HALO

2027 헤일로 모의고사

수학 영역

파란 지음

‘헤일로(Halo)’는
빛이 만들어내는 후광,
즉 빛의 고리를 의미합니다.

2026학년도
3월 학력평가

정답 및 해설

3모 정답 및 해설 | 헤일로 모의고사 Edition

빠른 정답

공통

01	③	12	①
02	⑤	13	⑤
03	①	14	② 풀이 확인
04	②	15	③
05	⑤	16	30
06	④	17	15
07	④	18	124
08	①	19	14
09	③	20	67
10	②	21	48 풀이 확인
11	⑤	22	80 풀이 확인

확률과 통계		미적분	
23	②	23	③
24	④	24	④
25	①	25	①
26	③	26	②
27	⑤	27	⑤
28	③	28	③ 풀이 확인
29	864	29	11 풀이 확인
30	100 풀이 확인	30	57

풀이 확인 이라고 적힌 문제는 맞았어도 해설을 읽어보길 바랍니다.

예상 등급컷

	확률과 통계	미적분
1등급	86-87	81-83
2등급	78-79	72-76
3등급	69-70	64-67

총평

공통 EASY

이번 3월 학력평가 공통과목은 크게 두 가지 특징을 보인 시험이었습니다. 하나는 특수한 상황을 얼마나 빠르게 포착하는가, 다른 하나는 계산을 얼마나 정확하게 처리하는가였습니다. 전반적으로 낯선 발상을 요구하기보다는, 익숙한 조건 속에서 출제 의도를 빠르게 읽어내는지가 중요했습니다. 따라서 같은 문항이라도 상황을 얼마나 신속하게 파악했는지에 따라 체감 난이도가 달라졌을 것입니다.

14번과 15번은 그래프에서 나올 수 있는 가장 특수한 경우를 잡아내는 것이 핵심이었고, 21번과 22번은 상황 자체보다 계산 과정에서 시간이 많이 소요되었을 가능성이 큽니다. 최근 평가원 역시 계산을 통해 변별력을 두는 경향을 보이는 만큼, 이에 대비한 반복 숙달이 필요해 보입니다.

확률과 통계 NORMAL

이번 3월 학력평가 확률과 통계 과목은 사설 모의고사에서 자주 다뤄졌던 아이디어들이 중심이 된 시험이었습니다. 따라서 해당 아이디어를 이미 접해 본 학생과 그렇지 않은 학생 사이에서 체감 난이도 차이가 크게 나타났을 것으로 보입니다. 처음 보는 관점을 시험장에서 바로 떠올려야 했던 학생들에게는 다소 당황스러운 시험이었을 가능성이 큽니다.

28번은 함수의 개수를 같은 것이 있는 순열의 관점에서 바라봐야 했고 30번은 곱이 -1이 되는 상황을 서로 이웃한 두 수가 다른 상황으로 해석하는 관점이 핵심이었습니다. 이러한 문항은 정답을 맞히는 것에서 끝내기보다, 문제를 어떤 시각으로 바라봐야 하는지를 반드시 정리해 두시는 것이 중요하겠습니다.

미적분 NORMAL

이번 3월 학력평가 미적분 과목은 복잡해 보이는 발문을 통해 변별력을 두려는 시험이었습니다. 겉보기에는 부담스러운 문항들이 있었지만, 침착하게 케이스를 분류하고 발문이 지시하는 특수한 상황에 맞추어 접근했다면 생각보다 복잡한 계산 없이 해결할 수 있는 문제들이 많았습니다.

28번은 범위에 따라 $h(x)$를 어떻게 그려 나갈지를 파악하는 과정이 핵심이었고, 30번은 공비의 조건에 따라 가능한 경우를 빠짐없이 따져야 했습니다. 최근 평가원 기출 역시 번뜩이는 직관보다는, 주어진 상황을 엄밀하게 분류하고 끝까지 계산해 내는 집요함을 요구하는 경우가 적지 않습니다. 따라서 이번 시험에서 어려움을 느끼셨다면, 놓친 케이스가 무엇이었는지 차분히 다시 점검해 보시는 것이 중요하겠습니다.

BONUS CHANCE

다음 문제를 틀렸다면 힌트를 보고 다시 풀어보세요.

공통

13
If 점 Q의 좌표를 구하지 못했다.
Hint 점 P에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$와 연립하자.

14
If x에 대한 방정식에 실수 t가 있어 의미를 모르겠다.
Hint $f(t)$를 상수 취급하고 풀이하자.

If 조건이 복잡하여 만족하는 상황을 못 찾겠다.
Hint 함수가 주어진 $0 \le x < \pi$에서 먼저 해석하자.

15
If $y=g(x)$의 함수가 복잡해서 해석하기 어렵다.
Hint 범위를 나누어 생각하자.
$x \le 0$에서는 최고차항 계수가 음수인 사차함수,
$x > 0$에서는 최고차항 계수가 양수인 삼차함수이다.

If 조건 (나)의 집합의 의미를 이해하지 못했다.
Hint 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=-27$의 모든 교점은 접점이라고 생각하자.

20
If 어떻게 접근해야 하는지 모르겠다.
Hint 수열을 나열해 보며 규칙성을 파악하자.

If 20을 답이라고 생각했는데 틀렸다.
Hint $n \ge 16$일 때도 나열해 보자.

21
If 함수 $g(x)$를 해석하지 못했다.
Hint $g'(x)$를 먼저 살펴보자. 절댓값 안의 식의 부호에 따라 값이 바뀐다.

If 조건 (가)를 해석하지 못했다.
Hint 언제 $g'(x)=0$이 되는지 생각해 보고, 조건을 만족하도록 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려보자.

22
If 밑이 다른 지수함수를 어떻게 처리하는지 모르겠다.
Hint $2^t=X$로 치환하고 풀이하자.

If 상황을 다 해석한 것 같은데 답을 못 구하겠다.
Hint 구하는 값에 집중하자. 구하는 값이 합이니 근과 계수의 관계를 생각하면 쉽게 풀이할 수도 있다.

확률과 통계

28
If 조건 (가)를 어떻게 활용해야 할지 모르겠다.
Hint 함수의 개수를 '$f(1)$~$f(9)$를 일렬로 나열하는 경우의 수'로 생각해 보자.

If 조건 (나)를 해석하지 못했다.
Hint 여사건으로 $\ne$가 아닌 $=$가 되는 경우를 살펴보자.

29
If 조건 (나)를 해석하지 못했다.
Hint 여집합을 생각해 곱이 70보다 큰 상황을 살펴보자.

30
If 박스 조건을 해석하지 못했다.
Hint a_n이 될 수 있는 수를 살펴보자. 위 식을 만족하는 경우는 단 한 가지이다.

If $\sum_{n=1}^{11} a_n = 3$에서 구한 식을 어떻게 쓰는지 모르겠다.
Hint 조건을 만족하는 예시를 몇 개 들어서 관찰해 보자.

미적분

28
If 함수 $h(x)$가 어떤 함수인지 모르겠다.
Hint $|f(x)|$와 5의 대소 관계에 따라 경우를 나누자.

If 박스 조건을 해석하지 못하겠다.
Hint 곡선과 직선의 위치 관계를 따지면 된다.
특수한 경계를 바탕으로 부등식을 작성해 보자.

29
If 어떻게 접근해야 하는지 모르겠다.
Hint $\overline{\mathrm{DR}}$을 n에 대한 식으로 표현하려고 해보자.

If 도형 해석에 어려움이 있다.
Hint 주어진 정보를 삼각형 DRC에 대한 정보로 바꾸려고 노력해 보자.

30
If 어떻게 접근해야 하는지 모르겠다.
Hint 각각의 식을 등비수열로 바라보고 $r=1$인 경우와 $-1<r<1$인 경우로 나눠보자.

If 답을 39로 구했는데 틀렸다.
Hint $r=1$인 경우를 다시 살펴보고 $-1<r<1$인 경우와 종합적으로 생각해 보자.

공통

01
10~20초

지수법칙

풀이

$$4^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2$$

정답 ③

02
10~20초

미분계수

풀이

$$f(x)=2x^2+x+2 \Rightarrow f'(x)=4x+1$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1) = 5$$

정답 ⑤

03
10~20초

등차수열 일반항

풀이

$a_1=2$ 이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면

$$a_n=d(n-1)+2$$

이때 $2a_2+a_7=30$ 이므로

$$2(d+2)+(6d+2)=30$$
$$\Rightarrow 8d=24 \Rightarrow d=3$$

$$\therefore a_{10} = 9d+2 = 29$$

정답 ①

04 ●●● 10~20초 함수의 연속

풀이

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) \Rightarrow 4a-2=6$$

$\therefore\ a=2$

정답 ②

05 ●●● 20~30초 미분계수 곱의 미분법

풀이

$$f(x)=(x+1)(2x^2-5x+1)$$
$$\Rightarrow f'(x)=(2x^2-5x+1)+(x+1)(4x-5)$$

$\therefore\ f'(2) = (8-10+1)+3\cdot 3 = 8$

정답 ⑤

06 ●●● 20~30초 로그의 성질

풀이

$$\log_3 a^2=4 \Rightarrow a^2=3^4 \Rightarrow a=9\ (\because\ a>0)$$
$$\log_9 ab=\frac{5}{2} \Rightarrow \log_9 9b=\frac{5}{2}\ (\because\ a=9)$$
$$\Rightarrow 9b=9^{\frac{5}{2}} \Rightarrow 9b=3^5 \Rightarrow b=27$$

$\therefore\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{27}{9}=3$

정답 ④

07 ●●● 30~40초

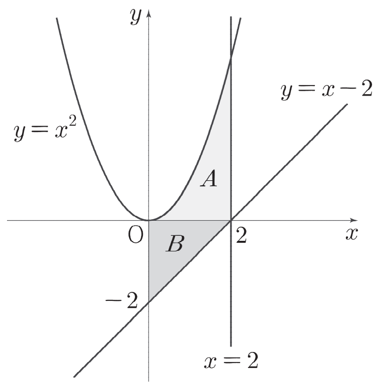
넓이 (정적분)

풀이 1

구하고자 하는 넓이를 정적분으로 나타내면

$$\int_0^2 \{x^2-(x-2)\}dx = \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2 = \frac{14}{3}$$

풀이 2



구하고자 하는 넓이를 위 그림에서 A, B 두 부분으로 나누어 구할 수 있다.

$$\begin{cases} (A\text{ 부분의 넓이})=\displaystyle\int_0^2 x^2dx=\frac{8}{3} \\ (B\text{ 부분의 넓이})=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2 \end{cases}$$

$\therefore$ (구하고자 하는 넓이) $= \frac{8}{3}+2 = \frac{14}{3}$

정답 ④

08 ●●● 30~40초

삼각함수의 성질 각변환

풀이 1

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$ 이므로

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta<0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

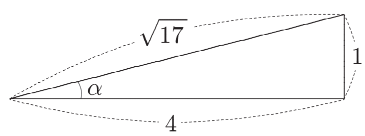
$$\begin{aligned} \cos\theta=4\sin\theta \ &\Rightarrow\ \cos^2\theta=16\sin^2\theta \\ &\Rightarrow\ \cos^2\theta=16-16\cos^2\theta \\ &\qquad (\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1) \\ &\Rightarrow\ \cos^2\theta=\frac{16}{17} \\ &\Rightarrow\ \cos\theta=-\frac{4\sqrt{17}}{17}\ \ (\because\ \text{㉠}) \end{aligned}$$

풀이 2

풀이 1 에서 ㉠을 구한 후

$$\cos\theta=4\sin\theta\ \Rightarrow\ \tan\theta=\frac{1}{4}$$

이므로 밑변의 길이가 4, 높이가 1 인 직각삼각형을 생각하면



$$\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}}\ \Rightarrow\ \cos\theta=-\frac{4}{\sqrt{17}}\ \ (\because\ \text{㉠})$$

정답 ①

Insight

θ 가 예각이 아니더라도 직각삼각형을 활용해 계산을 줄일 수 있습니다. 이때 θ 가 예각이 아니었다는 점을 기억하며 부호에 집중합시다.

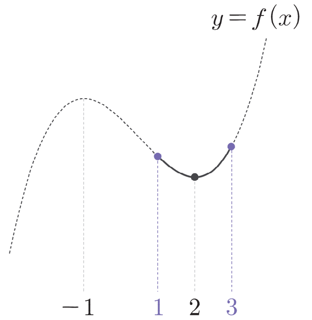
09 1~2분 함수의 최대·최소

풀이

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$

$\Rightarrow f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대, $x=2$ 에서 극소를 갖는다. 함수 $f(x)$ 의 그래프를 그려보면



이므로 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 는

$$\begin{cases} x=2 \text{에서 최솟값 } 4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x=1 \text{ 또는 } x=3 \text{에서 최댓값 } M & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ : $f(2)=-20+a=4 \Rightarrow a=24$

㉡ : $f(1)=-13+a$, $f(3)=-9+a$ 에서

$f(3)>f(1)$ 이므로 $M=f(3)$

$\therefore$ $M=f(3)=-9+24=15$

정답 ③

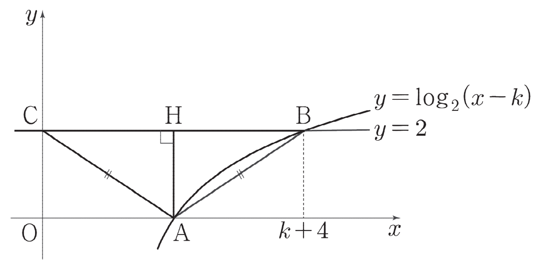
Insight

삼차함수 그래프의 특징을 잘 알고 있다면 ㉡에서 최댓값이 $f(1)$ 이 아닌 $f(3)$ 임을 바로 파악하고 답을 구할 수 있습니다.
1 과 3 이 2 (극점)으로부터 같은 거리만큼 떨어져 있기 때문에 알 수 있는 사실입니다. 스스로 생각해 보고, 구체적인 이유를 알고 싶으면 댓글로 질문해 주세요.

10 1~2분 로그함수 그래프 도형 해석

풀이

점 A, B, C를 정의에 따라 좌표평면에 나타내면



이다. 이때 삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{HB}} \Rightarrow k+1=k+4-(k+1)$

$\Rightarrow k=2$ [1)]

$\therefore$ (삼각형 ABC 의 넓이) $=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}}=6$

정답 ②

PLUS

1) 그래프에서 삼각형 ABC가 이등변삼각형임을 발견하지 못했다면 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$ 를 직접 계산해도 된다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3^2+2^2}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(k+1)^2+2^2}$

$\Rightarrow \sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{(k+1)^2+2^2}$

$\Rightarrow (k+1)^2=9$

$\Rightarrow k=-4$ 또는 $k=2 \Rightarrow k=2$ ($\because$ $k>0$)

11 ●●● 1~2분

속도와 거리 ㄱㄴㄷ

풀이

ㄱ. 시각이 $t\,(t \geq 0)$일 때 점 P 의 위치를 $x(t)$ 라 하면 $v(t)$를 부정적분하여 $x(t)$ 를 구할 수 있다.

$$v(t)=3t^2-24t+36 \Rightarrow x(t)=t^3-12t^2+36t$$

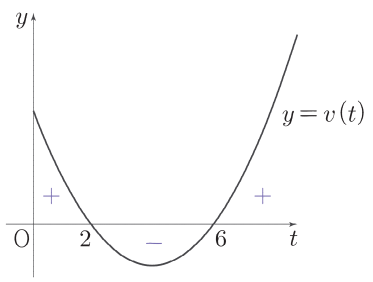
$$(\because \text{ 원점에서 출발하므로 } x(0)=0)$$

$\therefore$ ($t=1$ 일 때 점 P 의 위치) $= x(1) = 25$ (참)

ㄴ. 점 P 의 속도 $v(t)$ 의 부호가 바뀔 때 점 P 의 운동 방향이 바뀌므로 $v(t)=0$ 일 때를 살펴보자.

$$v(t)=3t^2-24t+36=0 \Rightarrow 3(t-2)(t-6)=0$$

$$\Rightarrow t=2 \text{ 또는 } t=6$$



출발한 후 $v(t)$ 의 부호는 $t=2,\ t=6$ 에서 바뀌므로 점 P 의 운동 방향은 총 두 번 바뀐다. (참)

ㄷ. 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P 가 움직인 거리는 $\int_0^3 |v(t)|\,dt$ 이고, 닫힌구간 $[0,3]$ 에서 $v(t)$ 의 부호는

$$\begin{cases} \text{닫힌구간 } [0,2] \text{ 에서 } v(t) \geq 0 \\ \text{닫힌구간 } [2,3] \text{ 에서 } v(t) \leq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^3 |v(t)|\,dt$$

$$= \int_0^2 v(t)\,dt + \int_2^3 \{-v(t)\}\,dt$$

$$= \Big[t^3-12t^2+36t\Big]_0^2 - \Big[t^3-12t^2+36t\Big]_2^3$$

$$= (32-0)-(27-32) = 37 \text{ (참)}$$

정답 ⑤

12 ●●● 2~4분

수열의 합 수열의 합과 일반항의 관계

풀이

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k+1}$$

$$= n^2+n-(n-1)^2-(n-1) \quad (n \geq 2)$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{b_n+1}=2n \quad (n \geq 2) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{(가)}} = p = 2$$

㉠의 양변에 $n=1$ 을 대입해도 성립하므로

$$\frac{a_n}{b_n+1}=2n \Rightarrow \frac{a_n}{n}=2b_n+2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변에 $n=2$ 를 대입하면

$$\frac{a_2}{b_2+1}=4 \Rightarrow b_2=\frac{3}{2} \quad (\because\ a_2=10)$$

이때 $b_1=\frac{1}{2}$ 이므로 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비는 3 이다.

따라서 $\boxed{\text{(나)}} = q = 3$ 이다.

$$\sum_{n=1}^{5}\frac{a_n}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{5}(2b_n+2) \quad (\because ㉡)$$

$$\Rightarrow \frac{3^5-1}{3-1}+10=131$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{(다)}} = r = 131$$

$$\therefore\ p+q+r=2+3+131=136$$

정답 ①

13 ●●● 1~2분

접선의 방정식 도형의 넓이

풀이

$$f(x)=x^3-4x^2+6x-8 \Rightarrow f'(x)=3x^2-8x+6 \Rightarrow f'(1)=1$$

$f(1)=-5$, $f'(1)=1$ 이므로 점 P 에서의 접선의 방정식은

$$y=(x-1)-5 \Rightarrow y=x-6$$

이제 직선 $y=x-6$ 이 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점을 구해보자. 두 식을 연립하면

$$x^3-4x^2+6x-8=x-6 \Rightarrow x^3-4x^2+5x-2=0 \Rightarrow (x-1)^2(x-2)=0$$

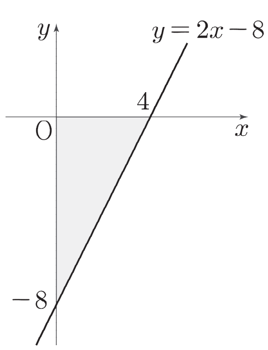
즉, 직선 $y=x-6$ 은 곡선 $y=f(x)$ 와 $x=1$ 에서 접하고 $x=2$ 에서 만나므로 점 Q 의 x 좌표가 2 임을 알 수 있다.[1)]

$$\begin{cases} f(2)=8-16+12-8=-4 \Rightarrow Q(2,\ -4) \\ f'(2)=12-16+6=2 \end{cases}$$

따라서 점 Q 에서의 접선의 방정식은

$$y=2(x-2)-4 \Rightarrow y=2x-8$$

이므로 점 Q 에서의 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형을 그려보면 다음과 같다.



$\therefore$ (구하는 도형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times4\times8=16$

정답 ⑤

PLUS

1) 삼차방정식의 세 실근의 합을 활용하면 인수분해를 할 필요 없이 $x=2$를 구할 수 있다. 직선과 연립해도 이차항의 계수는 변하지 않으므로

(방정식 $f(x)=0$ 의 세 실근의 합)
$=$ (방정식 $f(x)=x-6$ 의 세 실근의 합) $=4$
$\Downarrow$
$x=1$ 에서 접하므로 세 실근은 $1,\ 1,\ k \Rightarrow k=2$

14 ●●● 5~10분

삼각함수의 그래프 | 실근의 합

두 상수 $a\,(a\neq 0)$, b에 대하여 닫힌구간 $[0,\,2\pi]$에서 정의된 함수

❶
$$f(x)=\begin{cases} 3\sin x & (0\le x<\pi) \\ a\cos x+b & (\pi\le x\le 2\pi) \end{cases}$$

가 있다. $0\le t\le 2\pi$인 실수 t에 대하여 ❷ x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되도록 하는 서로 다른 모든 실수 t의 개수가 4일 때, a^2+b^2의 값은? [4점]

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ 7 ④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

SCAN

기출 표현

❶ 특정 구간의 함수가 주어진 구간별 함수

$0\le x<\pi$에서는 함수 $f(x)$가 $3\sin x$라고 주어진 상태다.
함수가 주어진 구간을 이용하여 함수가 주어지지 않은 구간을 추론하자.

❷ 방정식을 만족시키는 모든 x의 값의 합

x에 대한 방정식이므로 $f(t)$는 상수함수처럼 해석해야 한다.
방정식의 서로 다른 실근의 합을 중점적으로 해석하자.
상황에 따라 방정식의 좌변과 우변을 각각의 함수로 보고 두 그래프의 교점의 x좌표의 합으로 해석할 수도 있다.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

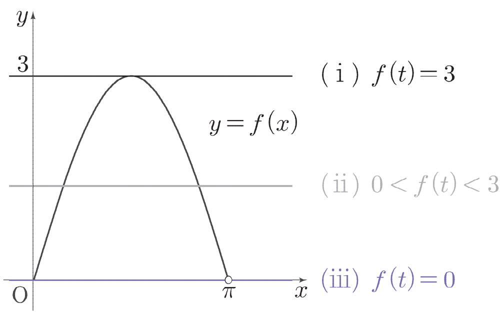
FLOW 1 함수를 알고 있는 구간에서 조건 해석하기

$0 \le x < \pi$ 에서 $f(x) = 3\sin x$ 로 알고 있으므로

기출 표현 ❶

x 에 대한 방정식 $f(x) = f(t)$ 의 실근 중 $0 \le x < \pi$ 인 실근의 합만 먼저 구해보자.

함수 $y = f(x)$ $(0 \le x < \pi)$의 그래프를 그려보면



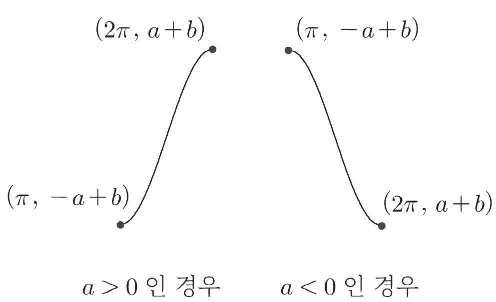
인데 $f(t)$ 의 값에 따라 범위를 나누면

기출 표현 ❷

(i) $f(t) = 3$ 이면 실근의 합은 $\frac{\pi}{2}$
(ii) $0 < f(t) < 3$ 이면 실근의 합은 π
(iii) $f(t) = 0$ 이면 실근의 합은 0

임을 알 수 있다. 즉, $0 \le f(t) \le 3$ 에서 조건을 만족한다면 $\pi \le x \le 2\pi$ 에서 x 에 대한 방정식 $f(x) = f(t)$ 의 실근이 반드시 존재해야 한다.

이때 $f(x) = a\cos x + b$ $(\pi \le x \le 2\pi)$의 그래프의 개형을 그려보면



이므로 $0 \le f(t) \le 3$ 에서 조건을 만족한다면 방정식 $a\cos x + b = f(t)$ $(0 \le f(t) \le 3)$을 만족하는 x 의 값의 개수는 1 일 수밖에 없다.

FLOW 2 조건을 만족하는 순간 살펴보기

$f(t)$ 의 값에 따라 경우를 나눠 실근의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되는 순간을 살펴보면

(i) $f(t) = 3$ 인 경우
방정식 $a\cos x + b = f(t)$ 를 만족하는 실근이 $\frac{5}{4}\pi$ 여야 하고 이때의 실수 t 는 $t = \frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{4}\pi$ 로 2 개이다.

(ii) $0 < f(t) < 3$ 인 경우
$a\cos x + b = f(t)$ 를 만족하는 실근이 $\frac{3}{4}\pi$ 여야 하는데 이는 $\pi \le x \le 2\pi$에 모순이다.

(iii) $f(t) = 0$ 인 경우
방정식 $a\cos x + b = f(t)$ 를 만족하는 실근이 $\frac{7}{4}\pi$ 여야 하고 이때의 실수 t 는 $t = 0$, $\frac{7}{4}\pi$ 로 2 개이다.

(iv) $f(t) > 3$ 또는 $f(t) < 0$ 인 경우
방정식 $a\cos x + b = f(t)$ 를 만족하는 실근이 $\frac{7}{4}\pi$ 여야 하고 이때의 실수 t 는 $t = \frac{7}{4}\pi$ 로 1 개이다.

따라서 서로 다른 모든 실수 t 의 개수가 4 이려면 (i)과 (iii)을 동시에 만족해야 한다.

$$f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 3 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}a + b = 3$$

$$f\left(\frac{7}{4}\pi\right) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}a + b = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{2}\sqrt{2}, \quad b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \ a^2 + b^2 = \left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$$

정답 ②

CHECK

✔ 기출 표현

1 특정 구간의 함수가 주어진 구간별 함수

- [x] $0 \le x < \pi$ 인 상황을 먼저 해석한 후 $\pi \le x \le 2\pi$ 인 상황을 해석했다.

2 방정식을 만족시키는 모든 x 의 값의 합

- [x] $f(t)$ 를 상수로 보고 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=f(t)$ 의 그래프를 그렸다. 이때 $f(t)$ 의 범위를 기준으로 나누어 교점의 x 좌표의 합을 구했다.
- [x] **Recall** 250920

Recall 2025학년도 9월 20번

닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} \sin x-1 & (0 \le x < \pi) \\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$$

가 있다. $0 \le t \le 2\pi$ 인 실수 t 에 대하여 2 x 에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이 되도록 하는 모든 t 의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정답 15

15 ●●●★ 10~15분

함수의 그래프 | 구간별 함수 | 집합 조건

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} -xf(x)-ax^2 & (x \le 0) \\ \frac{1}{4}f(x)-bx^2 & (x>0) \end{cases}$$

이 ❶ 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

(가) ❷ 집합 $\{x \mid g(x)=-27\}$의 원소의 개수는 2이다.

(나) ❸ $\{x \mid g(x)=-27\} \subset \{x \mid g'(x)=0\}$

① $\frac{85}{4}$ ② $\frac{87}{4}$ ③ $\frac{89}{4}$ ④ $\frac{91}{4}$ ⑤ $\frac{93}{4}$

SCAN

기출 표현

❶ 구간별 함수의 미분가능성

미분가능하면 연속이므로 구간이 변하는 지점에서의 연속성, 미분가능성을 이용해서 식을 얻을 수 있다.

❷ $g(x)=-27$

$g(x)=-27$의 서로 다른 실근의 개수를 해석하자. 상황에 따라 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=-27$이 만나는 점의 개수로도 해석할 수 있다.

낯선 표현

❸ 집합의 포함관계

$g(x)=-27$을 만족하는 x의 값과 $g'(x)=0$을 만족하는 x의 값을 살펴본 뒤에 주어진 포함관계를 해석해 보자.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

FLOW 1 미분가능성 조건 해석하기

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 연속이다. 연속성과 미분가능성을 이용해 식을 세우면 다음과 같다.

기출 표현 ❶

연속: $0=\frac{1}{4}f(0) \Rightarrow f(0)=0$

미분가능: $g'(x)=\begin{cases} -f(x)-xf'(x)-2ax & (x<0) \\ \frac{1}{4}f'(x)-2bx & (x>0) \end{cases}$

$\Rightarrow -f(0)=\frac{1}{4}f'(0)$

$\Rightarrow f'(0)=0$

위에서 구한 $f(0)=0$, $f'(0)=0$을 이용하여 $x=0$일 때의 $g(x)$, $g'(x)$의 값도 살펴보면

$$g(0)=0,\ g'(0)=0$$

이므로 $y=g(x)$의 그래프는 원점에서 x축에 접한다.

FLOW 2 조건에 집중하며 그래프 해석하기

주어진 두 조건을 이용해 $y=g(x)$의 개형을 알아내 보자. 조건 (가), (나)를 바꿔 쓰면 다음과 같다.

기출 표현 ❷

(가) : 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=-27$은 두 점에서만 만난다.

(나) : 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=-27$이 만나는 점에서의 접선의 기울기는 0이다.

$\Downarrow$

낯선 표현 ❸

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=-27$은 두 점에서만 만나고 만나는 두 점에서 접한다. …… ㉠

편의를 위해

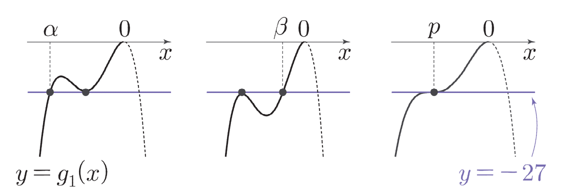
$$g(x)=\begin{cases} g_1(x) & (x\le 0) \\ g_2(x) & (x>0) \end{cases}$$

이라 하면 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$\begin{cases} g_1(x): \text{최고차항의 계수가 } -1\text{인 사차함수} \\ g_2(x): \text{최고차항의 계수가 } \frac{1}{4}\text{인 삼차함수} \end{cases}$$

이다. 이때 $g_1(0)=0$이고 $y=g_1(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 사차함수이므로 그 그래프는 $x\le 0$에서 직선 $y=-27$과 적어도 한 번 만난다.

즉, $y=g_1(x)$의 그래프는 x축, 직선 $y=-27$과 접한다. 따라서 $y=g_1(x)$의 개형은 다음 세 가지가 가능하다.



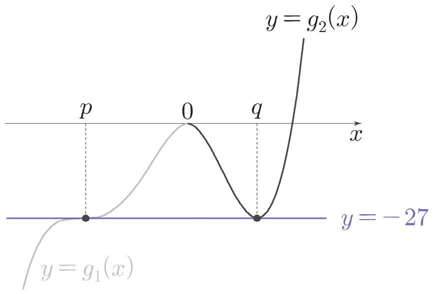
하지만 왼쪽의 두 그래프의 경우 각각 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 직선 $y=-27$과 접하지 않으므로 모순이다.
따라서, $y=g_1(x)$의 개형은 오른쪽 그래프로 확정된다.

이제 $y=g_2(x)$를 살펴보자.

㉠에 의해 $x>0$에서 $y=g_2(x)$의 그래프는 직선 $y=-27$과 한 점에서만 만나고 그 점에서 접해야 한다.

즉, $y=g_2(x)$의 그래프는 x축, 직선 $y=-27$과 접한다.

$y=g_2(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수임을 떠올리면 $y=g(x)$의 그래프를 다음과 같이 확정할 수 있다.



FLOW 3 구한 조건들을 활용하여 $g(x)$ 확정하기

먼저 $g_1(x)$의 식을 구해보자. 함수 $g_1(x)$에 대해 알아낸 정보를 바탕으로 식을 세우면 다음과 같다.

$$\begin{cases} \text{최고차항의 계수가 } -1 \text{ 인 사차함수이다.} \\ \text{방정식 } g_1(x)=-27 \text{ 이 삼중근 } x=p\,(p<0)\text{을 갖는다.} \\ \text{원점에서 } x \text{축과 접한다.} \end{cases}$$

$\Rightarrow\ g_1{}'(x)=-4x(x-p)^2=-4x^3+8px^2-4p^2x$

$\Rightarrow\ g_1(x)=-x^4+\dfrac{8}{3}px^3-2p^2x^2\ \ (\because\ \ g_1(0)=0)$[1]

이때 $g_1(p)=-27$이므로

$$g_1(p)=-p^4+\frac{8}{3}p^4-2p^4=-27 \Rightarrow -\frac{1}{3}p^4=-27$$

$$\Rightarrow p=-3\ \ (\because\ \ p<0)$$

이제 $g_2(x)$의 식을 구해보자. 함수 $g_2(x)$에 대해 알아낸 정보를 바탕으로 식을 세우면 다음과 같다.

$$\begin{cases} \text{최고차항의 계수가 } \frac{1}{4} \text{ 인 삼차함수이다.} \\ \text{방정식 } g_2(x)=-27 \text{ 이 중근 } x=q\,(q>0)\text{을 갖는다.} \\ \text{원점에서 } x \text{축과 접한다.} \end{cases}$$

$\Rightarrow\ g_2{}'(x)=\dfrac{3}{4}x(x-q)=\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{3}{4}qx$

$\Rightarrow\ g_2(x)=\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{3}{8}qx^2\ \ (\because\ \ g_2(0)=0)$[2]

마찬가지로 $g_2(q)=-27$이므로

$$g_2(q)=\frac{1}{4}q^3-\frac{3}{8}q^3=-27 \Rightarrow -\frac{1}{8}q^3=-27$$

$$\Rightarrow q=6\ \ (\because\ \ q>0)$$

따라서 $g(x)$의 식을 써 보면 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} -x^4-8x^3-18x^2 & (x\le 0) \\ \dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{9}{4}x^2 & (x>0) \end{cases}$$

FLOW 4 $a+b$ 의 값 구하기

이때 문제에 주어진 $g(x)$ 의 식에서

$$\begin{cases} -xf(x)-ax^2=-x^4-8x^3-18x^2 & \cdots\cdots ㉡ \\ \frac{1}{4}f(x)-bx^2=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

이라는 항등식을 세울 수 있다. ㉡의 양변을 $-x$ 로 나누고 ㉢의 양변에 4를 곱하면

$$\begin{cases} f(x)+ax=x^3+8x^2+18x \\ f(x)-4bx^2=x^3-9x^2 \end{cases}$$

첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면

$$ax+4bx^2=17x^2+18x \Rightarrow a=18,\ b=\frac{17}{4}$$

$$\therefore\ a+b=18+\frac{17}{4}=\frac{89}{4}$$

정답 ③

PLUS

1) 비율관계를 활용할 수도 있다. 사차함수 $g_1(x)$ 에 대하여 방정식 $g_1(x)+27=0$ 이 삼중근을 갖는 경우

$$g_1(x)+27=-(x-p)^3\left(x+\frac{p}{3}\right)$$

이므로 $g_1(0)=0$ 에서 $p=-3$ 을 바로 구할 수 있다.

2) 마찬가지로 비율관계를 활용할 수도 있다. 삼차함수 $g_2(x)$ 에 대하여 방정식 $g_2(x)+27=0$ 이 중근을 갖는 경우

$$g_2(x)+27=\frac{1}{4}(x-q)^2\left(x+\frac{q}{2}\right)$$

이므로 $g_2(0)=0$ 에서 $q=6$ 을 바로 구할 수 있다.

CHECK

✓ 기출 표현

❶ 구간별 함수의 미분가능성

☑ 연속성과 미분가능성을 이용해 $g(0)$, $g'(0)$ 의 값을 구하고, 그로부터 $g(x)$ 의 특징을 알아냈다.

❷ $g(x)=-27$

☑ $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-27$ 이 만나는 점이 단 2개뿐임을 이용해 $x>0$ 에서의 개형을 확정했다.

☑ **Recall** 250621

✓ 낯선 표현

❸ 집합의 포함관계

☑ $g(x)=-27$ 을 만족하는 모든 x 에 대하여 $g'(x)=0$ 이어야 함을 이용하여 $x\le 0$ 에서의 개형을 확정했다.

Recall 2025학년도 6월 21번

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a)\le 0$ 인 실수 a 의 최댓값은 2이다.

(나) ❷ 집합 $\{x\,|\,f(x)=k\}$ 의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k 의 최솟값은 $\frac{8}{3}$ 이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=0$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

정답 15

Insight

그래프 추론에 다항함수의 차수 분석을 섞어 새로움을 꾀한 문제였습니다. 집합 조건이 어렵지는 않으나, $g'(x)=0$ 이라는 조건에서 삼중근일 가능성을 놓쳤다면 체감 난도는 높았을 것입니다. 후반부 계산량이 많으니 아쉬운 실수가 생기지 않도록 침착하게 풀이하는 것이 중요했습니다.

16 ●●● 10~20초

귀납수열

풀이

$$a_2=a_1^2-3 \Rightarrow a_2=6 \ (\because \ a_1=3)$$
$$a_3=a_2^2-6 \Rightarrow a_3=30$$

정답 30

17 ●●● 10~20초

부정적분

풀이

$$f(x)=4x^3-3x^2+2$$
$$\Rightarrow F(x)=x^4-x^3+2x+C \ (C\text{는 적분상수})$$

$F(1)=5$ 이므로

$$F(1)=1-1+2+C=5 \Rightarrow C=3$$

$\therefore \ F(2)=16-8+4+C=15$

정답 15

18 ●●● 10~20초

코사인법칙

풀이

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\cos A$$
$$=6^2+8^2+2\cdot6\cdot8\cdot\frac{1}{4}=124$$

정답 124

19 ●●● 20~30초

함수의 극대·극소

풀이

$$f(x)=x^3-6x^2+ax+b \Rightarrow f'(x)=3x^2-12x+a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극대이므로

$$f'(1)=3-12+a=0$$
$$\Rightarrow a=9$$
$$\Rightarrow f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극소이고 이때의 극솟값이 5 이므로

$$f(3)=3^3-6\cdot3^2+3a+b=5 \Rightarrow b=5$$

$\therefore \ a+b=9+5=14$

정답 14

20 ●●● 3~5분

귀납수열 나열과 규칙 파악

풀이

$n=1$ 부터 10 까지 대입하여 a_n 과 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 를 구해보자.

n	1	2	3	4	5
a_n	1	2	3	4	-10
$\sum_{k=1}^{n} a_k$	1	3	6	10	0

n	6	7	8	9	10
a_n	6	7	8	9	-30
$\sum_{k=1}^{n} a_k$	6	13	21	30	0

나열해보니 $n=8$ 일 때

$$20 \le \sum_{k=1}^{n} a_k < 30 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

을 만족시킴을 알 수 있다. 또한

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{5p} a_k = 0$$

을 추측할 수 있다.[1] 따라서 n 을 5 의 배수 단위로 끊어서 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 의 값을 구해보자.

(i) $11 \le n \le 15$ 인 경우

$$\sum_{k=1}^{11} a_k = 11$$

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = 11+12=23 \Rightarrow n=12 \text{ 일 때 ㉠ 만족}$$

$$\sum_{k=1}^{13} a_k = 11+12+13=36$$

$\sum_{k=1}^{13} a_k < \sum_{k=1}^{14} a_k$ 이므로 이후는 나열해보지 않아도 ㉠을 만족하지 않음을 쉽게 알 수 있다.

(ii) $16 \le n \le 20$ 인 경우

$$\sum_{k=1}^{16} a_k = 16$$

$$\sum_{k=1}^{17} a_k = 16+17=33$$

따라서 이 경우 ㉠을 만족시키지 못한다.

(iii) $21 \le n \le 25$ 인 경우

$$\sum_{k=1}^{21} a_k = 21 \Rightarrow n=21 \text{ 일 때 ㉠ 만족}$$

$$\sum_{k=1}^{22} a_k = 21+22=43$$

(iv) $26 \le n \le 30$ 인 경우

$$\sum_{k=1}^{26} a_k = 26 \Rightarrow n=26 \text{ 일 때 ㉠ 만족}$$

$$\sum_{k=1}^{27} a_k = 26+27=53$$

(v) $31 \le n \le 35$ 인 경우

$$\sum_{k=1}^{31} a_k = 31$$

따라서 이 경우 ㉠을 만족시키지 못하며 $n>35$ 인 모든 n 은 ㉠을 만족시키지 못한다.

$\therefore\ 8+12+21+26=67$

정답 67

PLUS

1) 모든 자연수 p 에 대하여

$$\begin{aligned} & a_{5p-4}+a_{5p-3}+a_{5p-2}+a_{5p-1}+a_{5p} \\ &= (5p-4)+(5p-3)+(5p-2)+(5p-1)+(-20p+10) \\ &= 0 \end{aligned}$$

이므로 수식으로 보일 수도 있다.

21 ●●● 8~12분

정적분 절댓값 함수

최고차항의 계수가 1 이고 $f(0)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

❶❷ $$g(x)=\int_0^x (f(t)-|f(t)|)dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가) ❸ $x \ge k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g'(x)=0$ 을 만족시키는 실수 k 의 최솟값이 2 이다.

(나) $g(2)=-8$

SCAN

기출 표현

❶ 정적분으로 정의된 함수

양변에 $x=0$ 을 대입하고 양변을 미분해 볼 수 있다.

❷ $f(t)-|f(t)|$

절댓값 안의 $f(t)$ 의 범위에 따라 경우를 나누어야겠다.
양수인 구간에서는 0, 음수인 구간에서는 함숫값이 2 배가 되는 함수이다.

낯선 표현

❸ $x \ge k$ 인 모든 실수 x 에 대하여~

표현이 복잡해서 해석이 어려워 보인다.
일단 $g'(x)=0$ 부터 알아보고 생각해 보자.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

FLOW 1 가능한 $f(x)$ 의 개형 파악하기

편의를 위해 $h(x)=f(x)-|f(x)|$ 라 하자.
$f(x)$ 의 부호에 따라 범위를 나누면 함수 $h(x)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$h(x)=\begin{cases} 2f(x) & (f(x)<0) \\ 0 & (f(x)\geq 0) \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

주어진 $g(x)$ 의 식에 $x=0$ 을 대입하고, 미분하면

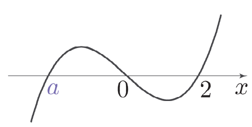
기출 표현 ❶

$g(0)=0,\ g'(x)=h(x)$

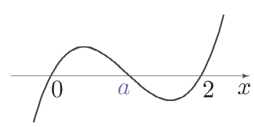
이고, 위 식과 ㉠을 이용해 조건 (가)를 해석하면

$x\geq k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g'(x)=0$ 을 만족시키는 실수 k 의 최솟값이 2
$\Rightarrow$ $x\geq k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\geq 0$ 을 만족시키는 실수 k 의 최솟값이 2
낯선 표현 ❸
$\Rightarrow$ $f(2)=0,\ f'(2)>0$ 이고 $x\geq 2$ 에서 $f(x)\geq 0$

이때 $f(0)=0$ 이므로 가능한 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$(a\leq 0)$



$(0<a<2)$

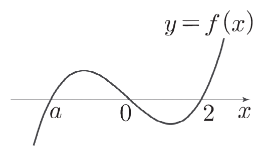
FLOW 2 $f(x)$ 의 식 구하기

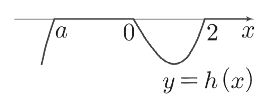
FLOW 1 의 두 개형에서 모두

$$f(x)=x(x-a)(x-2)=x^3-(a+2)x^2+2ax$$

라고 쓸 수 있다. 이제 조건 (나)를 이용해 보자.

먼저 $a\leq 0$ 인 경우를 살펴보면 두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.





즉, 조건 (나)에서

기출 표현 ❷

$$g(2)=\int_0^2 h(x)dx=\int_0^2 2f(x)dx=-8$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x)dx=-4$$

이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx&=\int_0^2\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_0^2\\&=\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}=-4\end{aligned}$$

$\Rightarrow a=-2$

이는 $a\leq 0$ 이라는 조건에 부합하므로 a 의 값을 대입하여 답을 구할 수 있다.★

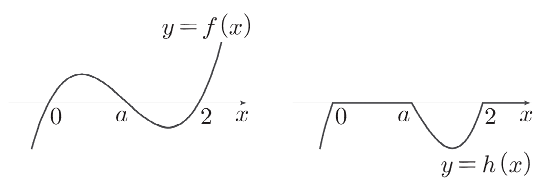
$\therefore\ f(x)=x(x+2)(x-2)\ \Rightarrow\ f(4)=48$

정답 48

사고 확장

★에서 $0<a<2$ 인 경우는 확인하지 않았는데
$0<a<2$ 인 경우에 정말 성립하지 않는지 확인하고
넘어가자.

$0<a<2$ 일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프의
개형은 다음과 같다.



즉, 조건 (나)에서

$$g(2)=\int_a^2 h(x)dx=\int_a^2 2f(x)dx=-8$$

$$\Rightarrow \int_a^2 f(x)dx=-4$$

이므로

$$\int_a^2 f(x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\right]_a^2$$

$$=\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{3}a^3+\frac{4}{3}a-\frac{4}{3}=-4$$

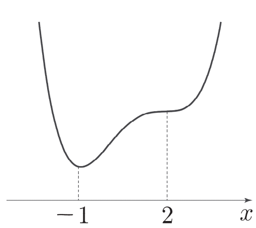
$$\Rightarrow a^4-4a^3+16a+32=0$$

이때 $p(x)=x^4-4x^3+16x+32$ 라 하면

$$p'(x)=4x^3-12x^2+16=4(x-2)^2(x+1)$$

$$p(-1)=21,\ p(2)=48$$

이므로 그림과 같이 모든 실수 x 에 대하여 $p(x)>0$ 이다.



따라서 $a^4-4a^3+16a+32=0$ 을 만족시키는 a 는
존재하지 않는다.

☑ CHECK

✓ 기출 표현

❶ 정적분으로 정의된 함수

☑ $x=0$ 을 대입하여 $g(0)=0$ 을 얻어냈고
주어진 식을 미분하여 $g'(x)$ 의 식을 구할 수 있었다.

❷ $f(t)-|f(t)|$

☑ $f(t)\geq 0$ 일 때는 0, $f(t)<0$ 일 때는 $2f(t)$ 임을
이용하여 $y=g'(x)$ 의 그래프를 그려볼 수 있었다.

☑ **Recall** 250615

✓ 낯선 표현

❸ $x\geq k$ 인 모든 실수 x 에 대하여~

☑ k 의 최솟값이 2임을 이용하여 $y=f(x)$ 의 식이
$f(x)=x(x-a)(x-2)$ $(a<2)$ 와 같음을 얻었다.

Recall

2025학년도 6월 15번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 상수 $k(k\geq 0)$ 에
대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x\leq k) \\ f(x) & (x>k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고
미분가능하다.
(나) 모든 실수 x 에 대하여

❷ $\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}dt\geq 0$ 이고

$\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}dt\geq 0$

이다.

$g(k+1)$ 의 최솟값은? [4점]

① $4-\sqrt{6}$ ② $5-\sqrt{6}$ ③ $6-\sqrt{6}$
④ $7-\sqrt{6}$ ⑤ $8-\sqrt{6}$

정답 ②

Insight

250615의 조건 (나)와 사실상 동일한 형태의 절댓값 함수가 등장했습니다. 이 함수의 해석이 낯설었던 학생이 있다면 250615을 다시 한번 풀어봅시다.
실제 시험에서는 한 가지 경우에서 답을 얻었다면 거기서 계산을 끝내도 좋지만 복습할 때는 다른 경우들이 왜 성립하지 않는지까지도 공부하는 것을 추천합니다.

22 ●●● 8~12분

지수함수 그래프 | 치환

❶ 자연수 k에 대하여 두 함수

❷ $$f(x)=2^x, \quad g(x)=2\times 4^x+\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

이 있다. 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. ❸ 두 점 A, B 사이의 거리가 $\frac{1}{5}$이 되도록 하는 실수 t의 개수가 2이고 이 ❹ 두 실수의 합을 p라 할 때, $k\times\left(\frac{1}{2}\right)^p$의 값을 구하시오. [4점]

SCAN

기출 표현

❶ 자연수 k

자연수 조건을 보니 이를 통해 k를 확정해야 하는 상황일 수 있다. 따라서 k가 포함된 부등식도 중요하게 관찰해야 하며 필요시 자연수를 대입하여 상황을 이해할 수 있다.

❷ 밑이 다른 두 지수함수

밑이 다른 두 지수함수는 평행, 대칭이동 관계를 찾을 수 없으므로 확대·축소 관계가 아닐지 의심해 보자. 관계가 안 보인다면 초월방정식을 풀어야 한다.

❸ △=□가 되도록 하는 실수 t의 개수

t에 대한 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 해석하자. 상황에 따라 방정식의 좌변과 우변을 각각의 함수로 보고 두 그래프의 교점의 개수로 해석할 수 있다.

낯선 표현

❹ 특이한 구하는 값

두 실수의 합만 구할 수 있고 각각이 어떤 실수인지는 알지 못하는 상황일 수도 있다.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

FLOW 1 주어진 방정식을 해석하기 편한 형태로 바꾸기

점 A의 y좌표는 2^t, 점 B의 y좌표는 $2\times4^t+\left(\frac{1}{2}\right)^k$ 이므로

$$\left|2^t-2\times4^t-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right|=\frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow\ 2^t-2\times4^t-\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{5}$$

또는 $2^t-2\times4^t-\left(\frac{1}{2}\right)^k=-\frac{1}{5}$

인 실수 t의 개수는 2이다. 따라서

기출 표현 ❸

t에 대한 방정식 $2^t-2\times4^t-\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{5}$ …… ㉠

의 서로 다른 실근의 개수와

t에 대한 방정식 $2^t-2\times4^t-\left(\frac{1}{2}\right)^k=-\frac{1}{5}$ …… ㉡

의 서로 다른 실근의 개수의 합은 2

이다. 이때

기출 표현 ❷

$2^t=X\ (X>0)$으로 치환

하면 ㉠과 ㉡을 X에 대한 이차방정식으로 해석할 수 있다.

FLOW 2 이차방정식의 서로 다른 실근의 개수 구하기

우선 ㉠을 해석해 보자. ㉠의 우변을 0이 되도록 정리하면

$$㉠\ \Rightarrow\ 2X^2-X+\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{1}{5}=0$$

㉠은 X에 대한 이차방정식이므로 판별식을 생각하면

$$D_1=1^2-4\times2\left(2^{-k}+\frac{1}{5}\right)=-8\times2^{-k}-\frac{3}{5}<0$$

따라서 ㉠은 실근을 갖지 않는다.

이제 ㉡을 해석해보자. ㉡의 우변을 0이 되도록 정리하면

$$㉡\ \Rightarrow\ 2X^2-X+\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{1}{5}=0$$

마찬가지로 판별식을 생각하면

$$D_2=1^2-4\times2\left(2^{-k}-\frac{1}{5}\right)=\frac{13}{5}-8\times2^{-k}$$

이때 ㉠이 실근을 갖지 않으므로

㉡의 서로 다른 실근의 개수는 2

$$\Rightarrow\ D_2>0\ \Rightarrow\ \frac{13}{5}-8\times2^{-k}>0\ \Rightarrow\ 2^{-k}<\frac{13}{40}$$

한편 $2^t=X>0$이므로

X에 대한 방정식 $2X^2-X+\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{1}{5}=0$

의 서로 다른 실근은 모두 양수여야 한다. 이때 두 양의 실근의 곱은 양수이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{1}{5}>0\ \Rightarrow\ 2^{-k}>\frac{1}{5}$$

기출 표현 ❶

$$\Rightarrow\ \frac{1}{5}<2^{-k}<\frac{13}{40}\ \Rightarrow\ k=2$$ [1)]

FLOW 3 p의 값 구하기

$k=2$ 임을 구했으므로

t에 대한 방정식 $2\times4^t-2^t+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{5}=0$ 의

서로 다른 실근을 t_1, t_2라 할 때, $t_1+t_2=p$

이다. 즉,

X에 대한 방정식 $2X^2-X+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{5}=0$ 의

서로 다른 실근을 2^{t_1}, 2^{t_2}이라 할 때, $2^{t_1+t_2}=2^p$

이다.

낯선 표현 ❹

이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면

$$2^{t_1}\times2^{t_2}=\frac{1}{2}\times\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{40}=2^p$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^p=40$$

$$\therefore\ k\times\left(\frac{1}{2}\right)^p=2\times40=80$$

정답 80

PLUS

1) k는 자연수이므로 k에 1부터 대입하여 부등식을 만족하는 k를 찾아냈다.

$$\frac{1}{5}<2^{-k}<\frac{13}{40} \Rightarrow \frac{40}{13}<2^k<5 \Rightarrow \log_2\frac{40}{13}<k<\log_2 5$$
$$\Rightarrow k=2$$

와 같이 변형해도 같은 결과를 얻을 수 있다.

CHECK

✓ 기출 표현

❶ 자연수 k

☑ 예상대로 k에 대한 부등식이 등장하여 자연수 조건을 통해 k를 확정했다. 이때 $k=1, 2, \cdots$ 을 대입하여 계산을 줄였다.

❷ 밑이 다른 두 지수함수

☑ 확대·축소가 아닌 $2^t=X$, $4^t=X^2$ 으로 치환하여 이차방정식으로 해석했다.

☑ **Recall** 261122

❸ △=□가 되도록 하는 실수 t의 개수

☑ 주어진 식이 $X\,(X>0)$ 에 대한 이차방정식이었으므로 서로 다른 실근의 개수 조건을 판별식과 실근의 곱을 통해 해석했다.

✓ 낯선 표현

❹ 특이한 구하는 값

☑ 근과 계수의 관계를 이용하여 p의 값을 구했다. $2^t=X$로 치환한 후 해석하고 있었기에 t의 실근의 합은 X의 실근의 곱으로 해석됐다.

Recall 2026학년도 11월 22번

곡선 ❷ $y=\log_{16}(8x+2)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a, b)$와 곡선 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 위의 점 B가 제1사분면에 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 직선 OB 위에 있고 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{77}{8}, \frac{133}{8}\right)$일 때, $a\times b=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

정답 457

Insight

최근 지수·로그함수는 22번에 연속적으로 출제되고 있습니다.
출제될 때마다 당혹스럽거나 발상적일 수도 있는 요소가 들어있었는데 이럴 때일수록 문제를 먼저 SCAN에서 해야 하는 행동과 확장될 수 있는 풀이들을 생각해 보는 것이 중요합니다.
261122와 이번 22번은 밑이 다른 지수·로그함수를 출제했다는 유사점이 있지만 풀이 방향은 전혀 다릅니다. 두 문제를 비교하며 두 가지 풀이를 모두 자신의 것으로 만들어 보시기 바랍니다.

23

10~20초

중복조합

풀이

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21$$

정답 ②

24

20~30초

중복순열

풀이

구하는 경우의 수는 서로 다른 3개(A, B, C) 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 개수와 같다.

∴ (구하는 경우의 수)$=3^4=81$

정답 ④

25

1~2분

같은 것이 있는 순열

풀이

양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 4가 되는 경우는

$$\begin{cases} \text{(i) 두 수가 } 2,\ 2\text{인 경우} \\ \text{(ii) 두 수가 } 1,\ 3\text{인 경우} \end{cases}$$

와 같이 두 가지가 있으므로 경우를 나누어 생각해 보자.

(i) 두 수가 2, 2인 경우
양 끝에 2, 2를 고정시키고 사이에 1, 1, 1, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!2!}=10$이다.

(ii) 두 수가 1, 3인 경우
양 끝에 1, 3을 배열하는 경우의 수는 $2!=2$이고, 사이에 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!2!1!}=30$이므로 구하는 경우의 수는

$$2 \times 30 = 60$$

따라서 (i), (ii)에 의해 전체 경우의 수는

$$10+60=70$$

정답 ①

26 ●●● 2~3분

중복조합 절댓값

풀이

절댓값 안의 식 $d-1$의 부호가 바뀌는 지점을 살펴보면

$$\begin{cases} d-1<0 \Rightarrow d=0 \ (\because\ d\text{는 음이 아닌 정수}) \\ d-1 \ge 0 \Rightarrow d \ge 1 \end{cases}$$

이므로 $d=0$일 때와 $d\ge 1$일 때로 경우를 나누어 생각해 보자.

(i) $d=0$인 경우

$a+b+c+1=4$, 즉 $a+b+c=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$$_3H_3={}_5C_3=10$$

(ii) $d\ge 1$인 경우

$a+b+c+(d-1)=4$에서 $d-1=k$라 하면
$k\ge 0$이므로 구하는 경우의 수는 $a+b+c+k=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, k의 순서쌍 (a, b, c, k)의 개수와 같다.

$$_4H_4={}_7C_4=35$$

따라서 (i), (ii)에 의해 전체 경우의 수는

$$10+35=45$$

정답 ③

27 ●●● 5~8분

중복순열 집합의 개수

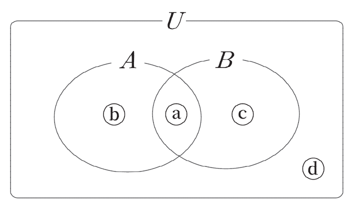
풀이

먼저 조건 (나)를 해석하자. 절댓값이 같은 수끼리 묶어서

-1, 1 …… ㉠
-2, 2 …… ㉡
-4, 4 …… ㉢

라 하면 $A\cap B$에는 절댓값이 같은 수가 항상 쌍으로 존재해야 하므로 $A\cap B$는 위의 각 묶음을 하나의 원소로 가진다고 생각할 수 있다.

이때 조건 (가)에서 $n(A\cap B)\ge 2$이므로 $n(A\cap B)=2$, 4, 6일 때로 경우를 나누어 생각해 보자.



(i) $n(A\cap B)=2$인 경우

㉠, ㉡, ㉢ 중 1개를 택하여 ⓐ 부분에 넣는 방법의 수는 $_3C_1=3$이고, 남은 4개의 원소를 ⓑ, ⓒ, ⓓ 부분에 넣는 방법의 수는 $3^4=81$이므로 구하는 경우의 수는 $3\times 81=243$이다.

(ii) $n(A\cap B)=4$인 경우

㉠, ㉡, ㉢ 중 2개를 택하여 ⓐ 부분에 넣는 방법의 수는 $_3C_2=3$이고, 남은 2개의 원소를 ⓑ, ⓒ, ⓓ 부분에 넣는 방법의 수는 $3^2=9$이므로 구하는 경우의 수는 $3\times 9=27$이다.

(iii) $n(A\cap B)=6$인 경우

㉠, ㉡, ㉢ 중 3개를 ⓐ 부분에 넣는 방법의 수는 1이고, 남은 원소가 없으므로 구하는 경우의 수는 1이다.

따라서 (i)~(iii)에 의해 전체 경우의 수는

$$243+27+1=271$$

정답 ⑤

28

●●● 8~10분

같은 것이 있는 순열 함수의 개수 여사건

두 집합 $X=\{x \mid x$는 9 이하의 자연수$\}$, $Y=\{1, 2, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수는? [4점]

(가) ❶ 집합 $\{x \mid f(x)=1, x \in X\}$의 원소의 개수는 3이고,
집합 $\{x \mid f(x)=2, x \in X\}$의 원소의 개수는 2이고,
집합 $\{x \mid f(x)=4, x \in X\}$의 원소의 개수는 4이다.

(나) 7 이하의 모든 자연수 x에 대하여 ❷ $f(x)+f(x+1) \neq f(x+2)$이다.

① 920 ② 925 ③ 930 ④ 935 ⑤ 940

SCAN

낯선 표현

❶ 주어진 함숫값을 갖는 원소의 개수

$3+2+4=9$이니 정의역의 모든 원소의 함숫값에 대한 정보를 줬다.

❷ $f(x)+f(x+1) \neq f(x+2)$

식에 '$\neq$'가 있으므로 여사건인 $f(x)+f(x+1)=f(x+2)$를 살펴보자. 7 이하의 모든 자연수 x의 값을 대입해서 살펴볼 수도 있을 것 같다.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

FLOW 1 조건 (가) 해석하기

조건 (가)를 해석하면 정의역 X의 원소 9개 중에서

$$\begin{cases} \text{함숫값이 } 1 \text{ 인 원소가 } 3 \text{개} \\ \text{함숫값이 } 2 \text{ 인 원소가 } 2 \text{개} \\ \text{함숫값이 } 4 \text{ 인 원소가 } 4 \text{개} \end{cases}$$

임을 알 수 있다. 따라서 함숫값에 해당하는 9개의 숫자를 나열하여

첫 번째 자리는 $f(1)$에 대응
두 번째 자리는 $f(2)$에 대응
⋮
아홉 번째 자리는 $f(9)$에 대응

하면 조건 (가)를 만족하는 함수 $f: X \to Y$가 등장한다. 즉, 조건 (가)를 만족하는 함수의 개수는

낯선 표현 ❶

함숫값에 해당하는 9개의 숫자
1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4를
일렬로 나열하는 경우의 수

라고 생각할 수 있다.

(조건 (가)를 만족하는 함수의 개수)

$$= \frac{9!}{3!2!4!} = 1260 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

FLOW 2 조건 (나) 해석하기

이제 조건 (나)를 해석해 보자.
여사건으로 생각해 보면 $f(x)+f(x+1)=f(x+2)$인 경우는

낯선 표현 ❷

$$\begin{cases} f(x)=1,\ f(x+1)=1,\ f(x+2)=2 \text{ 인 경우} & (ⓐ) \\ f(x)=2,\ f(x+1)=2,\ f(x+2)=4 \text{ 인 경우} & (ⓑ) \end{cases}$$

뿐이다. 이를 FLOW 1 처럼 9개의 숫자를 나열하는 관점으로 생각해 보면

$$\begin{cases} 1,\ 1,\ 2 \text{가 연속해서 나타나는 경우 } (ⓐ) \\ 2,\ 2,\ 4 \text{가 연속해서 나타나는 경우 } (ⓑ) \end{cases}$$

라고 할 수 있다.

즉, 구하는 경우의 수는 ㉠에서 ⓐ 또는 ⓑ에 해당하는 경우의 수를 뺀 것이다. 이때, ⓐ와 ⓑ가 동시에 나타나는 경우가 존재하므로 이 경우의 수는 더해줘야 한다.

FLOW 3 경우의 수 구하기

(i) 1, 1, 2가 연속해서 나타나는 경우 (ⓐ)

1, 1, 2를 한 묶음으로 생각하자.

$(1, 1, 2)$, 1, 2, 4, 4, 4, 4를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4!}=210$$

(ii) 2, 2, 4가 연속해서 나타나는 경우 (ⓑ)

2, 2, 4를 한 묶음으로 생각하자.

$(2, 2, 4)$, 1, 1, 1, 4, 4, 4를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{3!3!}=140$$

(iii) ⓐ, ⓑ 모두 만족하는 경우

2가 2개뿐이므로 1, 1, 2와 2, 2, 4가 모두 연속하여 나타나는 경우는 1, 1, 2, 2, 4뿐이다.

1, 1, 2, 2, 4를 한 묶음으로 생각하자.

$(1, 1, 2, 2, 4)$, 1, 4, 4, 4를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!}=20$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$1260-210-140+20=930$$

정답 ③

CHECK

✓ 낯선 표현

❶ 주어진 함숫값을 갖는 원소의 개수

☑ 조건을 통해 각 함숫값의 개수를 파악할 수 있었고 이를 나열하여 함숫값에 대응시키면 같은 것이 있는 순열로 해석할 수 있었다.

❷ $f(x)+f(x+1)\neq f(x+2)$

☑ $f(x)+f(x+1)=f(x+2)$를 만족시키는 2가지 경우를 찾아내어 여사건으로 풀 수 있었다.

Insight

28번 문제는 함수의 개수를 같은 것이 있는 순열로 바라보는 관점이 중요한 문제였습니다. 이러한 아이디어를 떠올리지 못했다면 잘 기억해 두고, 언제나 상황을 유연하게 해석할 수 있도록 노력합시다.

29 ●●○ 2~4분

원순열

숫자 1, 3, 5, 7, 9가 각각 하나씩 적혀 있는 5개의 흰색 접시와 숫자 2, 4, 6, 8, 10이 각각 하나씩 적혀 있는 5개의 검은색 접시가 있다. 이 10개의 접시를 ❶ 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

> (가) 흰색 접시끼리는 ❷ 서로 이웃하지 않는다.
>
> (나) 서로 이웃한 ❸ 2개의 접시에 적혀 있는 수의 곱은 70 이하이다.

SCAN

기출 표현

❶ 원순열

$(n-1)!$로 계산하거나,

한 자리를 고정하고 일반적인 순열로 계산할 수 있다.

❷ 서로 이웃하지 않는다

서로 이웃해도 되는 검은색 접시를 먼저 놓은 뒤

그 사이사이에 흰색 접시를 놓으면 된다.

❸ 제한된 범위

주어진 수 중 두 개의 곱이 70 이하인 경우를 살펴보고,

여사건이 더 편해 보인다면 여사건을 이용하자.

NOTE

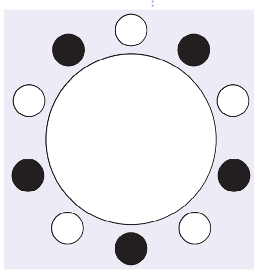
문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

FLOW 1 조건 박스 해석하기

조건 (가)에서 흰색 접시끼리는 서로 이웃하지 않으므로 흰색 접시 5개와 검은색 접시 5개는 다음 그림과 같이 배열되어야 한다.

기출 표현 ❷



또, 조건 (나)에서
(흰색 접시의 숫자)×(검은색 접시의 숫자)>70인 경우는

$$\begin{cases} \text{흰색 접시의 숫자가 } 9\text{, 검은색 접시의 숫자가 } 8 \\ \text{흰색 접시의 숫자가 } 9\text{, 검은색 접시의 숫자가 } 10 \end{cases}$$

뿐이므로

9가 적힌 접시 옆에는
8 또는 10이 적힌 접시가 올 수 없음

기출 표현 ❸

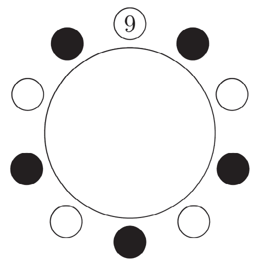
을 알 수 있다.

FLOW 2 조건을 만족하는 경우의 수 구하기

기출 표현 ❶

9가 적힌 흰색 접시를 다음과 같이 한 자리에 고정

하여 생각하자.



9가 적힌 접시의 양옆에는 2, 4, 6이 적힌 접시만 올 수 있으므로 양옆의 접시에 적힌 숫자를 결정하는 경우의 수는

$3\times2=6$

남은 검은색 접시 3개에 적힌 숫자를 결정하는 경우의 수는

$3!=6$

남은 흰색 접시 4개에 적힌 숫자를 결정하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times6\times24=864$

정답 864

CHECK

✔ 기출 표현

❶ 원순열

- [x] 한 자리를 고정하고 순열로 풀이할 수 있었다.

❷ 서로 이웃하지 않는다

- [x] 흰색 접시가 서로 이웃하지 않음을 이용하여 흰색 접시와 검은색 접시의 배치를 확정할 수 있었다.

❸ 제한된 범위

- [x] 두 수의 곱이 70 초과인 경우가 단 두 가지뿐이므로 이 경우들을 피해서 배치하여 풀이할 수 있었다.
- [x] **Recall** 250627(확통)

Recall 2025학년도 6월 확통 27번

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, ❸ 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 11이 되지 않도록 배열하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96

정답 ①

Insight

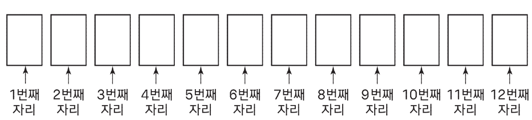
익숙한 표현들이 많이 등장한 원순열 문제였습니다.
250627(확통)과 같이 주어진 조건을 여사건으로 해석하는 원순열 문제를 풀어본 적 있다면 이 문제 또한 크게 어렵지 않았을 것입니다. 원순열의 경우 $\frac{n!}{n}$로 계산하는 것 외에도 하나의 자리를 고정하고 계산하는 방법이 있다는 사실도 잊지 맙시다.

30 ●●●★ 8~10분

중복조합

정수 -1 이 적혀 있는 6 장의 카드와 정수 1 이 적혀 있는 6 장의 카드가 있다. 이 12 장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 12 개의 자리에 각각 한 장씩 놓을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 수가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

> 11 이하의 모든 자연수 n 에 대하여
> ❶ n 번째 자리에 놓인 카드에 적혀 있는 수와 $(n+1)$ 번째 자리에 놓인 카드에 적혀 있는 수 의
> ❷ 곱을 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{11} a_n = 3$ 이다.



SCAN

기출 표현

❶ n 번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수

발문이 28예시21과 상당히 유사하다.

이 문제 또한 비슷하게 중복조합을 사용해서 풀어보자.

낯선 표현

❷ 두 수의 곱이 a_n

일단 가능한 a_n 을 모두 구해보자.

합해서 3 이 되는 경우가 무엇일지는 그 뒤에 생각하자.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

FLOW 1 박스 조건 해석하기

박스 조건을 살펴보자. 카드에 적힌 수는 -1 또는 1이므로 a_n을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$a_n=\begin{cases}1 & (n\text{번째, }(n+1)\text{번째 자리의 수가 같을 경우})\\ -1 & (n\text{번째, }(n+1)\text{번째 자리의 수가 다를 경우})\end{cases}$$

그러므로 $\sum_{n=1}^{11}a_n=3$을 만족하기 위해서는 11 이하의 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases}a_n=-1\text{을 만족하는 } n\text{이 4개}\\ a_n=1\text{을 만족하는 } n\text{이 7개}\end{cases}$$

여야 한다. 이때

$a_n=-1$
$\Rightarrow$ n번째 자리의 수가 $(n+1)$번째 자리의 수와 다르다

이므로

$a_n=-1$을 만족하는 n이 4개
$\Rightarrow$ 서로 이웃한 두 수가 다른 경우가 4번 나타난다 낯선 표현 ❷

는 뜻이다. 예를 들어 정수 1이 적힌 카드를 $\boxed{1}$, 정수 -1이 적힌 카드를 $\boxed{-1}$이라 하면 다음과 같이 나열했을 때 조건을 만족시킨다.

$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{-1}\ \boxed{-1}\ \boxed{-1}\ \boxed{-1}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{-1}\ \boxed{-1}\ \boxed{1}$

즉, 같은 숫자가 연속되어 나오는 부분을 하나의 구역으로 생각한다면 다음과 같이 5개의 구역으로 나뉘게 된다.

A	B	A	B	A

FLOW 2 경우의 수 구하기

다음과 같이 두 가지 경우를 생각할 수 있다.

$$\begin{cases}\text{구역 A에는 }\boxed{-1}\text{, 구역 B에는 }\boxed{1}\text{이 있을 경우}\\ \text{구역 A에는 }\boxed{1}\text{, 구역 B에는 }\boxed{-1}\text{이 있을 경우}\end{cases}$$

(i) 구역 A에는 $\boxed{-1}$, 구역 B에는 $\boxed{1}$이 있을 경우

각 구역에 카드를 하나씩 배치하면 $\boxed{-1}$은 3장, $\boxed{1}$은 4장이 남는다.

3개의 구역 A에 3개의 $\boxed{-1}$을 배치하는 경우의 수는 ${}_3H_3$, 2개의 구역 B에 4개의 $\boxed{1}$을 배치하는 경우의 수는 ${}_2H_4$이므로 구하는 경우의 수는

기출 표현 ❶

$${}_3H_3\times{}_2H_4=10\times5=50$$

(ii) 구역 A에는 $\boxed{1}$, 구역 B에는 $\boxed{-1}$이 있을 경우

각 구역에 카드를 하나씩 배치하면 $\boxed{-1}$은 4장, $\boxed{1}$은 3장이 남는다.

3개의 구역 A에 3개의 $\boxed{1}$을 배치하는 경우의 수는 ${}_3H_3$, 2개의 구역 B에 4개의 $\boxed{-1}$을 배치하는 경우의 수는 ${}_2H_4$이므로 구하는 경우의 수는

$${}_3H_3\times{}_2H_4=10\times5=50$$

(i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는

$$50+50=100$$

정답 100

CHECK

✓ 기출 표현

❶ n 번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수

- ☑ 발문은 28예시21과 유사했지만, 28예시21처럼 만족하는 각각의 경우를 일일이 나누어 풀이하지는 않았다. 중복조합을 사용한다는 점은 일치했다.
- ☑ **Recall** 28예시21

✓ 낯선 표현

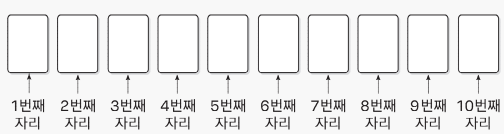
❷ 두 수의 곱이 a_n

- ☑ 이웃하는 두 자리의 수가 같을 때는 $a_n=1$, 다를 때는 $a_n=-1$ 이므로 카드에 적힌 수가 유지되거나 달라질 때를 중점으로 봐야 했다.
  $\sum$ 조건으로는 카드에 적힌 수가 몇 번 달라지는지를 알 수 있었다.

Recall 2028학년도 예시문항 21번

숫자 0이 적혀 있는 카드 2장, 숫자 1이 적혀 있는 카드 5장, 숫자 2가 적혀 있는 카드 3장이 있다. 이 10장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 10개의 자리에 다음 조건을 만족시키도록 각각 한 장씩 놓는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

> ❶ $n\,(1 \le n \le 10)$번째 자리에 놓인 카드에 적혀 있는 수를 a_n이라 할 때, $|a_{k+1}-a_k|=2$를 만족시키는 자연수 $k\,(1 \le k \le 9)$의 개수는 3이다.



① 136 ② 138 ③ 140 ④ 142 ⑤ 144

정답 ⑤

Insight

카드를 배열하여 n 번째 자리의 수에 대한 조건을 주는 발문 자체는 28예시21과 유사했지만, 문제를 푸는 핵심 아이디어인 (이웃하는 두 수의 곱이 -1 이다 $=$ 숫자가 바뀌었다) 는 낯설게 느껴졌을 수 있습니다.
확률과 통계 문제에서는 매번 다양한 상황이 등장하고, 이를 얼마나 쉽게 바꾸어 해석할 수 있는지가 관건입니다. 아이디어를 달달 외우기보다는 문제의 상황을 자신만의 논리로 해석해 보는 습관을 길러 봅시다.

23 ●●● 10~20초

수열의 극한

풀이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(12n+1)}{4n^3-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^3+n^2}{4n^3-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12+\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n^3}}$$

$$=3$$

정답 ③

24 ●●● 10~20초

수열의 극한

풀이

$\lim_{n\to\infty}(3n+2)a_n=6$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=2$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{(3n+2)a_n\times\frac{b_n}{n}\right\}=12$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n}\times\lim_{n\to\infty}a_nb_n=12 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_nb_n=4$$

정답 ④

Insight

사실 ㉠의 과정은 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$ 의 수렴성을 모르기 때문에 수학적으로 엄밀하지 않습니다. 하지만 묻는 값이 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$ 이 수렴한다는 것을 추론할 수 있고, ㉠의 과정이 답을 구하는 데 영향을 주지 않으니 실제 시험장에서 이와 같은 극한의 분배를 적극적으로 활용해도 좋습니다.

25 ●●● 30~40초
수열의 극한 | 수열의 합과 일반항의 관계

풀이

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sqrt{n+2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \quad (n \geq 2)$$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, a_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{n(n+1)}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)-n(n+1)}{\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{n(n+1)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{n(n+1)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

정답 ①

26 ●●● 2~3분
수열의 극한 | 등비수열

풀이

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n}$ 은 a^2과 $2a$의 대소 관계에 따라 두 등비수열 $\{a^{2n}\}$과 $\{(2a)^n\}$의 수렴여부가 달라지므로 a^2과 $2a$의 대소 관계로 경우를 나누자.

(i) $a^2 > 2a\,(a>2)$인 경우

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+2a\cdot\left(\frac{2a}{a^2}\right)^n}{1+\left(\frac{2a}{a^2}\right)^n} = 5$$

$$\Rightarrow 5 = a+1 \Rightarrow a = 4$$

(ii) $a^2 = 2a\,(a=2)$인 경우

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 2^{2n}+4\cdot 2^{2n}}{2^{2n}+2^{2n}} \\ &= \frac{9}{2} \neq a+1 \ (\because\ a=2) \end{aligned}$$

따라서 이 경우 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a^2 < 2a\,(0<a<2)$인 경우

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\left(\frac{a^2}{2a}\right)^n+2a}{\left(\frac{a^2}{2a}\right)^n+1} = 2a$$

$$\Rightarrow 2a = a+1 \Rightarrow a = 1$$

$\therefore\ 4+1=5$

정답 ②

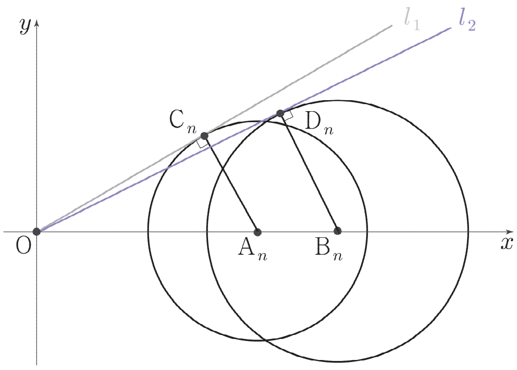
27 ●●● 5~8분

수열의 극한 수열의 극한의 대소관계

풀이 1

$\lim_{n\to\infty} n\left(3-\frac{1}{a_n^2}\right)$ 이 구하는 값이므로 조건을 해석하여 $\left(3-\frac{1}{a_n^2}\right)$ 을 n에 대한 식으로 나타내면 된다.

원과 직선의 위치 관계는 원의 접선을 기준으로 생각하는 것이 좋으므로 원점을 지나고 두 원에 각각 접하면서 기울기가 양수인 두 직선을 그려보자.



$A_n(2n-1, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 n 인 원과 점 C_n에서 접하고 원점을 지나는 직선을 l_1, $B_n(2n+1, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $n+1$인 원과 점 D_n에서 접하고 원점을 지나는 직선을 l_2라 하면

(직선 l_2의 기울기) $< a_n <$ (직선 l_1의 기울기)

이다. 이때 $\angle A_nOC_n=\theta_1$, $\angle B_nOD_n=\theta_2$라 하면

(직선 l_1의 기울기) $=\tan\theta_1$

(직선 l_2의 기울기) $=\tan\theta_2$

따라서

$$\tan\theta_2 < a_n < \tan\theta_1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\tan^2\theta_1} < \frac{1}{a_n^2} < \frac{1}{\tan^2\theta_2} \quad \left(\because\ 0<\theta_i<\frac{\pi}{2}(i=1,\ 2)\right)$$
$$\Rightarrow 3-\frac{1}{\tan^2\theta_2} < 3-\frac{1}{a_n^2} < 3-\frac{1}{\tan^2\theta_1}$$

이제

$$\angle A_nC_nO=\frac{\pi}{2} \quad (\because\ C_n\text{은 접점})$$
$$\Rightarrow \overline{OC_n}^2=\overline{OA_n}^2-\overline{A_nC_n}^2 =(2n-1)^2-n^2=3n^2-4n+1$$

$$\angle B_nD_nO=\frac{\pi}{2} \quad (\because\ D_n\text{은 접점})$$
$$\Rightarrow \overline{OD_n}^2=\overline{OB_n}^2-\overline{B_nD_n}^2 =(2n+1)^2-(n+1)^2=3n^2+2n$$

임을 이용하여 $3-\frac{1}{\tan^2\theta_1}$, $3-\frac{1}{\tan^2\theta_2}$ 을 n에 대한 식으로 나타내자.

$$\tan\theta_1=\frac{\overline{A_nC_n}}{\overline{OC_n}}=\frac{n}{\sqrt{3n^2-4n+1}}$$
$$\Rightarrow 3-\frac{1}{\tan^2\theta_1}=3-\frac{3n^2-4n+1}{n^2}=\frac{4n-1}{n^2}$$

$$\tan\theta_2=\frac{\overline{B_nD_n}}{\overline{OD_n}}=\frac{n+1}{\sqrt{3n^2+2n}}$$
$$\Rightarrow 3-\frac{1}{\tan^2\theta_2}=3-\frac{3n^2+2n}{(n+1)^2}=\frac{4n+3}{n^2+2n+1}$$

따라서

$$\frac{4n+3}{n^2+2n+1}<3-\frac{1}{a_n^2}<\frac{4n-1}{n^2}$$
$$\Rightarrow \frac{4n^2+3n}{n^2+2n+1}<n\left(3-\frac{1}{a_n^2}\right)<\frac{4n^2-n}{n^2}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n}{n^2+2n+1}\le \lim_{n\to\infty}n\left(3-\frac{1}{a_n^2}\right)\le \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n}{n^2}$$
$$\Rightarrow 4\le \lim_{n\to\infty}n\left(3-\frac{1}{a_n^2}\right)\le 4 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}n\left(3-\frac{1}{a_n^2}\right)=4$$

풀이 2

원과 직선의 위치 관계는 원의 중심과 직선 사이의 거리로 해석할 수 있으므로

직선이 점 $(2n-1,0)$을 중심으로 하고
반지름의 길이가 n인 원과 서로 다른 두 점에서 만난다.
$\Rightarrow$ 직선과 점 $(2n-1,0)$ 사이의 거리가 n보다 작다.
…… ㉠

직선이 점 $(2n+1,0)$을 중심으로 하고
반지름의 길이가 $n+1$인 원과 만나지 않는다.
$\Rightarrow$ 직선과 점 $(2n+1,0)$ 사이의 거리가 $n+1$보다 크다.
…… ㉡

이때 원점을 지나고 기울기가 a_n인 직선의 방정식은 $y=a_nx$이므로

㉠ $\Rightarrow \dfrac{|(2n-1)a_n|}{\sqrt{a_n^2+1}}<n$

$$\Rightarrow (2n-1)^2a_n^2<n^2a_n^2+n^2$$
$$\Rightarrow (3n^2-4n+1)a_n^2<n^2$$
$$\Rightarrow a_n^2<\frac{n^2}{3n^2-4n+1}$$
$$\Rightarrow 3-\frac{1}{a_n^2}<\frac{4n-1}{n^2}$$

㉡ $\Rightarrow \dfrac{|(2n+1)a_n|}{\sqrt{a_n^2+1}}>n+1$

$$\Rightarrow (2n+1)^2a_n^2>(n+1)^2a_n^2+(n+1)^2$$
$$\Rightarrow (3n^2+2n)a_n^2>n^2+2n+1$$
$$\Rightarrow a_n^2>\frac{n^2+2n+1}{3n^2+2n}$$
$$\Rightarrow 3-\frac{1}{a_n^2}>\frac{4n+3}{n^2+2n+1}$$

이후 풀이는 **풀이 1** 과 동일하다.

정답 ⑤

28 ●●●★ 12~15분

수열의 극한 | 수열의 극한으로 정의된 함수

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+5$가 있다.

두 ❶ 자연수 p, q에 대하여 함수 $g(x)$를

❷
$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}px^2+\frac{1}{2}qx+5 & (x<0)\\ 5 & (x\ge 0)\end{cases}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

❸
$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(f(x)\right)^{2n+1}+5^{2n}\times g(x)}{\left(f(x)\right)^{2n}+5^{2n}}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수가 7이다.

> 자연수 n에 대하여 ❹ 직선 $y=\left(k-\frac{1}{2^n}\right)x+5$가 함수 $y=h(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, ❺ $\lim_{n\to\infty}a_n=4$이다.

$p+q+h(4)$의 값은? [4점]

① 38 ② 41 ③ 44 ④ 47 ⑤ 50

SCAN

기출 표현

❶ 자연수 p, q

자연수 조건을 보니 이를 통해 p, q를 확정해야 하는 상황일 수 있다. 따라서 p, q가 포함된 부등식도 중요하게 관찰해야 하며 필요시 자연수를 대입하여 상황을 이해할 수 있다.

❷ 특정 구간의 함수가 주어진 구간별 함수

$x\ge 0$에서는 함수 $g(x)$가 5라고 주어진 상태다. 함수가 주어진 구간을 이용하여 함수가 주어지지 않은 구간을 추론하자.

❸ 수열의 극한으로 정의된 함수

$|f(x)|$와 5의 대소 관계에 따라 극한값이 달라지므로 $|f(x)|$와 5의 대소 관계로 경우를 나누자.

❹ 곡선과 직선의 위치 관계

주어진 직선은 점 $(0, 5)$를 지나고 기울기가 달라지는 직선이므로 점 $(0, 5)$을 중심으로 직선을 회전시켜 보자. 또한 곡선과 직선의 위치 관계는 접선을 중심으로 해석하는 경우가 많다. 접할 때를 기준으로 생각하자.

낯선 표현

❺ $n\to\infty$

값이 아닌 극한을 준 이유가 있을 것이다.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

FLOW 1 함수 $h(x)$ 를 구간별로 정의된 함수로 바꾸기

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(f(x)\right)^{2n+1}+5^{2n}\times g(x)}{\left(f(x)\right)^{2n}+5^{2n}}$ 는 $|f(x)|$ 와 5 의 대소 관계에 따라 극한값이 달라지므로

기출 표현 ❸

$|f(x)|$ 와 5 의 대소 관계에 따라 경우를 나누자.

① $|f(x)|>5$ 인 경우

$$h(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x)+\left(\dfrac{5}{f(x)}\right)^{2n}\times g(x)}{1+\left(\dfrac{5}{f(x)}\right)^{2n}} = f(x)$$

② $f(x)=5$ 인 경우

$$h(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{2n+1}+5^{2n}\times g(x)}{5^{2n}+5^{2n}} = \frac{5+g(x)}{2}$$

③ $f(x)=-5$ 인 경우

$$h(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{(-5)^{2n+1}+5^{2n}\times g(x)}{(-5)^{2n}+5^{2n}} = \frac{-5+g(x)}{2}$$

④ $|f(x)|<5$ 인 경우

$$h(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x)\times\left(\dfrac{f(x)}{5}\right)^{2n}+g(x)}{\left(\dfrac{f(x)}{5}\right)^{2n}+1} = g(x)$$

정리하면

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (|f(x)|>5) \\ \dfrac{5+g(x)}{2} & (f(x)=5) \\ \dfrac{-5+g(x)}{2} & (f(x)=-5) \\ g(x) & (|f(x)|<5) \end{cases}$$

이다.

FLOW 2 함수 $h(x)$ 의 개형 그리기

$|f(x)|$ 와 5 의 대소 관계를 알아보기 위해 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려보자. 먼저 함수 $y=f(x)$ 의 극댓값과 극솟값을 구하면

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-3x=\frac{3}{2}x(x-2)$$

$$\Rightarrow f'(0)=0,\ f'(2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{함수 } f(x) \text{ 는 } x=0 \text{ 에서 극댓값 } 5 \text{ 을 가진다.} \\ \text{함수 } f(x) \text{ 는 } x=2 \text{ 에서 극솟값 } 3 \text{ 을 가진다.} \end{cases}$$

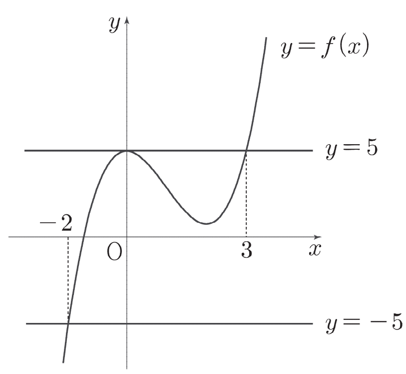
$(\because\ f(0)=5,\ f(2)=3)$

이고

$$f(x)=5 \quad\Rightarrow \frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2=0 \quad\Rightarrow x=0,\ 3$$

$$f(x)=-5 \quad\Rightarrow \frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+10=0 \quad\Rightarrow x=-2$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는



이다. 따라서 $h(x)$ 를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2 \text{ 또는 } x>3) \\ \dfrac{5+g(x)}{2} & (x=0,\ 3) \\ \dfrac{-5+g(x)}{2} & (x=-2) \\ g(x) & (-2<x<0 \text{ 또는 } 0<x<3) \end{cases}$$

이때 함수 $y=h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$x=3\ :\ \frac{5+g(3)}{2}=f(3)=5\ \text{(성립)}$$

$$x=0\ :\ \frac{5+g(0)}{2}=g(0)=5\ \text{(성립)}$$

$$x=-2\ :\ g(-2)=f(-2)=-5$$

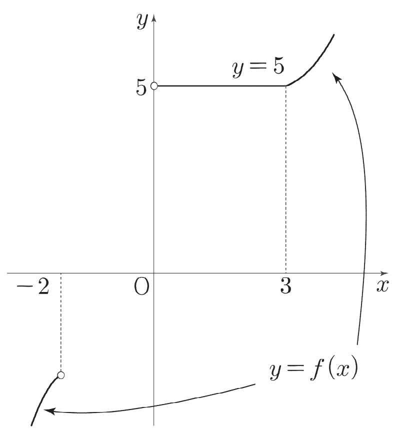
$$\Rightarrow\ 2p-q=-10 \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

을 얻을 수 있다. 주어진

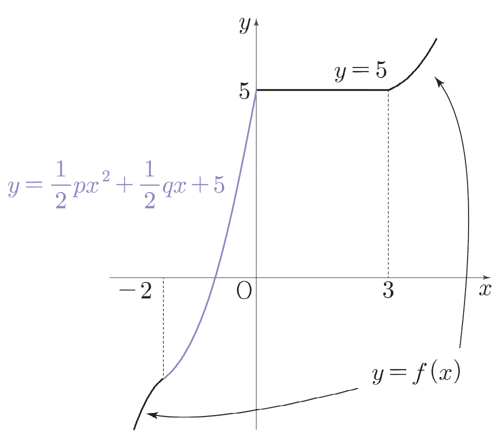
기출 표현 ❷

$x\geq 0$ 에서 $g(x)=5$

와 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+5$ 를 이용하여 함수 $h(x)$ 의 그래프의 일부를 그려보면 다음과 같다.



함수 $h(x)$ 는 실수 전체 집합에서 연속이므로 $x=-2$ 와 $x=0$ 에서 이어지도록 함수 $y=\frac{1}{2}px^2+\frac{1}{2}qx+5$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같다.[1)]



FLOW 3 곡선과 직선의 위치 관계 해석하기

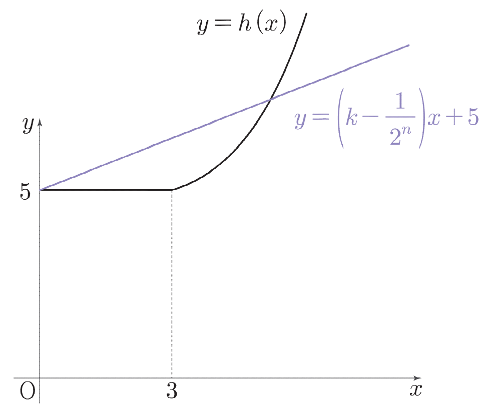
$\lim_{n\to\infty}a_n=4$ 이므로 직선 $y=\left(k-\frac{1}{2^n}\right)x+5$ 와 곡선 $y=h(x)$ 의 교점이 4개인 상황을 구하자.

직선 $y=\left(k-\frac{1}{2^n}\right)x+5$ 는

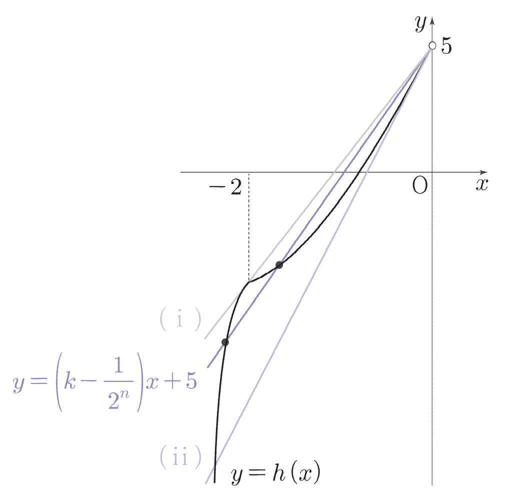
점 $(0,5)$ 를 지나고 기울기가 $\left(k-\frac{1}{2^n}\right)>0$ 인 직선

($\because$ k는 자연수)

이다. $x\geq 0$ 에서 두 함수의 그래프를 그려보면



이므로 $x\geq 0$ 에서 직선 $y=\left(k-\frac{1}{2^n}\right)x+5$ 와 곡선 $y=h(x)$ 의 교점은 항상 2개다. 즉, $x<0$ 에서 직선 $y=\left(k-\frac{1}{2^n}\right)x+5$ 와 곡선 $y=h(x)$ 의 교점이 2개여야 한다. $x<0$ 에서 두 함수의 그래프를 그려보면



따라서 $n\to\infty$ 일 때 직선 $y=\left(k-\dfrac{1}{2^n}\right)x+5$ 의 기울기는

기출 표현 ❸

(i) 두 점 $(-2,\,h(-2))$, $(0,\,5)$ 를 지나는 직선의 기울기보다 크고

(ii) 곡선 $y=\dfrac{1}{2}px^2+\dfrac{1}{2}qx+5$ 와 $x=0$ 에서 접하는 직선의 기울기보다 작아야 한다. [2)]

이를 만족하는 k 의 범위를 구하자.

$$\frac{5-h(-2)}{2}<k-\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2}q \Rightarrow 5+\frac{1}{2^n}<k<\frac{1}{2}q+\frac{1}{2^n}$$

이면 $a_n=4$ 이다. 이때

낯선 표현 ❺

$n\to\infty$ 이면 $\dfrac{1}{2^n}\to 0+$ 이므로

$k=\dfrac{1}{2}q$ 여도 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$ 이다.

따라서 박스 조건을 해석하면

기출 표현 ❶

$5<k\le\dfrac{1}{2}q$ 인 자연수 k 의 개수가 7

$\Rightarrow q=24$ 또는 $q=25$

이다. 이때 ㉠에 의해

㉠ $\Rightarrow 2p=q-10 \Rightarrow q$ 는 짝수 $(\because\ p$ 는 자연수$)$
$\Rightarrow q=24,\ p=7$

$\therefore\ p+q+h(4)=31+f(4)=44$

정답 ③

PLUS

1) 극솟값의 x 좌표가 $-2<x<0$ 에 있는 이차함수로 그릴 수도 있다. 이렇게 그려 풀이하더라도 이후 풀이는 같다.
2) 3월 모의고사의 시험 범위는 아니라서 해설 본문에는 수록하지 않았지만, 엄밀한 설명은 아래와 같다.

곡선 $y=f(x)$ 가 $x<-2$ 에서 '위로 볼록하고 증가'하고 $(0,\,5)$ 와 $(-2,\,f(-2))$ 을 이은 직선의 기울기가 $f'(-2)$ 보다 작으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 주어진 직선은 $x<-2$ 에서 한 점에서 만난다.
따라서 $x<0$ 에서 두 함수의 그래프가 두 점에서 만나려면 $-2<x<0$ 에서 반드시 한 번 더 만나야 한다.

CHECK

✓ 기출 표현

❶ 자연수 p, q

☑ 예상대로 q에 대한 부등식이 등장하여 자연수 조건을 통해 q의 후보를 구했다. 이후 p 도 자연수여야 함을 이용하여 확정했다.

❷ 특정 구간의 함수가 주어진 구간별 함수

☑ 주어진 구간을 그린 후 주어지지 않은 구간의 개형을 연속 조건을 통해 그렸다.

❸ 수열의 극한으로 정의된 함수

☑ $|f(x)|$ 와 5 의 대소 관계로 경우를 나눴다.

❹ 곡선과 직선의 위치 관계

☑ 예상대로 접선이 곡선과 직선의 위치 관계의 경계가 되었다. 추가로 구간의 변화 지점을 지나는 직선도 곡선과 직선의 위치 관계의 경계였다.

✓ 낯선 표현

❺ $n\to\infty$

☑ 극한은 한없이 가까워질 뿐 같지 않다는 점을 이용했다. 이때 한없이 가까워지는 값보다 큰지 작은지도 중요하게 작용했다.

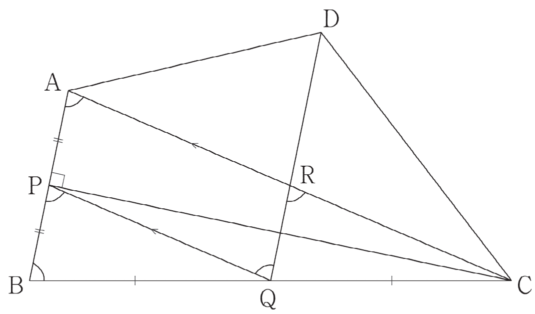
29 ●●● 5~8분

수열의 극한 도형 해석

풀이 1

$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{DR}-\frac{4}{3}n\right)$ 이 구하는 값이므로 도형을 해석하여 $\overline{DR}$ 을 n 에 대한 식으로 나타내면 된다.

이때 $\overline{DC}=2\overline{DR}$ 이므로 두 선분이 모두 포함된 삼각형 DRC 의 변의 길이 또는 각을 알아보자.[1)]



$\overline{AC}=\overline{BC}$ 이므로 삼각형 ABC 는 $\angle BAC=\angle ABC$ 인 이등변삼각형이고 점 P 가 선분 AB 의 중점이므로 $\angle APC$ 는 직각이다. 따라서

$$\overline{AP}^2=\overline{AC}^2-\overline{CP}^2$$
$$=(4n+2)^2-(15n^2+16n+4) \Rightarrow \overline{AP}=n$$

이다. 또한 점 Q 도 선분 BC 의 중점이므로 두 선분 AC 와 PQ 는 서로 평행하고

삼각형 ABC 와 삼각형 PBQ 는 $2:1$ 닮음

이다. 삼각형 PBQ 도 이등변삼각형이므로

$\angle CAB = \angle BPQ = \angle PQR$

$\Rightarrow$ 두 선분 AB 와 RQ 는 서로 평행하다.

$\Rightarrow$ $\angle BAC=\angle CRQ$ (동위각)

이다.

따라서 편의상 $\angle CRQ=\theta$ 라 하면 직각삼각형 APC 에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}=\frac{n}{4n+2}$$

이고 $\overline{RC}=\frac{\overline{AC}}{2}=2n+1$ 이므로

$$\angle CRD=\pi-\theta$$
$$\cos(\angle CRD)=\cos(\pi-\theta)=-\frac{n}{4n+2}$$

이다. 편의상 $\overline{DR}=x$ 라 하면 $\overline{DC}=2x$ 이고 삼각형 DRC 에서 코사인법칙을 쓰면

$$\overline{DC}^2=\overline{DR}^2+\overline{RC}^2-2\times\overline{DR}\times\overline{RC}\times\cos(\angle CRD)$$
$$\Rightarrow 4x^2=x^2+(2n+1)^2+2\cdot x\cdot(2n+1)\cdot\frac{n}{4n+2}$$

이다. 이 식을 정리하면 다음과 같다.

$$3x^2-nx-4n^2-4n-1=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{n+\sqrt{49n^2+48n+12}}{6} \quad (\because\ x>0)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\overline{DR}-\frac{4}{3}n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{49n^2+48n+12}-7n}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\times\lim_{n\to\infty}\frac{48n+12}{\sqrt{49n^2+48n+12}+7n}$$
$$=\frac{1}{6}\times\lim_{n\to\infty}\frac{48+\frac{12}{n}}{\sqrt{49+\frac{48}{n}+\frac{12}{n^2}}+7}$$
$$=\frac{4}{7}$$
$$\Rightarrow p+q=11$$

풀이 2

풀이 1 에서 두 선분 AB와 RQ가 서로 평행하다는 사실을 발견하였다면

삼각형 ABC와 삼각형 RQC도 $2:1$ 닮음

이므로 삼각형 DQC에서

$$\overline{\mathrm{RQ}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AP}} = n$$

$$\cos(\angle \mathrm{CQD}) = \cos(\angle \mathrm{CBA}) = \frac{\overline{\mathrm{PB}}}{\overline{\mathrm{BC}}} = \frac{n}{4n+2}$$

을 이용하여 코사인법칙을 써서 식을 정리해도

$$x = \frac{n + \sqrt{49n^2 + 48n + 12}}{6} \quad (\because\ x > 0)$$

을 얻을 수 있다. 이후 풀이는 **풀이 1** 과 동일하다.

정답 11

PLUS

1) 도형 문제에서 길이는 삼각형에서 피타고라스의 정리, 사인법칙, 코사인법칙 등으로 통해 얻게 되므로 구하는 값이 포함된 삼각형을 관찰하는 것이다.

Insight

도형 문제가 어렵다면 구하는 값이 포함된 삼각형을 관찰하는 것이 중요합니다. 이때 PLUS에 적힌 내용을 기억하며 다른 조건을 통해 구하는 값이 포함된 삼각형에서 부족한 정보를 얻어내야 합니다. 예를 들어 구하는 삼각형이 변의 길이가 1 개 각이 1 개 주어진 삼각형이라면 각 1 개를 얻어낸 뒤 사인법칙 또는 길이 1 개를 얻어낸 뒤 코사인법칙을 쓰면 풀린다고 인식해야 합니다.

30 ●●●★ 8~10분

수열의 극한 등비수열

다음 조건을 만족시키는 모든 ❶ 자연수 k 의 값의 합을 구하시오. (단, k는 20 이하의 자연수이다.) [4점]

> 두 정수 a, b에 대하여
>
> $\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n$의 값과 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n$의
>
> 값이 모두 존재하며
>
> ❷ $\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n$이
>
> 되도록 하는 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 19이다.

SCAN

기출 표현

❶ 자연수 k

자연수 조건을 보니 이를 통해 k를 확정해야 하는 상황일 수 있다. 따라서 k가 포함된 부등식도 중요하게 관찰해야 하며 필요시 자연수를 대입하여 상황을 이해할 수 있다.

❷ 등비수열의 극한값

공비가 r인 등비수열 $a_n=a_1\cdot r^{n-1}$에 대하여
$\lim_{n\to\infty}a_n$은 $r=1$일 때 a_1로 수렴하고
$-1<r<1$ 또는 $a_1=0$일 때는 0으로 수렴하므로
$r=1$인 경우와 $-1<r<1$인 경우로 경우를 나누자.

NOTE

문제를 처음 봤을 때 했던 생각, 나만의 분석을 스스로 적어보세요.

풀이

FLOW 1 두 식을 등비수열로 해석하기

주어진 두 식을 등비수열로 해석하자.

$$\begin{cases} |a|(a+b)^n\text{: 공비가 } a+b\text{ 인 등비수열} \\ \left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|^n\text{: 공비가 } \left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|\text{ 인 등비수열} \end{cases}$$

로 보면 두 등비수열의 극한값이 모두 존재하기 위해서는

$$\begin{cases} |a|=0 \text{ 또는 } -1<a+b\le 1 \\ -1<\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|\le 1 \end{cases}$$

이어야 한다. 이때 $\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|^n$ 은 $|a|(a+b)^n$과 다르게 공비에 따라 극한값이 정해지므로 이를 기준으로 살펴보자. 특히 등비수열에서

기출 표현 ❷

공비가 1 인 경우와 -1과 1 사이에 있는 경우

의 극한값은 서로 다른 값으로 수렴하므로 두 경우를 나누어 확인하자.

FLOW 2 등비수열의 공비가 1 인 경우

우선 $\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|^n$ 의 공비가 1 인 경우

$$\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|=1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n=1$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=1$$
$$\Rightarrow a+b=1,\ |a|=1$$
$$\Rightarrow (a,\ b)=(-1,\ 2)\text{ 또는 }(1,\ 0)\ (\because\ a,\ b\text{는 정수})$$

또한

$$\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|=1 \Rightarrow \left|\frac{-18}{k}\right|=1\ (\because\ a+b=1)$$
$$\Rightarrow k=18$$

이므로 이 경우에는

$k=18$ 일 때 순서쌍 $(a,\ b)$ 의 개수는 2이다. …… ㉠

FLOW 3 등비수열의 공비가 -1 과 1 사이에 있는 경우

이제 $\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|^n$ 의 공비가 -1 과 1 사이에 있는 경우를 살펴보자.

$$-1<\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n=0$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=0$$
$$\Rightarrow |a|=0 \text{ 또는 } -1<a+b<1$$
$$\Rightarrow a=0 \text{ 또는 } a+b=0 \ (\because \ a,\ b\text{는 정수})$$

이때 $a+b=0$ 이라면 20 이하의 자연수 k에 대하여

$$\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right| \Rightarrow \left|\frac{-20}{k}\right|>1$$

이므로 가정에 모순이다. 따라서 $a=0$ 일 때만 확인하면 된다.

$$\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|<1$$
$$\Rightarrow \left|\frac{2b-20}{k}\right|<1$$
$$\Rightarrow -k<2b-20<k$$
$$\Rightarrow -\frac{k}{2}+10<b<\frac{k}{2}+10$$

기출 표현 ❶

k는 20 이하의 자연수이므로 대입

하여 조건을 만족하는 상황을 구하자. 이때 조건에 의해

순서쌍 (a, b) 의 개수는 19 ...... ㉡

이어야 하므로 $k=20$ 부터 대입하자. $a=0$ 으로 고정되어 있으므로 정수 b 의 개수가 곧 순서쌍 (a, b) 의 개수이다.

k	$-\frac{k}{2}+10\le b\le\frac{k}{2}+10$	정수 b의 개수
20	$0<b<20$ [1]	19
19	$\frac{1}{2}<b<\frac{39}{2}$	19
18	$1<b<19$	17
17	$\frac{3}{2}<b<\frac{37}{2}$	17
⋮	⋮	⋮

$k=17$ 까지 대입해 보면 $k\le16$ 의 경우 조건을 만족하는 자연수 b 의 개수가 17 보다 작아질 것이므로[2] ㉡을 만족시킬 수 없다.

㉠에서 $k=18$ 일 때 가능한 순서쌍 (a, b) 의 개수가 2 였으므로 ㉡을 만족하는 k는 18, 19, 20 이다.

$\therefore\ 18+19+20=57$

정답 57

PLUS

1) 부등식 양 끝$(a,\ b)$이 모두 정수라면
   $a<n<b \Rightarrow$ 정수 n의 개수 $b-a-1$
   $a\le n<b \Rightarrow$ 정수 n의 개수 $b-a$
   $a<n\le b \Rightarrow$ 정수 n의 개수 $b-a$
   $a\le n\le b \Rightarrow$ 정수 n의 개수 $b-a+1$
   임을 이용하여 계산을 줄일 수 있다. 두 부등호 중 하나에만 등호가 포함되어 있다면 정수의 개수는 양 끝의 차라는 것을 기억하고 1 을 더하거나 빼주면 된다.
2) 대입의 결과를 통해 정수 b의 개수가
   k가 짝수일 때는 $k-1$개, k가 홀수일 때는 k개
   임을 추론할 수 있다.

CHECK

✔ 기출 표현

① 자연수 k

- [x] 예상대로 k에 대한 부등식이 등장하여 자연수 조건을 통해 k를 확정했다. 이때 $k=20$, 19, $\cdots$ 을 대입했다.

② 등비수열의 극한값

- [x] $r=1$일 때와 $-1<r<1$일 때로 경우를 나눠 풀이했다.

Insight

3월 모의고사의 미적분은 범위가 적어 수능과 유사성이 낮습니다. 하지만 30번은 자연수 조건에 대한 이해도를 높이기 좋으니 자연수 조건을 어떻게 처리했는지 본인의 풀이와 비교해 학습합시다.