(ax+a)-(1-x^4)dx=0$$

$$\Rightarrow a=\frac{8}{5}$$

14. $n \le 2m$인 모든 자연수 n에 대하여

$b_n=b_{2m+1-n}$이므로

$n=1$부터 $n=m$까지 차례로 대입하면

$b_1=b_{2m}$

$b_2=b_{2m-1}$

$\cdots$

$b_m=b_{m+1}$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2m}b_k=2\times\sum_{k=m+1}^{2m}b_k=\sqrt{2} \ \cdots$ ㉡

이다. 따라서 (가)에 알맞은 수는 2이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_{m+1}=0 \ \Rightarrow \ a_{m+2}=d$

이고, $a_n=d(n-m-1)$이다.

$m+1 \le n \le 2m$인 모든 자연수 n에 대하여

$b_n=\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{a_{m+2}}$이므로

$$\sum_{k=m+1}^{2m}b_k=\frac{\sqrt{a_{2m+1}}}{a_{m+2}}=\frac{\sqrt{md}}{a_{m+2}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\frac{m}{a_{m+2}}}=\sqrt{2} \quad (\because ㉡)$$

$$\Rightarrow a_{m+2}=2m$$

따라서 (나)에 알맞은 식은 $2m$이다.

$a_{15}=2m(14-m)$이므로

a_{15}의 값은 $m=7$일 때 최댓값 98을 갖는다.

따라서 (다)에 알맞은 수는 98이다.

$p=2$, $q=98$, $f(m)=2m$이므로 $f(p+q)=200$

15. $P(x)=|xf(x)|$라 하자. 조건 (가)에 의하여 $P(x)$는 다항함수이다.

$P(0)=0$, $P(x)\ge 0$

$\Rightarrow$ 함수 $P(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0을 가짐

$\Rightarrow$ $P'(0)=0$

이므로 $P(x)$는 x^2을 인수로 갖는다. … ㉠

조건 (나)에서 $a=0$일 때 조건을 만족시키므로

$$\lim_{x\to 0}|x^3|f\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

$\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^3}=\lim_{t\to-\infty}\frac{f(t)}{-t^3}=1$ … ㉡

따라서 충분히 큰 양수 t에 대하여 $f(t)>0$

$\Rightarrow$ $P(t)=|tf(t)|=tf(t)$ (단, t는 충분히 큰 양수)

$\Rightarrow$ $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{tf(t)}{t^4}=\lim_{t\to\infty}\frac{P(t)}{t^4}=1$

$\Rightarrow$ $P(x)$가 최고차항의 계수가 1인 사차함수

이다.

㉠에 의하여 $P(x)=x^2Q(x)$로 놓을 수 있다.
(단, $Q(x)$는 $Q(x)\ge 0$이고 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.)

한편, $f(1)<0$, 충분히 큰 t에 대하여 $f(t)>0$

$\Rightarrow$ $f(r)=0$, $r>1$인 실수 r이 존재

$\Rightarrow$ $Q(r)=0$

$\Rightarrow$ $Q(x)$가 $x=r$에서 극솟값 0을 가짐
($\because Q(x)\ge 0$)

$\Rightarrow$ $Q(x)=(x-r)^2$

$\Rightarrow$ $P(x)=x^2(x-r)^2$ $(r>1)$

$\Rightarrow$ $|xf(x)|=x^2(x-r)^2$

한편, $f(1)<0$이고,

㉡ $\Rightarrow$ 충분히 큰 양수 t에 대하여 $f(t)>0$

㉡ $\Rightarrow$ 충분히 작은 음수 t에 대하여 $f(t)>0$

이므로

$x<0$, $x>r$일 때 $f(x)>0$

$0<x<r$일 때 $f(x)<0$ … ㉢

이다.

한편, $a\ne 0$일 때

$\displaystyle\lim_{x\to a}|x^3|f\left(\frac{1}{x}\right)=|a^3|f\left(\frac{1}{a}\right)$이므로

$$|a^3|f\left(\frac{1}{a}\right)\ne 4a^2+1\ \ (a\ne 0)$$

$\Rightarrow$ $\displaystyle f\left(\frac{1}{a}\right)\ne\frac{4}{|a|}+\frac{1}{|a|^3}$ $(a\ne 0)$

$a=\dfrac{1}{u}$라 하면

$$f(u)\ne 4|u|+|u^3|=|u|(u^2+4)\ \ (u\ne 0)$$

우변은 양수이므로 $u<0$ 또는 $u>r$인 경우만 생각하면 된다. $u<0$ 또는 $u>r$일 때,

$f(u)=|u|(u-r)^2$

$\Rightarrow$ $|u|(u-r)^2\ne|u|(u^2+4)$

$\Rightarrow$ $(u-r)^2\ne(u^2+4)$

$\Rightarrow$ $u\ne\dfrac{r^2-4}{2r}$

따라서

$0\le\dfrac{r^2-4}{2r}\le r$

$\Rightarrow$ $0\le r^2-4\le 2r^2$ $(\because r>1)$

$\Rightarrow$ $r\ge 2$ $(\because r>1)$

한편,

㉢ $\Rightarrow$ $f(-1)=(r+1)^2$

이므로 $r\ge 2$일 때 $f(-1)=(r+1)^2\ge 9$

따라서 $f(-1)$의 최솟값은 9

16. $2^x=t$라 하면 $t>0$이고 주어진 방정식은

$t^2+t=72$

$\Rightarrow$ $(t-8)(t+9)=0$

$\Rightarrow$ $t=8$

$\Rightarrow$ $x=3$

17. $f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(-1)$, $f(2)$의 값 중 작은 값이다.

$f(-1)=-5+a$, $f(2)=-32+a$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-32+a=1$

$\Rightarrow$ $a=33$

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=a=33$

18. $a_1=3$이므로 $a_2=2a_1+3=9$

$a_3=2a_2+3=21$

19. $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=x^3+ax^2-16$에 $x=a$를 대입하면

$0=2a^3-16$ $\Rightarrow$ $a=2$

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=x^3+ax^2-16$의 양변을 미분하면

$f(x)=3x^2+2ax=3x^2+4x$ $\Rightarrow$ $f(3)=39$

따라서 $a\times f(3)=78$

20. $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$라 하자.

두 점 A, B는 $y = 2x+2$ 위의 점이므로

$y_n = 2x_n + 2 \ \ (n = 1, 2)$

$\Rightarrow \ x_n = \dfrac{y_n - 2}{2} \ \ (n=1, 2) \ \cdots$ ㉠

또 두 점 A, B는 $y = 2^{2x-1}$ 위의 점이므로

$y_n = 2^{2x_n - 1} \ \ (n = 1, 2)$

$\Rightarrow \ y_n = 2^{y_n - 3} \ \ (n=1, 2)$ ($\because$ ㉠) $\cdots$ ㉡

한편, 직선 AC와 직선 BD가 x축에 평행

$\Rightarrow$ 두 점 C, D의 y좌표는 각각 y_1, y_2

이다. $\mathrm{C}(x_3, y_1)$, $\mathrm{D}(x_4, y_2)$라 하자.

두 점 C, D는 직선 $y = \dfrac{x}{2} - 2$ 위의 점이므로

$y_n = \dfrac{x_{n+2}}{2} - 2 \ \ (n=1, 2)$

$\Rightarrow \ x_{n+2} = 2y_n + 4 \ \ (n=1, 2) \ \cdots$ ㉢

또 두 점 C, D는 곡선 $y = \log_2(x-a)+b$ 위의 점이므로

$y_n = \log_2(x_{n+2} - a) + b \ \ (n=1, 2)$

$\Rightarrow \ y_n = \log_2(2y_n + 4 - a) + b \ \ (n=1, 2)$ ($\because$ ㉢)

$\Rightarrow \ 2^{y_n - b} = 2y_n + 4 - a \ \ (n=1, 2)$

한편,

㉡ $\Rightarrow \ 2^{y_n - b} = 2^{3-b} y_n \ \ (n=1, 2)$

따라서

$2^{3-b} y_n = 2y_n + 4 - a \ \ (n=1, 2)$

$\Rightarrow \ (2^{3-b} - 2) y_n = 4 - a \ \ (n=1, 2)$

$\Rightarrow \ 2^{3-b} - 2 = 4 - a = 0 \ \ (\because y_1 \neq y_2)$

$\Rightarrow \ a = 4, \ b = 2$

$\Rightarrow \ a + b = 6$

21. $|x| > 1$일 때의 $f'(x)$를 살펴 보자.

$$f'(x) = \begin{cases} a(x+2)^2 + 1 & (x < -1) \\ a(x-2)^2 + 1 & (x > 1) \end{cases}$$

이고 $a > 0$이므로

$|x| > 1$일 때 $f'(x) \geq 1$

이고 등호는 $x = -2$, $x = 2$에서만 성립한다.

즉, $|x| > 1$인 점에서의 $y = f(x)$의 접선의 기울기는 항상 1 이상이다.

$|x| < 1$일 때의 $f'(x)$를 살펴 보자.

$f'(x) = -x^2 + x - b = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} - b$

이므로 $|x| < 1$에서 $f'(x)$의 최댓값은 $\dfrac{1}{4} - b$이다.

$|x| > 1$인 점에서의 $y = f(x)$의 접선의 기울기는 1 이상이므로 그와 수직인 접선의 기울기는 $-1 \leq f'(x) < 0$ 범위에 있어야 한다.

만약 $|x| < 1$에서 $f'(x)$의 최댓값이 -1보다 크면 서로 수직인 접선이 무수히 많이 생기므로 조건을 만족시키는 (p, q)의 순서쌍이 오직 하나일 수 없다.

$|x| < 1$에서 $f'(x)$의 최댓값이 -1보다 작으면 서로 수직인 접선이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $|x| < 1$에서 $f'(x)$의 최댓값이 -1

$\Rightarrow \ b = \dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow \ f'(x) = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - 1$

이므로 $|x| < 1$에서 기울기가 -1인 접선은 접점의 x좌표가 $\dfrac{1}{2}$일 때뿐이다.

따라서 서로 수직인 접선은 $x = \dfrac{1}{2}$에서 기울기가 -1인 접선과 $x = -2, 2$에서 기울기가 1인 접선의 조합으로만 가능하다.

이때, $x = -2$, $x = 2$에서의 두 접선이 서로 다른 직선이면 $x = \dfrac{1}{2}$에서의 접선과 만나는 점이 서로 다르므로 (p, q)가 두 개 존재하여 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $x = -2$, $x = 2$에서의 두 접선이 서로 같은 접선이어야 한다.

기울기가 1이고 접점의 x좌표가 t인 접선의 방정식은

$y = x + f(t) - t$

이므로 $x = -2$에서의 접선은 $y = x + f(-2) + 2$이고, $x = 2$에서의 접선은 $y = x + f(2) - 2$이다.

두 접선이 서로 같으므로

$f(2) - 2 = f(-2) + 2$

$\Rightarrow \ f(2) - f(-2) = 4$

$$\Rightarrow \ \int_{-2}^{-1} \{a(x+2)^2 + 1\} dx + \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + x - \frac{5}{4}\right) dx + \int_{1}^{2} \{a(x-2)^2 + 1\} dx = 4$$

$\Rightarrow \ a = \dfrac{31}{4}$

따라서 $a + b = \dfrac{31}{4} + \dfrac{5}{4} = 9$

22. $0 < a < \dfrac{1}{4}$이므로 t에 대한 방정식

$$t^2 - t + a = 0$$

은 $0 < t < 1$인 서로 다른 두 실근을 갖는다.
또, $0 < t < 1$일 때 x에 대한 방정식

$$\sin x = t \ \ (0 \le x \le 2\pi)$$

는 서로 다른 두 실근을 갖고, 두 실근의 합은 항상 π이다.

따라서 x에 대한 방정식

$$\sin x - \sin^2 x = a \ \ (0 \le x \le 2\pi) \ \cdots \ ㉠$$

의 서로 다른 모든 실근의 합은 2π이다.

$0 < a < \dfrac{1}{4}$이므로 t에 대한 방정식

$$t^2 - \frac{t}{2} - a = 0$$

은 $-1 < t < 1$인 서로 다른 두 실근을 갖고,
$-1 < t < 1$일 때 x에 대한 방정식

$$\cos x = t \ \ (0 \le x \le 2\pi)$$

는 서로 다른 두 실근을 갖고, 두 실근의 합은 항상 2π이다.

따라서 x에 대한 방정식

$$\cos^2 x - \frac{\cos x}{2} = a \ \ (0 \le x \le 2\pi) \ \cdots \ ㉡$$

의 서로 다른 모든 실근의 합은 4π이다.

만약 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x가 존재하지 않는다면 $S = 6\pi$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.
따라서

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 x가 존재

$\Rightarrow$ $\sin x - \sin^2 x = \cos^2 x - \dfrac{\cos x}{2} = a$인 실수 $x\,(0 \le x \le 2\pi)$가 존재

이다. 이때,

$$\sin x - \sin^2 x = \cos^2 x - \frac{\cos x}{2} \ \ (0 \le x \le 2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \ \cos x = 2 - 2\sin x \ \ (0 \le x \le 2\pi)$$

$$\Rightarrow \ \cos^2 x = 4(1 - \sin x)^2 \ \ (0 \le x \le 2\pi)$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$을 이용하면

$$\cos^2 x = 4(1 - \sin x)^2 \ \ (0 \le x \le 2\pi)$$

$$\Rightarrow \ (5\sin x - 3)(\sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \ \sin x = \frac{3}{5} \ \text{또는} \ \sin x = 1$$

이때, $\sin x = 1$이면 $\cos x = 0$이고
$a = 0$이므로 $0 < a < \dfrac{1}{4}$를 만족시키지 않는다.

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 x에 대하여 $\sin x = \dfrac{3}{5}$, $\cos x = \dfrac{4}{5}$이다.

따라서 $a = \dfrac{6}{25}$

이때, $\sin x = \dfrac{3}{5}$, $\cos x = \dfrac{4}{5}$, $0 \le x \le 2\pi$인 실수 x는 오직 하나만 존재한다. 그 값을 α라 하면 $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

따라서 $S = 6\pi - \alpha$

$$\Rightarrow \ 5\pi < S < 6\pi$$

$$\Rightarrow \ n = 5$$

이므로 $n + 25a = 11$

[확률과 통계]

23. 구하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

24. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

따라서 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

또, $\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\ \mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\ \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{3}\mathrm{P}(B)$

$\Rightarrow\ \mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{10}$

$\Rightarrow\ \mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{5}$

25. a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3^4=81$

이때 a가 포함되지 않는 경우의 수는 $2^4=16$

따라서 구하는 경우의 수는 $81-16=65$

26. 모집단의 표준편차가 8, 표본의 크기가 64이므로

표본평균의 표준편차는 $\dfrac{8}{\sqrt{64}}=1$

따라서 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\le m\le\overline{x}+1.96$

$\Rightarrow\ \overline{x}-1.96=23.04$

$\Rightarrow\ \overline{x}=25$

따라서 $a=\overline{x}+1.96=26.96$

27. 주어진 확률질량함수에 $x=1$, $x=2$, $x=3$을 대입하면

$\mathrm{P}(X=1)=a(1+b)$,

$\mathrm{P}(X=2)=a(2+b)$,

$\mathrm{P}(X=3)=a(3+b)$

확률의 총합은 1이므로

$a(6+3b)=1$

$\Rightarrow\ a=\dfrac{1}{6+3b}$

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{13}{6}$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{3}k\mathrm{P}(X=k)=a(14+6b)=\frac{13}{6}$

$\Rightarrow\ b=2$

$\Rightarrow\ a=\dfrac{1}{12}$

따라서 $a+b=\dfrac{25}{12}$

28. $a+b+c$가 짝수인 경우의 수를 구하자.

1부터 9까지의 자연수 중 홀수는 5개, 짝수는 4개이다.

$a+b+c$가 짝수가 되기 위해서는

a, b, c가 모두 짝수이거나 a, b, c 중 두 개가 홀수이고 나머지 하나가 짝수여야 하므로

$a+b+c$가 짝수인 경우의 수는 $4^3+{}_3\mathrm{C}_2\times5^2\times4=364$

$a+b+c$가 짝수이면서 $a+c>2b$인 경우의 수를 A라 하고, $a+b+c$가 짝수이면서 $a+c<2b$인 경우의 수를 B라 하자.

A는 $a'=10-a$, $b'=10-b$, $c'=10-c$에 대하여 $a'+b'+c'$가 짝수이고 $a'+c'<2b'$인 경우의 수와 같다.

$a'+b'+c'$가 짝수

$\Leftrightarrow\ a+b+c$가 짝수

이고,

$a'+c'<2b'$

$\Leftrightarrow\ a+c>2b$

이므로 $A=B$

따라서 $a+b+c$가 짝수이면서 $a+c=2b$인 경우의 수를 C라 하면

$A+B+C=364$

$\Rightarrow\ A=\dfrac{364-C}{2}$

이제 C의 값을 구하자. $a+c=2b$인 경우이므로

$a+b+c=3b$

따라서

$a+b+c$가 짝수

$\Leftrightarrow\ b$가 짝수

이다.

b로 가능한 값은 2, 4, 6, 8이고

$b=2$일 때 모든 (a,c)의 개수는 3

$b=4$일 때 모든 (a,c)의 개수는 7

$b=6$일 때 모든 (a,c)의 개수는 7

$b=8$일 때 모든 (a,c)의 개수는 3

이므로 $C=3+7+7+3=20$

$\Rightarrow\ A=172$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{172}{364}=\dfrac{43}{91}$

29. 한 번 공을 뽑아 확인한 숫자를 X라 하자.

$\mathrm{P}(X=n)={}_{8}\mathrm{C}_{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{8-n}$이므로

X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(8,\ \frac{1}{2}\right)$를 따른다.

따라서 Y를 확률이 $\frac{1}{2}$인 독립시행을 8번 할 때, 사건이 일어난 횟수라 하면, X와 Y의 확률분포가 같다.

공을 1250번 꺼내 확인한 모든 숫자의 합을 S라 하고, 확률이 $\frac{1}{2}$인 독립시행을 10000번 할 때, 사건이 일어난 횟수를 T라 하자. T는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10000,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수이고, T는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(5000,\ 50^2)$을 따른다.

X와 Y의 확률분포가 같으므로 S와 T의 확률분포가 같다. 따라서

$\mathrm{P}(S\le 5100)=\mathrm{P}(T\le 5100)$

$\Rightarrow\ \mathrm{P}(Z\le 2)=0.977$

$k=0.977$이므로 $1000k=977$

30. $f(x)=n$인 x의 개수를 c_n이라 하자. 조건 (가)에서

$f(1)\le f(2)\le\cdots\le f(16)\ \cdots$ ㉠

이다. 함수 f의 치역이 Y이므로 $c_1,\ c_2,\ \cdots\ c_7$은 모두 자연수이고 $\sum_{n=1}^{7}c_n=16$이다.

한편, $f(x)=3$인 x의 최댓값은 $c_1+c_2+c_3$이므로 ㉠에 의하여

$f(f(x))\le 3$

$\Leftrightarrow\ f(x)\le c_1+c_2+c_3$

이다. 이 부등식을 만족시키는 x의 최댓값을 r이라 하자.

㉠ $\Rightarrow\ \frac{1+2+\cdots+r}{r}=8$

$\Rightarrow\ r=15$

따라서

$f(15)=c_1+c_2+c_3,\ f(16)=c_1+c_2+c_3+1\ \cdots$ ㉡

이때 함수 f의 치역이 Y이므로 $f(16)=7$

$\Rightarrow\ c_1+c_2+c_3=6\ \cdots$ ㉢

또, ㉡에서 $c_7=1$

$\Rightarrow\ c_4+c_5+c_6=9\ \cdots$ ㉣

㉢인 $(c_1,\ c_2,\ c_3)$의 개수는 ${}_{3}\mathrm{H}_{3}=10$

㉣인 $(c_4,\ c_5,\ c_6)$의 개수는 ${}_{3}\mathrm{H}_{6}=28$

따라서 구하는 함수의 개수는 $10\times 28=280$

[미적분]

23. $\lim_{x\to 0}\frac{2\times\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{e^x-1}{x}}=2$

24. $\int_0^1 xe^{x^2}dx$에서 $x^2=t$로 치환하면

$2xdx=dt$이므로

$\int_0^1 xe^{x^2}dx=\int_0^1\frac{e^t}{2}dt=\frac{e-1}{2}$

25. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$

$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}$

이므로 구하는 곡선의 길이는

$\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_1^2\frac{x^2+1}{2x}dx=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$

26. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$a_n=a+(n-1)d$

이때 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 a, d는 자연수이다.

$a_{n+2}=a_n+2d$

$\Rightarrow\ \frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{a_n(a_n+2d)}=\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$

$\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{2d}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$

따라서 $\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+d}\right)=\frac{3}{16}$

$\Rightarrow\ 8(2a+d)=3da(a+d)$

$\Rightarrow\ d=2$, $a=2$ ($\because$ a, d는 자연수)

이므로 $a_4=a+3d=8$

27. 두 점 A, B의 x좌표가 모두 a이고, 곡선 C의 매개변수 방정식이

$x=t^2$, $y=(t^2-2t)e^t$

이므로 $t=-\sqrt{a}$, $t=\sqrt{a}$일 때의 두 접선이 서로 평행하면 된다.

매개변수 미분법에 의하여

$\frac{dy}{dx}=\frac{(t^2-2)e^t}{2t}$

이므로 매개변수가 $t=-\sqrt{a}$일 때의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=\frac{(a-2)e^{-\sqrt{a}}}{-2\sqrt{a}}$

이고, 매개변수가 $t=\sqrt{a}$일 때의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=\frac{(a-2)e^{\sqrt{a}}}{2\sqrt{a}}$

이다. 두 접선의 기울기가 같으므로

$(a-2)\left(e^{-\sqrt{a}}+e^{\sqrt{a}}\right)=0$

$\Rightarrow\ a=2$

28. $0 \le x \le 1$일 때 $f(x) = -ax - b\sin(\pi x)$

$\Rightarrow$ $0 \le x \le 1$일 때 $f'(x) = -a - b\pi\cos(\pi x)$

$\Rightarrow$ $f'(0) = -a - b\pi < 0$

또, $0 \le x \le 1$일 때 $f(f(x)) = x$

$\Rightarrow$ $0 \le x \le 1$일 때 $f'(f(x))f'(x) = 1$

$x = 0$을 대입하면 $f'(f(0))f'(0) = 1$

$\Rightarrow$ $\{f'(0)\}^2 = 1$

$\Rightarrow$ $f'(0) = -1$

$\Rightarrow$ $a + b\pi = 1$ ⋯ ㉠

한편,

$$\int_0^1 xf'(ax-a)dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_{-a}^0 (x+a)f'(x)dx$$

$$= -\frac{1}{a^2}\int_{-a}^0 f(t)dt$$

$-a \le x \le 1$일 때의 $y = f(x)$의 그래프는

$y = x$에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-a}^0 f(t)dt = a + \int_0^1 f(t)dt$$

$$= \frac{a}{2} - \frac{2b}{\pi}$$

따라서

$$-\frac{1}{a^2}\int_{-a}^0 f(t)dt = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{2} - \frac{2b}{\pi}\right) = -1 + \frac{4}{\pi^2} \ \cdots \ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면

$a = \frac{1}{2}$ 또는 $a = \frac{4}{\pi^2 - 4}$

$a = \frac{1}{2}$이면 $f'(1) = 0$

$\Rightarrow$ $f'(f(1))f'(1) = 0$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a = \frac{4}{\pi^2 - 4}$, $b = \frac{\pi^2 - 8}{\pi(\pi^2 - 4)}$

$\Rightarrow$ $a\pi + 4b = \frac{8}{\pi}$

29. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$b_{n+1} - b_n = S_n$이다.

조건에서

$\lim_{n\to\infty} b_n = 8$

$\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}(b_{n+1} - b_n) = \lim_{n\to\infty} S_n = 0$ ⋯ ㉠

조건 (가)에서 수열 $\{a_{n+1}\}$이 등비수열이므로

$a_{n+1} = cr^{n-1}$ (단, c, r은 상수이다.)

로 둘 수 있다.

㉠ $\Rightarrow$ $|r| < 1$

이고,

$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 + \frac{c}{1-r} = 0$

$\Rightarrow$ $c = (r-1)a_1$

$n \ge 2$일 때

$$S_n = a_1 + c\frac{1-r^{n-1}}{1-r}$$

$= a_1 r^{n-1}$

$\Rightarrow$ $b_{n+1} - b_n = a_1 r^{n-1}$

$\Rightarrow$ $b_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k = a_1\frac{1-r^{n-1}}{1-r}$

따라서 $\lim_{n\to\infty} b_n = 8$

$\Rightarrow$ $\frac{a_1}{1-r} = 8$

$\Rightarrow$ $n \ge 2$일 때 $b_n = 8(1 - r^{n-1})$

$\Rightarrow$ $b_{n+1} = 8(1 - r^n)$

한편,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+2} - b_n}{8 - b_{n+1}} = \frac{8(1-r)(1+r)r^{n-1}}{8r^n}$$

$$= \frac{1-r^2}{r} = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ $r = \frac{1}{2}$ ($\because$ $|r| < 1$)

$\Rightarrow$ $a_1 = 4$

$\Rightarrow$ $c = -2$

이므로 $a_{n+1} = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\Rightarrow$ $a_5 = -\frac{1}{4}$

따라서 $a_1 + a_5 = \frac{15}{4}$

$p = 4$, $q = 15$이므로 $p + q = 19$

30. 조건을 만족시키는 $a-b$의 최댓값이 $\frac{5}{2}$이므로

조건을 만족시키는 a, b 중 $a>b$인 것이 존재한다.
부등식에 $x=0$을 대입하면

$\frac{a}{2} \le g(0) \le \sqrt{3}b$ … ㉠

만약 $b \le 0$이면 $a>b$와 ㉠을 동시에 만족시킬 수 없으므로 $a>0$, $b>0$

$x \to \infty$, $x \to -\infty$일 때
부등식의 양변이 모두 0으로 수렴
$\Rightarrow g(x) \to 0$
이므로 $f(-1)=f(1)=0$
$\Rightarrow f(x)=c(1-x^2)$ (단, c는 상수이다.)
$\Rightarrow g(x)=c\left\{1-\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2\right\}=\frac{4ce^x}{(e^x+1)^2}$

한편, $\frac{a}{e^x+e^{-x}} \le g(x)$
$\Leftrightarrow a \le (e^x+e^{-x})g(x)$
$\Leftrightarrow a \le \frac{4c(e^{2x}+1)}{(e^x+1)^2}$

$p(x)=\frac{4c(e^{2x}+1)}{(e^x+1)^2}$이라 하자.
㉠ $\Rightarrow c>0$
이므로
$\ln|p(x)|=\ln|4c|+\ln|e^{2x}+1|-2\ln|e^x+1|$
$\Rightarrow \frac{p'(x)}{p(x)}=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}-\frac{2e^x}{e^x+1}$
$\Rightarrow \frac{p'(x)}{p(x)}=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}-\frac{2e^x}{e^x+1}=\frac{2e^x(e^x-1)}{(e^{2x}+1)(e^x+1)}$
$p(x)>0$이므로 $p'(x)$의 부호는 e^x-1의 부호와 같다.
따라서 $p(x)$는 $x=0$에서 최소이므로
$a \le \frac{4c(e^{2x}+1)}{(e^x+1)^2}$
$\Leftrightarrow a \le 2c$ … ㉡

한편, $g(x) \le \sqrt{3}be^{-\frac{|x|}{2}}$
$\Leftrightarrow b \ge \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{|x|}{2}}g(x)$

$q(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{|x|}{2}}g(x)$라 하자.
모든 실수 x에 대하여 $q(x)=q(-x)$이므로
$x \ge 0$에서의 최댓값을 구하는 것으로 충분하다.

$\ln|q(x)|=-\frac{1}{2}\ln3+\frac{|x|}{2}+\ln|g(x)|$
$\Rightarrow \frac{q'(x)}{q(x)}=\frac{1}{2}+\{\ln|g(x)|\}'$
$=\frac{3-e^x}{2(e^x+1)}$
$q(x)>0$이므로 $q'(x)$의 부호는 $3-e^x$의 부호와 같다.
따라서 $q(x)$는 $x=\ln3$에서 최대이므로
$b \ge \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{|x|}{2}}g(x)$
$\Leftrightarrow b \ge \frac{3c}{4}$ … ㉢

㉡, ㉢에서 $a-b$의 최댓값은 $\frac{5c}{4}=\frac{5}{2}$
$\Rightarrow c=2$
$\Rightarrow 9 \times g(\ln2)=16$