제 2 교시

2027년도 Clarance 모의고사 1회 문제지

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

무성한 별들을 지나서 끝없는 항해를 할 거야

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작될 때까지 표지를 넘기지 마십시오.

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $(2^{1+\sqrt{3}})^{1-\sqrt{3}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. 함수 $f(x)=x^3-4x+8$에 대해 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$의 값은? [2점]

① 11 ② 14 ③ 17 ④ 20 ⑤ 23

3. 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2+a_4=a_1+18,\ a_1a_5=(a_3-1)^2+15$$

일 때, a_6의 값은? [3점]

① 16 ② 32 ③ 48 ④ 64 ⑤ 80

4. 실수 전체에서 연속인 $f(x)$에 대해

$$\lim_{x\to 4-}\{f(x)-3x^2\}=2f(4)-\lim_{x\to 4}\{xf(4)+9x\}$$

일 때, $f(4)$의 값은? [3점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ 4 ④ $\frac{13}{3}$ ⑤ $\frac{14}{3}$

이 문제지에 관한 저작권은 토끼넛라떼에 있습니다.

5. 다항함수 $f(x)$에 대해

$$\int (x+1)f'(x)dx = 3x^4 - 5x^2 + 2x - 17$$

을 만족시킨다. $f(1)=2$일 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① 56 ② 62 ③ 68 ④ 74 ⑤ 80

6. $\tan\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)>0$이고, $2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\pi-\theta)=-1$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

7. 두 함수 $f(x)=x^3-1$과 $g(x)=2x^2+k$가 있다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$에 동시에 접하는 공통접선 $y=12x+n$이 존재한다. $n>0$일 때, $n+k$의 값은? [3점]

① 42 ② 44 ③ 46 ④ 48 ⑤ 50

이 문제지에 관한 저작권은 토끼넛라떼에 있습니다.

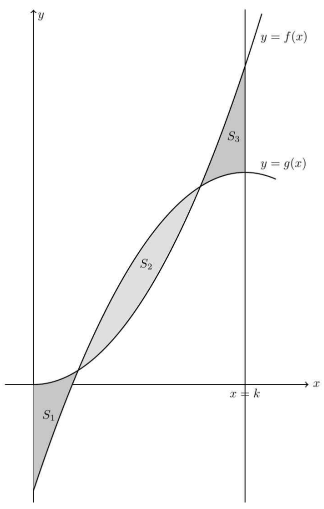
8. 두 양수 a, b가

$$\log_3 ab + 2(\log_3 a)(\log_9 b) = 11,\ \frac{1}{4}(\log_{\sqrt{3}} a)^2 + (\log_3 b)^2 = 13$$

일 때 $a+b$의 값은? [3점]

① 24 ② 36 ③ 48 ④ 60 ⑤ 72

9. 함수 $f(x)=x^2$와 양수 k에 대해 $g(x) = k-(x-k)^2$가 있다. 구간 $[0, k]$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 직선 $x=k$ 및 y축으로 둘러싸인 세 영역의 넓이를 왼쪽부터 차례대로 S_1, S_2, S_3이라 하자. $S_1+S_3=S_2$일 때, k의 값은? [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

10. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k\times 2^k}{(k+2)!} = 1-\frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$일 때, (좌변) = $\frac{1\times 2^1}{3!} = \frac{1}{3}$, (우변)= $1-\frac{2^2}{3!}=\frac{1}{3}$이므로 (*)이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{k\times 2^k}{(k+1)!} = 1-\frac{2^{m+1}}{(m+1)!}$$

이다.

$n=m+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(k+1)2^k-2^k}{(k+2)!} = \sum_{k=1}^{m} \frac{(k+1)2^k-2^k}{(k+2)!} + \boxed{\text{(가)}}$$

$$= \left(1-\frac{2^{m+1}}{(m+2)!}\right) + \boxed{\text{(가)}}$$

식을 정리하기 위해 분모를 $(m+3)!$으로 통분하면

$$\left(1-\frac{2^{m+1}}{(m+2)!}\right)+\boxed{\text{(가)}} = 1-\left\{\frac{\boxed{\text{(나)}}}{(m+3)!}-\boxed{\text{(가)}}\right\}$$

$$=1-\frac{\boxed{\text{(나)}}-(m+1)2^{m+1}}{(m+3)!}$$

$$=1-\frac{2^{m+1}\{\boxed{\text{(다)}}-(m+1)\}}{(m+3)!}$$

$$=1-\frac{2^{m+2}}{(m+3)!}$$

이므로 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

따라서 (1), (2)에 의해 모든 자연수 n에 의해 (*)이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $\frac{g(3)}{f(2)h(12)}$의 값은? [4점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

이 문제지에 관한 저작권은 토끼넛라떼에 있습니다.

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\lim_{t\to 0}\frac{\{f(x+t)-f(x-t)\}\times t}{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}$$

이라 하자. $g(x)$가 $x\neq 2$인 모든 실수에서 미분 가능하고 $f(3)=-5$, $g(0)=1$일 때 $f(1)+g(5)$의 값은? [4점]

① $\frac{20}{3}$ ② $\frac{22}{3}$ ③ 8 ④ $\frac{26}{3}$ ⑤ $\frac{28}{3}$

12. 자연수 k에 대하여 닫힌구간 $[0, 24]$에서 정의된 방정식

$$\sin\left(\frac{\pi x}{k}\right)=\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$$

의 서로 다른 모든 실근의 집합을 A라 하자. 집합 B를

$$B=\{a-b \mid a\in A,\ b\in A,\ a>b\}=\{b_1,\ b_2\}$$

이라 할 때, $2b_1=b_2$이다. 이때 가능한 모든 k의 값의 합을 S라 할 때, $n(A)+S$의 값은? [4점]

① 37 ② 38 ③ 39 ④ `40 ⑤ 41

이 문제지에 관한 저작권은 토끼넛라떼에 있습니다.

13. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le a) \\ 8-f(2a-x) & (x>a) \end{cases}$$

가 실수 전체에서 연속이라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\int_a^x (g(t)-4)dt$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 $x=-1, 5$에서 극댓값을 갖고, $h(-1)=9$, $g(6)=-8$일 때, $g(3)-h(2a)$의 값은? [4점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1 ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

14. 두 상수 $a(a>1)$, k에 대하여 곡선 $y=a^{x-k}$위의 점 A, B와 $y=19-\log_a(x+k)$위의 점 C, D가 있다. 사각형 ABCD가 정사각형이고 그 넓이가 90이다. 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 y좌표가 10일 때, $a\times k$의 값은? [4점]

① $2^{-\frac{5}{6}}$ ② $2^{-\frac{2}{3}}$ ③ $2^{-\frac{1}{2}}$ ④ $2^{-\frac{1}{3}}$ ⑤ $2^{-\frac{1}{6}}$

이 문제지에 관한 저작권은 토끼넛라떼에 있습니다.

15. 모든 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 아래 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 a에 대해 $\lim_{x\to a}\frac{f(g(x))}{g(x)-2}$가 존재하고,
>
> $\lim_{x\to 4}\frac{f(g(x))}{g(x)-2}=2$이다.
>
> (나) $\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))}{f(g(x))}$의 값이 존재하지 않는 실수 a는 4뿐이다.

$f(3)=8$일 때, $g(9)-f(1)$의 최댓값은? [4점]

① 57 ② 60 ③ 63 ④ 66 ⑤ 69

단답형

16. 방정식 $8x^{\log_2 x}=x^4$를 만족시키는 모든 x의 합을 구하시오. [3점]

17. 실수 전체에서 미분 가능한 함수 $f(x)$에 대해 $\lim_{x\to\infty}f'(x)=4$일 때, $\lim_{x\to\infty}\left\{f\left(\sqrt{x^2+4x}\right)-f(x)\right\}$의 값을 구하시오. [3점]

이 문제지에 관한 저작권은 토끼넛라떼에 있습니다.

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_n$이라 하자. $\sum_{k=1}^{12}a_k=16$, $\sum_{k=1}^{12}ka_k=77$이라 할 때 $\sum_{k=1}^{12}S_k$의 값을 구하시오. [3점]

19. $t=0$에서 원점에서 출발하고 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도 $v_{\mathrm{P}}(t)$, $v_{\mathrm{Q}}(t)$를

$$v_{\mathrm{P}}(t)=6t^2+k,\ v_{\mathrm{Q}}(t)=4t^3-12t^2$$

이라 하자. 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x_{\mathrm{P}}(t)$라 하고, 점 Q가 움직인 거리를 $s_{\mathrm{Q}}(t)$라 하자. $x_{\mathrm{P}}(t)=s_{\mathrm{Q}}(t)$인 시각이 $t=6$뿐 일 때, 시각 $t=k-5$에서 점 Q의 가속도를 구하시오. [3점]

20. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_n$이라 하자. 모든 자연수 n에 대해 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{S_n+1}{2} & (S_n\text{이 홀수일 때})\\ a_n-1 & (S_n\text{이 짝수일 때})\end{cases}$

(나) a_n이 3의 배수이게 하는 n의 최솟값은 4이다.

(다) $a_n>a_{n+1}$을 만족하는 6이하의 n은 2개다.

$a_1\leq 100$일 때, 가능한 S_4의 합을 구하시오. [4점]

이 문제지에 관한 저작권은 토끼넛라떼에 있습니다.

21. 최고차항이 4인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체에서 연속인 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$\{g(x)-f(x)\}\{g(x)-f'(x)\}=0$$
> 을 만족시키고 $g(x)$의 최솟값은 -9이다.
>
> (다) $g(t+1)-g(t)$의 값이 $\lim_{h\to 0+}\frac{g(t+h)-g(t)}{t}$와 $\lim_{h\to 0-}\frac{g(t+1+h)-g(t+1)}{h}$보다 작도록 하는 정수 t는 0뿐이다.

$f(1)=-9$일 때, $g(2)$의 범위는 $a<g(2)<b$이다. $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

22. 반지름이 각각 r_1, r_2인 원 C_1과 C_2의 교점을 각각 A, B 라 하고, 점 A를 지나는 직선과 원 C_1, C_2의 교점을 각각 P, Q라 하자. 원 C_1 위의 점 P에서의 접선과 원 C_2 위의 점 Q에서의 접선이 점 R에서 만날 때, $\overline{\mathrm{PR}}=9$, $\overline{\mathrm{QR}}=15$, $\angle\mathrm{PRQ}=\frac{2\pi}{3}$이다.

$\cos(\angle\mathrm{BRP})=-\frac{1}{7}$일 때, $\frac{r_1}{r_2}\times(\overline{\mathrm{BP}}-\overline{\mathrm{BQ}})$의 값을 구하시오.

[4점]

이 문제지에 관한 저작권은 토끼넛라떼에 있습니다.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\csc x - \cot x}$의 값은? [2점]

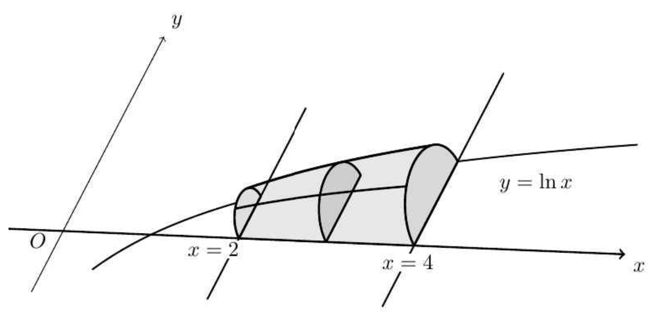
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 6 ⑤ 12

24. 곡선 $x^2 + xy + \ln(x+y+1) + \sin x = \ln 2$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선의 방정식이 $y = mx + n$일 때, $m+n$의 값은? [3점]

① -8 ② -7 ③ -6 ④ -5 ⑤ -4

이 문제지에 관한 저작권은 토끼넛라떼에 있습니다.

25. 그림과 같이 곡선 $y=\ln x$와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러쌓인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 반원일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\pi}{8}\left(7(\ln 2)^2-6\ln 2+2\right)$ ② $\frac{\pi}{8}\left(5(\ln 2)^2-6\ln 2+2\right)$

③ $\frac{\pi}{4}\left(7(\ln 2)^2-6\ln 2+2\right)$ ④ $\frac{\pi}{4}\left(5(\ln 2)^2-6\ln 2+2\right)$

⑤ $\frac{\pi}{2}\left(7(\ln 2)^2-6\ln 2+2\right)$

26. 함수 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 위의 점 $P(t,f(t))$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S'(\sqrt{3})$의 값은? [3점]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

이 문제지에 관한 저작권은 토끼넛라떼에 있습니다.

27. 자연수 n에 대해 구간 $[0,1]$을 n등분한 점

$$A_k\left(\frac{k}{n}, \frac{1}{nk}\right), 1 \le k \le n$$

을 잡고, k에 대하여 원 C_k를

$$\left(x-\frac{1}{k}\right)^2+\left(y-\frac{1}{k}\right)^2=\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

로 정의한다. 원 C_k위의 점 B에 대하여 삼각형 OA_kB의 넓이의 최댓값을 M_k, 최솟값을 m_k라 할 때 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

28. 두 상수 a, b에 대하여 실수 전체에서 이계도함수를 가지는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+\ln(b+1)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여

$e^{f(x)}+af(x)=e^{-\sin^2(\pi x)}\cos^2(\pi x)+\ln\left(1+b\sin^4(\pi x)\right)$

이다.

(나) $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $f''(0)=1$

① $-4\pi^2$ ② $-2\pi^2$ ③ $-\pi^2$ ④ $2\pi^2$ ⑤ $4\pi^2$

이 문제지에 관한 저작권은 토끼넛라떼에 있습니다.

단답형

29. 모든 항이 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7$

(나) $4a_1^2 + 9a_3^2$은 a_2^2의 배수이고, $13a_2^2$의 약수이다.

이때 가능한 모든 a_2의 값이 합이 $\frac{p}{q}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단 p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. $f(1)=0$이고 $x>0$에서 미분 가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}$$

를 만족한다. $0 \le t \le f(2)$에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 두 실근중 큰 값을 $g(t)$, 작은 값을 $h(t)$라 하자. 이때

$$\int_0^{f(2)} \frac{(g(t)-h(t))^2+4}{g(t)h(t)\{g(t)+h(t)\}}dt = p(e^q - e^r)$$

일 때, $\frac{q \times r}{p}$의 값을 구하시오. (단 p, q, r은 0보다 큰 유리수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

이 문제지에 관한 저작권은 토끼넛라떼에 있습니다.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.