[26011-0015]

1 두 양의 상수 a, b와 자연수 n에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3+anx^2-bnx$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$는 $x=\alpha_n$일 때 x축과 만나고, 함수 $f(x)$는 $x=\beta_n$에서 극소이다.

$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=24$일 때, $\lim_{n\to\infty}\beta_n$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

[26011-0016]

2 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2-4nx+4n^2$ 위의 점 $(n,\ n^2)$에서의 접선을 l이라 하자. 직선 l이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$가 되도록 x축 위의 점 C를 잡는다. 점 C의 x좌표를 a_n, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{R_n}{a_n}$의 값은?

① $-\dfrac{5}{8}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $-\dfrac{3}{8}$ ④ $-\dfrac{1}{4}$ ⑤ $-\dfrac{1}{8}$

[26011-0017]

3 $\left|\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(a+\dfrac{1}{4}\right)^{2n}+(a+1)^{n+1}}{\left(a+\dfrac{1}{4}\right)^{2n+1}+(a+1)^{n}}\right|=\dfrac{13}{10}$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은?

① $\dfrac{27}{52}$ ② $\dfrac{34}{65}$ ③ $\dfrac{137}{260}$ ④ $\dfrac{69}{130}$ ⑤ $\dfrac{139}{260}$

Level 3 실력 완성

1 두 양의 상수 a, b와 자연수 n에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-2anx^2+bnx$$

라 하자. 함수 $f(x)$는 $x=\alpha_n$에서 극댓값을 가지고, 곡선 $y=f(x)$는 $x=\beta_n$에서 x축과 교점을 가진다. $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n)=12$일 때, $\lim_{n\to\infty}\alpha_n\beta_n$의 값을 구하시오.

2 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2-2nx+2n^2$ 위의 점 $(2n,\ 2n^2)$에서의 접선을 l이라 하자. 직선 l이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$가 되도록 y축 위의 점 C를 잡는다. 점 C의 y좌표를 a_n, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(na_n)^2}{S_n}$의 값은?

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

3 $\left|\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a-\frac{1}{4}\right)^{2n}+\left(a+\frac{1}{2}\right)^{n}}{\left(a-\frac{1}{4}\right)^{2n+1}+\left(a+\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\right|=\frac{4}{7}$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은?

① $\frac{3}{14}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{2}{7}$ ④ $\frac{9}{28}$ ⑤ $\frac{5}{14}$

01 수열의 극한

LV 3 실력 완성

1	32	2	①	3	④

1) [정답] 32

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-2anx^2+bnx$에서

$f'(x)=-x^2-4anx+bn$

함수 $f(x)$는 $x=\alpha_n$에서 극댓값을 가지므로 $f'(\alpha_n)=0$

$f'(\alpha_n)=-\alpha_n{}^2-4an\alpha_n+bn=0$

$\alpha_n{}^2+4an\alpha_n-bn=0$

$\alpha_n=-2an\pm\sqrt{4a^2n^2+bn}$

이때 $\alpha_n>0$이므로

$\alpha_n=-2an+\sqrt{4a^2n^2+bn}$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4a^2n^2+bn}-2an\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4a^2n^2+bn}-2an\right)\left(\sqrt{4a^2n^2+bn}+2an\right)}{\sqrt{4a^2n^2+bn}+2an}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{bn}{\sqrt{4a^2n^2+bn}+2an}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{\sqrt{4a^2+\frac{b}{n}}+2a}$$
$$=\frac{b}{2a+2a}=\frac{b}{4a} \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한, 곡선 $y=f(x)$는 $x=\beta_n$일 때 x축과 교점을 가지므로

$f(\beta_n)=0$

$f(\beta_n)=-\frac{1}{3}\beta_n{}^3-2an\beta_n{}^2+bn\beta_n=0$

$-\frac{1}{3}\beta_n\left(\beta_n{}^2+6an\beta_n-3bn\right)=0$

$\beta_n=0$ 또는 $\beta_n=-3an\pm\sqrt{9a^2n^2+3bn}$

이때 $\beta_n>0$이므로

$\beta_n=-3an+\sqrt{9a^2n^2+3bn}$

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9a^2n^2+3bn}-3an\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9a^2n^2+3bn}-3an\right)\left(\sqrt{9a^2n^2+3bn}+3an\right)}{\sqrt{9a^2n^2+3bn}+3an}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3bn}{\sqrt{9a^2n^2+3bn}+3an}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3b}{\sqrt{9a^2+\frac{3b}{n}}+3a}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3b}{\sqrt{9a^2+\frac{3b}{n}}+3a}$$
$$=\frac{3b}{3a+3a}=\frac{b}{2a} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n)=\lim_{n\to\infty}\alpha_n+\lim_{n\to\infty}\beta_n$$
$$=\frac{b}{4a}+\frac{b}{2a}=\frac{3b}{4a}=12$$

이므로 $\frac{b}{a}=16$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n\beta_n=\lim_{n\to\infty}\alpha_n\times\lim_{n\to\infty}\beta_n$

$$=\frac{b}{4a}\times\frac{b}{2a}$$
$$=\frac{1}{8}\times\left(\frac{b}{a}\right)^2$$
$$=\frac{1}{8}\times16^2=32$$

[참고]

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	α_n	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

2) [정답] ①

$y=x^2-2nx+2n^2$에서 $y'=2x-2n$이므로

곡선 $y=x^2-2nx+2n^2$위의 점 $(2n,\ 2n^2)$에서의 접선 l의 방정식은

$y=2n(x-2n)+2n^2$, $y=2nx-2n^2$

$y=0$일 때, $0=2nx-2n^2$에서 $x=n$이므로

점 A의 좌표는 $(n,\ 0)$

$x=0$일 때, $y=-2n^2$이므로 점 B의 좌표는 $(0,\ -2n^2)$

$\overline{AC}=\overline{BC}$를 만족하는 점 C는 선분 AB의 수직이등분선 위에 존재하므로

y축 위의 점 C는 선분 AB의 수직이등분선이 y축과 만나는 점이다.

선분 AB의 기울기는 $2n$이므로 수직이등분선의 기울기는 $-\frac{1}{2n}$,

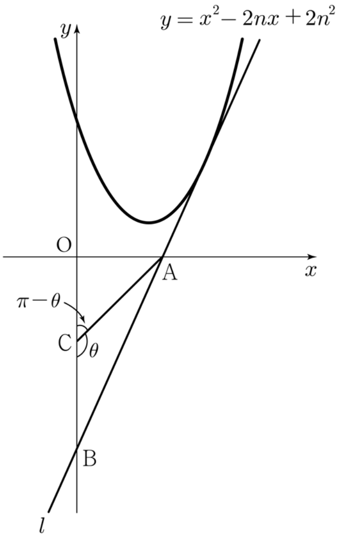
선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{n}{2},\ -n^2\right)$

따라서 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2n}\left(x-\frac{n}{2}\right)-n^2$

$x=0$일 때, $y=-n^2+\frac{1}{4}$이므로 점 C의 좌표는 $\left(0,\ -n^2+\frac{1}{4}\right)$

$a_n=-n^2+\frac{1}{4}$



다음 그림과 같이 $\angle ACB=\theta$라 할 때,
원점 O에 대하여 $\angle$ ACO$=\pi-\theta$이고
$\sin(\angle ACO)=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\sin(\angle ACB)$이므로

$$\sin\theta=\sin(\pi-\theta)=\frac{\overline{AO}}{\overline{AC}}=\frac{n}{\sqrt{\left(-n^2+\frac{1}{4}\right)^2+n^2}}=\frac{n}{n^2+\frac{1}{4}}=\frac{4n}{4n^2+1}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름을 r_n이라 할 때

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2r_n$

$\overline{AB}=\sqrt{4n^4+n^2}=n\sqrt{4n^2+1}$ 이므로

$$r_n=\frac{\overline{AB}}{2\sin\theta}=\frac{n\sqrt{4n^2+1}}{\frac{8n}{4n^2+1}}=\frac{(4n^2+1)\sqrt{4n^2+1}}{8}$$

그러므로 삼각형 ABC의 외접원의 넓이 S_n은

$$S_n=\pi(r_n)^2=\frac{(4n^2+1)^3}{64}\pi$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(na_n)^2}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(-n^2+\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{(4n^2+1)^3}{64}\pi}=\frac{64}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(-n^2+\frac{1}{4}\right)^2}{(4n^2+1)^3}=\frac{64}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-1+\frac{1}{4n^2}\right)^2}{\left(4+\frac{1}{n^2}\right)^3}=\frac{64}{\pi}\times\frac{(-1+0)^2}{(4+0)^3}=\frac{1}{\pi}$$

[참고]

자연수 n에 대하여 $-2n^2<-n^2+\frac{1}{4}<0$이므로

해설의 그림과 같이 점 O, B, C의 위치가 정해질 수 있다.

3) [정답] ④

$$\left(a-\frac{1}{4}\right)^2-\left(a+\frac{1}{2}\right)=\left(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}\right)-\left(a+\frac{1}{2}\right)=a^2-\frac{3}{2}a-\frac{7}{16}=\frac{1}{16}(16a^2-24a-7)=\frac{1}{16}(4a-7)(4a+1)$$

(ⅰ) $a<-\frac{1}{4}$ 또는 $a>\frac{7}{4}$일 때

$\left(a-\frac{1}{4}\right)^2>1$, $\left(a-\frac{1}{4}\right)^2>a+\frac{1}{2}$이고

$$\left(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}\right)+\left(a+\frac{1}{2}\right)=a^2+\frac{1}{2}a+\frac{9}{16}=\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}>0$$

에서

$$-\left(a-\frac{1}{4}\right)^2<a+\frac{1}{2}$$

즉, $-1<\frac{a+\frac{1}{2}}{\left(a-\frac{1}{4}\right)^2}<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a-\frac{1}{4}\right)^{2n}+\left(a+\frac{1}{2}\right)^n}{\left(a-\frac{1}{4}\right)^{2n+1}+\left(a+\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left\{\frac{a+\frac{1}{2}}{\left(a-\frac{1}{4}\right)^2}\right\}^n}{\left(a-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{a+\frac{1}{2}}\times\left\{\frac{a+\frac{1}{2}}{\left(a-\frac{1}{4}\right)^2}\right\}^n}=\frac{1}{a-\frac{1}{4}}=\frac{4}{4a-1}$$

$\frac{4}{4a-1}=\frac{4}{7}$이면 $a=2$이고 이는 조건을 만족시킨다.

$\frac{4}{4a-1}=-\frac{4}{7}$이면 $a=-\frac{3}{2}$이고
이는 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $-\frac{1}{4}<a<\frac{7}{4}$일 때

$$0\le\left(a-\frac{1}{4}\right)^2<a+\frac{1}{2}$$

$0\le\frac{\left(a-\frac{1}{4}\right)^2}{a+\frac{1}{2}}<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a-\frac{1}{4}\right)^{2n}+\left(a+\frac{1}{2}\right)^{n}}{\left(a-\frac{1}{4}\right)^{2n+1}+\left(a+\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{\frac{\left(a-\frac{1}{4}\right)^{2}}{a+\frac{1}{2}}\right\}^{n}+1}{\left(a-\frac{1}{4}\right)\times\left\{\frac{\left(a-\frac{1}{4}\right)^{2}}{a+\frac{1}{2}}\right\}^{n}+\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}$$

$$=a+\frac{1}{2}$$

$a+\frac{1}{2}=\frac{4}{7}$이면 $a=\frac{1}{14}$이고 이는 조건을 만족시킨다.

$a+\frac{1}{2}=-\frac{4}{7}$이면 $a=-\frac{15}{14}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a=-\frac{1}{4}$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a-\frac{1}{4}\right)^{2n}+\left(a+\frac{1}{2}\right)^{n}}{\left(a-\frac{1}{4}\right)^{2n+1}+\left(a+\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n}+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}$$

$$=\frac{1+1}{-\frac{1}{2}+4}=\frac{4}{7}$$

그러므로 $a=-\frac{1}{4}$은 조건을 만족시킨다.

(iv) $a=\frac{7}{4}$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(a-\frac{1}{4}\right)^{2n}+\left(a+\frac{1}{2}\right)^{n}}{\left(a-\frac{1}{4}\right)^{2n+1}+\left(a+\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{2n}+\left(\frac{9}{4}\right)^{n}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1}+\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^{n}+\left(\frac{9}{4}\right)^{n}}{\frac{3}{2}\times\left(\frac{9}{4}\right)^{n}+\frac{4}{9}\times\left(\frac{9}{4}\right)^{n}}$$

$$=\frac{1+1}{\frac{3}{2}+\frac{4}{9}}=\frac{36}{35}$$

그러므로 $a=\frac{7}{4}$은 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에 의하여 $a=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=-\frac{1}{4}$ 또는 $a=\frac{1}{14}$ 또는 $a=2$이므로

그 합은 $-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+2=\frac{-42-7+2+56}{28}=\frac{9}{28}$