해설에 앞서 자기 소개

- 경희대학교 소프트웨어융합대학 소속
- 26학년도 3월, 5월 고3 워너비 모의고사 단독 제작 및 검토자
- 27학년도 워너비 하프 모의고사 단독 제작 및 검토자
- 26수능 수능 수학 1등급
- 24년 고2 학력평가 만점 기록 有
- 25년 고3 학력평가 하반기 고정 백분위 100 및 만점 기록 有
- 메가스터디 큐브(QUBE) 우수 마스터 선정 기록 有

최상의 퀄리티 모의고사를 제공하기 위해 항상 최선을 다하고 있습니다.

앞으로 많은 관심 부탁드립니다. 감사합니다.

2026학년도 5월 고3 워너비 모의고사 해설

수학 영역

26학년도 고3 5월 학력평가 대비 워너비 모의고사 문제지로 인사드리게 된 원이입니다.

5월 모의고사의 특징과 평가원의 경향, 그리고 신유형 등을 반영하려고 최대한 노력했습니다.

이번에는 상당히 까다롭게 출제했습니다. 공통에서 3점 문제는 역시 3점답게 출제하려고 고민을 하였고, 4점 문제는 최근 기조를 따라 12번까지는 매우 쉽게 출제하였으나 13번부터 힘을 매우 줘서 상당한 압박감을 주도록 설계했습니다.

공통 객관식에선 합답형을 반영했지만 어렵게 낸 13번, 생긴건 꽤나 혐오스럽지만 보기보다 쉬웠던 14번, 수능에서 아직 등장하지 않은 소재인 15번 등이 하이라이트였습니다.

공통 주관식의 경우 살짝 생소하게 생긴 삼각함수 문제인 20번, 기울기적 해석이 요구되는 21번, 최근 어렵게 나오고 있는 지수함수 문제인 22번 등이 하이라이트였습니다.

미적분은 매우 어렵게 느껴졌을 거 같습니다. 27번은 3월 워너비 모의고사와 달리 쉽게 출제했지만, 28번과 29번에서 힘을 매우 주었습니다. 29번은 4점 중 급수만 공략하고자 하던 학생들이게는 꽤나 복병이었을 거 같습니다. 30번은 문제의 길이가 매우 길어 건드리기 싫게 생겼으나, 실제 난도는 28, 29, 30번 중 가장 쉬웠습니다.

3월 학평은 상당히 쉽게 출제하여 3월 워너비 모의고사도 무난하게 출제하였으나, 5월 학평은 까다롭게 출제되어 이를 반영하여 3월에 비해 훨씬 어렵게 출제하였습니다.

27학년도 수능을 응시할 현역, N수생 모두 성불하시길 기원합니다. 수이팅!

- 필적 문구는 '너의 때가 온다 - 박노해'에서 가져왔습니다.

- 모의고사 리뷰는 앞으로의 제작에 있어 큰 힘이 됩니다:) 감사합니다.

<난이도>

★☆☆☆☆: 7번, 9번, 10번, 11번, 12번, 14번, 27번
★★☆☆☆: 20번
★★★☆☆: 13번, 21번, 30번
★★★★☆: 15번, 28번
★★★★★: 22번, 29번

<주요 문항 간단 리뷰>

7번: 당황하지 맙시다. 3점은 역시나 3점입니다.
9번: 나형 시절에 출제되었던 소재를 가볍게 변형했습니다.
10번: 선지가 더럽지만.. 정삼각형의 성질을 이용하여 넓이를 구하는 단순한 문제입니다.
11번: 이번엔 합답형 없이 훨씬 단순하게 출제하였습니다.
12번: 매우 친절하게 출제했습니다. 7번과 유사한 아이디어지만, 26수능부터 이러한 경향이 발견되어 동일한 소재가 나올 수 있음을 유의합시다.
13번: 합답형인데 최근 합답형이랑은 많이 다르죠..? 생각할 거리가 많아 시간을 많이 잡아먹었을 거 같습니다.
14번: 원을 도입하긴 했지만, 반지름을 구하는 용도, 이등변삼각형을 활용하는 용도 외에는 큰 의미가 없는 쉬어가는 문제였습니다.
15번: 아직까지 수능에선 활용되지 않는 소재로, 두 파트로 나뉘어 꽤나 고전을 겪을 만한 문제였습니다. 모든 실수에 대해 극한값이 일정하다는 것이 무슨 아이디어일지 잘 생각해봅시다.
20번: 무난해보이는 삼각함수지만, 절댓값으로 구간별로 정의된 함수로 나뉘며, 각변환도 고려해야 하는 함수 추론 문제였습니다.
21번: 보기보다 쉬웠습니다. (가) 조건은 just 계산으로 해석 후, (나) 조건에서 함수 추론을 활용하면 무난하게 풀립니다.
22번: 생각할 거리가 많습니다. 감각적 직관으로 알파가 음수라 생각하고 별 생각없이 푸셨겠지만, 양수일 때는 왜 안될지 꼼꼼히 살펴봅시다.
27번: 무난한 문제입니다. 다른 선지에 걸리기 딱 좋으니 조심합시다.
28번: (가) 조건에서 극한값이 존재한다는 조건을 어떻게 활용해야 할지가 이 문제의 승패를 결정짓는 가장 큰 요인이었습니다.
29번: 많이 어렵습니다. 국밥 문제지만 살짝 변수를 뒀고, 공비가 음수일 때를 반사적으로 우선적으로 보셨겠지만 공비가 음수일 때 나오는 케이스가 하나밖에 없어서 양수일 때도 체크하도록 유도하였습니다.
30번: 문제의 호흡이 길뿐, 할 것만 하면 풀 수 있는 문제라 미적분 4점 문항 중에서는 가장 쉬웠습니다.

1. ☆☆☆☆☆

$2^{1-2\sqrt{3}} \times 4^{\sqrt{3}} = 2^{1-2\sqrt{3}} \times 2^{2\sqrt{3}} = 2$

2. ☆☆☆☆☆

함수 $f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체에서 미분가능하다.

따라서 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2) = -8+32+1$

3. ☆☆☆☆☆

$\sin\theta = \frac{2}{3}$이므로 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$에 대입하면

$\cos^2\theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$임을 얻는다.

4. ☆☆☆☆☆

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1)$이 성립한다.

$$\lim_{x\to 1-}\left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to 1-} f(x) - 1 = f(1) - 1$$

이므로 $f(1) = 3$이다. 따라서 $\lim_{x\to 1+} f(x) = 3$임을 얻는다.

5. ☆☆☆☆☆

항등식이므로 양변을 미분해도 성립한다. 양변을 미분하면

$$xf(x) = 3x^2 + 4x$$

이고 다항함수니 양변에 $x(x\neq 0)$를 나누고 $x=0$에서 연속이 되도록 하면 된다. 따라서 $f(x) = 3x+4$이고 $f(3) = 13$임을 얻는다.

6. ☆☆☆☆☆

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{5}(a_{2n-1} + a_{2n}) = \sum_{n=1}^{5} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{5} a_{2n}$$

이므로 대입하면 $\sum_{n=1}^{5}(n+2) + \sum_{n=1}^{5} 4 = \sum_{n=1}^{5}(n+6) = 45$

7. ★☆☆☆☆

$f(x) = x$ 또는 $f(x) = 1$이다. $\int_{-2}^{4} f(x)dx$의 값이 최대가 되려면 $f(x)$의 값이 최대한 커야 한다. 또한 연속인 점을 고려하면 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x<1) \\ x & (x\geq 1) \end{cases}$$

이므로 $\int_{-2}^{4} f(x)dx = \int_{-2}^{1} 1dx + \int_{1}^{4} xdx = 3 + \frac{15}{2} = \frac{21}{2}$이다.

8. ☆☆☆☆☆

$(a_1 + a_3) = 9(a_5 + a_7) = 9r^4(a_1 + a_3)$이고 $a_1a_2 = a_1^2 r < 0$이므로 모든 항은 0이 아니고 공비는 음수이다. 이를 통해 $a_1 + a_3 \neq 0$임을 알 수 있으니 양변에 $a_1 + a_3$을 나누면 $9r^4 = 1$이므로 $r = -\frac{\sqrt{3}}{3}$임을 얻는다. $a_1 + a_3 = \frac{4}{3}a_1 = 4$이므로 $a_1 = 3$이다.

이를 통해

$$a_6 = a_1 r^5 = 3 \times \frac{1}{9} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{9}$$

임을 얻는다.

9. ★☆☆☆☆

극한식을 먼저 정리하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}\right)}{x^n(x^2-x)\left(\sqrt{x^3+4}+2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{4x^n(x-1)} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{2x^n}\right)$$

이다. 이 값이 수렴해야 하므로 $n=2$이고 $a = -\frac{1}{2}$이다.

따라서 $a+n=\frac{3}{2}$임을 얻는다.

10. ★☆☆☆☆

두 함수 $y=a^x, y=a^{-x+2}$는 $x=1$ 대칭이므로 $\mathrm{A}(1,a)$이다. 직선 $x=1$에 평행한 직선이 함수 $y=a^{x-4}$와 만나는 점 B의 좌표는 $(5,a)$이다. 두 함수 $y=a^{x-4}, y=a^{-x+2}$는 $x=3$ 대칭이므로 $\mathrm{C}\left(3,\frac{1}{a}\right)$이다. 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=4$임을 이용하여 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{4+\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=4$이므로

$a-\frac{1}{a}=2\sqrt{3} \rightarrow a=\sqrt{3}+2$임을 얻는다. 사각형 OCBA의 넓이는 삼각형 OAC의 넓이와 삼각형 ABC의 넓이의 합이므로 점과 직선 사이의 거리를 활용하면

$$(\text{삼각형 OAC의 넓이})=\frac{1}{2}\times\frac{2+2\sqrt{3}}{2}\times 4=2+2\sqrt{3}$$

$$(\text{삼각형 ABC의 넓이})=4\times 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{3}$$

이므로 두 값의 합은 $2+6\sqrt{3}$임을 얻는다.

11. ★☆☆☆☆

출발할 때 원점에서 출발하였으므로 위치를 x라 하면

$$x=\int_0^t (s^2+ks+6)ds=\frac{t^3}{3}+\frac{k}{2}t^2+6t$$

이다. $t=3$을 대입했을 때 위치가 0이 나와야 하므로

$$9+\frac{9k}{2}+18=27+\frac{9k}{2}=0 \rightarrow k=-6$$

이다. 점 P의 가속도를 a라 하면

$$a=2t+k=2t-6$$

이므로 $t=5$를 대입하면 4임을 얻는다.

12. ★☆☆☆☆

수열 $\{a_n\}$은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a_{n+1}=\begin{cases}(-1)^{n+1}-3 \\ na_n\end{cases}$$

$a_5=8$이므로 $a_4=-11$ 또는 $a_4=2$이다.

(1) $a_4=-11$인 경우

모든 항이 정수여야 한다는 조건에 따라 $a_3=8$임을 얻는다. 이를 계속 진행하면 가능한 a_1, a_2의 순서쌍 (a_1, a_2)은 $(8,5), (-1,-4)$이다.

(2) $a_4=2$인 경우

모든 항이 정수여야 한다는 조건에 따라 $a_3=5$임을 얻는다. 이를 계속 진행하면 가능한 a_1, a_2의 순서쌍 (a_1, a_2)은 $(-5,-8)$이다.

이를 종합하여 합을 구하면 $8+(-1)+(-5)=2$임을 얻는다.

13. ★★★☆☆

ㄱ. (가) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x)\geq x^2$이다.

$x<0$일 때, $f(x)\leq x$

$x>0$일 때, $f(x)\geq x$

이고 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $0\leq f(0)\leq 0$이다. 따라서 $f(0)=0$이다. (참)

ㄴ. $x\geq 0$에서 다항함수이고 $\int_0^2 f(x)dx=2$라 조건을 준 상태다. 그런데 $\int_0^2 xdx=2$이고 $\int_0^2 f(x)dx\geq\int_0^2 xdx$이므로 $x>0$에서 $f(x)=x$임을 얻을 수 있다. 따라서 미분가능하다는 조건까지 이용하여 $f'(0)=1$까지 얻을 수 있다.

(나) $f(k)=k$를 만족시키는 음수 k의 개수는 1이다.

즉, 음의 어딘가에서 접하는 형태를 취한다. 그런데 이 경우 $y=x$와 함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=k$에서 두 번 접하는 개형이므로 최소 인수의 개수가 4이다. 따라서 $\lim_{x\rightarrow-\infty}\left|\frac{f(x)}{x^3}\right|=\infty$이다. (참)

ㄷ. $f(x)-x=x(x-k)^2$라 할 수 있고, 이때 $f'(0)=k^2+1$이므로 $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$는

$f(x)=(k^2+1)x$이다. 정적분을 구하면

$$\int_k^2 f(x)dx=\int_k^0 (x^3-2kx^2+(k^2+1)x)dx+\int_0^2 (k^2+1)xdx$$

이고 계산을 정리하여 나온 함수를 $g(k)$라 하자.

$$g(k)=-\frac{1}{12}k^4+\frac{3}{2}k^2+2 \rightarrow g'(k)=-\frac{1}{3}k^3+3k=0 \rightarrow k=-3$$

이므로 $k=-3$을 대입하면

$$g(-3)=-\frac{27}{4}+\frac{27}{2}+2=\frac{35}{4}$$

임을 얻는다. (참)

따라서 옳은 것만을 종합하면 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14. ★★☆☆☆

원의 성질에 의해 $\overline{AM}=\overline{BM}$이 성립하므로 $\angle MBA=\angle MAB=\frac{\pi}{6}$이다. 또한 $\tan(\angle AMC)=-1$이므로 $\angle AMC=\frac{3}{4}\pi$이다. $\overline{BC}=2$인데 삼각형 MBC는 $\angle BMC=\angle BCM$인 이등변삼각형이므로 $\overline{BC}=\overline{BM}=2$이다. 따라서 원 C_1의 반지름의 길이는 2임을 얻는다. 삼각형 AMB에서 $\overline{AB}=\sqrt{3}\times\overline{MB}=2\sqrt{3}$이므로 삼각형 AMC에서 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle AMC)}=\sqrt{2}(2\sqrt{3}+2)=2r \rightarrow r=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

임을 얻는다. 따라서

$$\overline{AB}\times r=2\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$$

임을 얻는다.

15. ★★★★☆

주어진 복잡한 식에서 좌변이 $x=0$일 때 값이 0이므로 우변의 값도 0이어야 한다. 따라서

$$\int_{-2}^2 |-t|f'(t)dt=\int_{-2}^0 -tf'(t)dt+\int_0^2 tf'(t)dt=0$$

이다. 2보다 큰 모든 실수 x에 대하여

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(x+2h)-g(x)}{h}=a$$

이므로 $g(x)$는 $x\ge2$에서 일차함수임을 얻는다. x를 양변에 나누면

$$g(x)=\frac{f(x)+x}{x} \ (단,\ x\ne0)$$

이고 $g(x)$는 일차함수여야 하니 분자에 x인자가 하나라도 존재해야 한다. 따라서 $f(0)=0$이다. $f(x)=px^2+bx$ (b는 상수)라 하면

$$g(x)=\frac{f(x)+x}{x}=\frac{px^2+(b+1)x}{x}=px+(b+1) \ (단,\ x\ge2)$$

이고 $f'(x)=2px+b$이다.

$$\int_{-2}^0 -t(2pt+b)dt+\int_0^2 t(2pt+b)dt=\left[-\frac{2p}{3}t^3-\frac{b}{2}t^2\right]_{-2}^0+\left[\frac{2p}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2\right]_0^2$$

이므로 계산하면 $-\frac{16p}{3}+2b+\frac{16p}{3}+2b=4b=0 \rightarrow b=0$이다.

$$g(x)=2g(2)=4p+2(b+1)=4p+2=\int_{-2}^2 |2-t|f'(t)dt$$

이다. 이를 정리하면

$$\int_{-2}^2 (2-t)f'(t)dt=\int_{-2}^2 (2-t)2ptdt=\int_{-2}^2 (-2pt^2+4pt)dt=-\frac{32}{3}p$$

이므로 $p=-\frac{3}{22}$이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(x+2h)-g(x)}{h}=2g'(x)=2p=a$$

이므로 $a=-\frac{3}{11}$임을 얻는다.

16. ☆☆☆☆☆

$a_5+a_7=2a_6=8$이므로 $a_6=4$이다. 따라서

$$a_6-a_1=5d=3 \rightarrow d=\frac{3}{5}$$

이므로 $a_{16}=4+10d=4+6=10$임을 얻는다.

17. ☆☆☆☆☆

$F(x)=x^3+4x+c$이므로 $F(1)=5+c=7$이다. $F(0)=c$이므로 $c=2$임을 얻는다.

18. ☆☆☆☆☆

$(n-3)(n-6)$이므로 $f(3)=f(5)=f(7)=f(9)=1$이다.

$f(2)=f(8)=f(10)=2$이고, $f(4)=0, f(6)=1$이므로

$\sum_{n=2}^{10} f(n)=11$임을 얻는다.

19. ☆☆☆☆☆

함수 $y=2x^3+6x^2-18x+k$를 함수 $y=f(x)$라 하자. 미분하면

$$f'(x)=6x^2+12x-18=6(x-1)(x+3)=0$$

이다. $x=-3$에서 극댓값을 가지고, $x=1$에서 극댓값을 가지는 구조다. $f(-2)>f(2)$이니 최댓값은 $f(-2)$이고 최솟값은 $f(1)$이다.

$$f(-2)+f(1)=44+k-10+k=34+2k=50$$

이므로 8임을 얻는다.

20. ★★☆☆☆

$$\cos^2\left(x-\frac{1}{6}\right)\pi=\sin^2\left(x+\frac{1}{3}\right)\pi$$

이므로

$$f(x)=\sin^2\left(x+\frac{1}{3}\right)\pi+\left|\sin\left(x+\frac{1}{3}\right)\pi\right|+2$$

이다. $\sin\left(x+\frac{1}{3}\right)\pi=X$이므로 $f(x)=X^2+|X|+2$이다. 따라서 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} X^2-X+2 & (X<0) \\ X^2+X+2 & (X\geq 0) \end{cases}$$

이다. $f(x)=M$의 실근의 개수가 충분히 많으므로 M은 실수 전체의 집합에서 정의될 때의 함수 $f(x)$의 최댓값과 같다. 따라서 함수 $f(x)$의 최댓값을 구하면

$X=1$일 때, $1+1+2=4=M$

이다. 또한, $X=-1$일 때도 값이 같으므로 $\left|\sin\left(x+\frac{1}{3}\right)\pi\right|=1$일 때 최댓값 M을 가진다. 즉, $\left|\sin\left(x+\frac{1}{3}\right)\pi\right|=1$의 실근의 개수가 4이 되도록 하는 모든 양수 x의 값은

$x=\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi, \frac{25}{6}\pi....$이다.

따라서 $a=\frac{19}{6}\pi, b=\frac{25}{6}\pi$이다.

따라서 $6(a+b+M)=6\left(\frac{19}{6}+\frac{25}{6}+4\right)=44+24=68$임을 얻는다.

21. ★★★☆☆

(가) 조건을 직접 대입해보면

$g(\alpha-1)=\lim_{t\to\alpha-1}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}=0$이다. $g(0)=9$이므로 $\alpha\neq 1$이다. 따라서 분모는 0으로 수렴하지 않으므로 대입하면 $\frac{f(\alpha)-f(1)}{\alpha-1}=0$이다. 따라서 $f(\alpha)=f(1)=0$이다.

(나) 조건에서 함수 $g(x)$의 최솟값이 음수가 아니라 한다.

$\lim_{t\to x}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}$의 값이 음수가 되지 않으려면

$x<0$일 때, $f(1+x)\leq f(1)$

$x>0$일 때, $f(1+x)\geq f(1)$

$f(\alpha)=0$이므로 $\alpha<1$이든 $\alpha>1$이든 간에 x축과 접하는 형태로 형성되어야 부등식 조건이 성립한다. 따라서 $f'(\alpha)=0$이다.

$$f(x)=(x-1)(x-\alpha)^2$$

라 하면 $g(0)=f'(1)=9$이므로 $f'(1)=(1-\alpha)^2=9$이다. 따라서 $\alpha=-2$ 또는 $\alpha=4$이다.

$\alpha=-2$일 때, $f(x)=(x-1)(x+2)^2$이므로 $g(2)=\dfrac{f(3)-f(1)}{2}=25$

$\alpha=4$일 때, $f(x)=(x-1)(x-4)^2$이므로 $g(4)=\dfrac{f(5)-f(1)}{4}=1$

따라서 모든 $g(|\alpha|)$의 값의 합은 26임을 얻는다.

22. ★★★★★

함수 $y=a^{x-1}$와 직선 $y=x+2$는 한 점에서만 만나므로 $a<1$이다. 점 A의 좌표가 (α,β)이므로

$$a^{\alpha-1}=\alpha+2 \quad \cdots (1)$$

임을 얻는다. 또한, 점 B의 좌표가 $(|\alpha|,|\beta|)$이므로 α와 β의 부호를 먼저 조사해야 한다. $\beta=\alpha+2$이고,
$a^{1-1}=1<1+2=3$, $a^{-3}>-2+2=0$이므로
$-2<\alpha<1$이다. 따라서 $\beta>0$이므로 점 B의 좌표는
$(|\alpha|,\beta)$임을 얻는다.

그런데 $x=0$을 대입하면 함숫값이 각각 $a^{-1}, 2$이므로 두 값의 대소가 어떻게 되는지에 따라 문제의 상황이 완전히 달라진다.

(1) $a^{-1}\geq 2 \rightarrow 0<a\leq\dfrac{1}{2}$인 경우

교점의 x좌표인 α의 값이 양수이므로 점 B의 좌표는 (α,β)이다. 직선 $y=x$에 대칭이동한 점의 좌표는 (β,α)이므로 이를 두 함수에 대입해보자.

$$\frac{1}{2}\log_a(\alpha+2+k)-1=\alpha \rightarrow a^{2\alpha+2}=\alpha+2+k \quad \cdots (2)$$

$$-\alpha+k+\frac{19}{18}=\alpha \rightarrow k=2\alpha-\frac{19}{18} \quad \cdots (3)$$

이므로 (3)을 (2)에 대입하면

$$a^{2\alpha+2}=3\alpha+\frac{17}{18} \quad \cdots (4)$$

이고 (1)을 정리하면 $a=(\alpha+2)^{\frac{1}{\alpha-1}}$이므로 이를 (4)에 대입하면

$$(\alpha+2)^{(2\alpha+2)}=\left(3\alpha+\frac{17}{18}\right)^{(\alpha-1)}$$

이다. $0\leq\alpha<1$이므로 해가 존재하려면 기본적으로 양끝 구간을 관찰해야 한다. $\alpha=0$일 때, $4>\dfrac{18}{17}$이고, α이 1로 가까워지면 좌변은 81에 가까워지나 우변은 1에 가까워진다. 우변은 좌변보다 큰 부분이 있어야 교점을 가지는데, 해당 범위에서 우변은 좌변보다 한참 작다. 따라서 교점이 발생하지 않는다. 해당 범위에선 근이 생기지 않으므로 α는 양수가 될 수 없다.

(2) $a^{-1}<2 \rightarrow \dfrac{1}{2}<a<1$인 경우

교점의 x좌표인 α의 값이 음수이므로 점 B의 좌표는 $(-\alpha,\beta)$이다. 직선 $y=x$에 대칭이동한 점의 좌표는 $(\beta,-\alpha)$이므로 이를 두 함수에 대입해보자.

$$\frac{1}{2}\log_a(\alpha+2+k)-1=-\alpha \rightarrow a^{-2\alpha+2}=\alpha+2+k \quad \cdots (5)$$

$$-\alpha+k+\frac{19}{18}=-\alpha \rightarrow k=-\frac{19}{18} \quad \cdots (6)$$

이다. 그런데 (5)의 식은 (1)의 식에서 양변에 -2제곱한 것과 같으므로

$$a^{2\alpha-2}=(\alpha+2)^2=\frac{1}{\alpha+2+k} \quad \cdots (7)$$

이다. (7)에 (6)을 대입하면 $(\alpha+2)^2\left(\alpha+\dfrac{17}{18}\right)=1$이다.

$\alpha+2=p$라 치환하면 $p^2\left(p-\dfrac{19}{18}\right)=1$이고 양변에 18을 곱하여 정리하면 $18p^3-19p^2-18=(2p-3)(9p^2+4p+6)=0$이다.
따라서 이 방정식의 해는 $p=\dfrac{3}{2} \rightarrow \alpha=-\dfrac{1}{2}$이다. 이를 (1)에 대입하면 $a^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}$이므로 $a^{-3}=\dfrac{9}{4}$이다. 따라서

$$a^3\times k=\frac{4}{9}\times\left(-\frac{19}{18}\right)=-\frac{38}{81}$$

이므로 $p+q=119$임을 얻는다.

23. ☆☆☆☆☆

$f'(x) = -8\cos 2x \sin 2x$이므로 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sqrt{3}$

24. ☆☆☆☆☆

덧셈정리를 적용하면 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\alpha - 1}{1 + \tan\alpha} = \frac{1}{3}$이다.

$\tan\alpha = 2$이고 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$임을 얻는다.

25. ☆☆☆☆☆

$$\frac{dx}{dt} = \pi e^{t + \frac{1}{2}}, \quad \frac{dy}{dt} = -\pi \sin\pi t e^{\cos\pi t}$$

이므로 $\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin\pi t e^{\cos\pi t}}{e^{t+\frac{1}{2}}}$이고 $t = \frac{1}{2}$를 대입하면 $-\frac{1}{e}$임을 얻는다.

26. ☆☆☆☆☆

역함수 관계를 이용하면

$$g\left(f(2x+3) + 2x\right) = x$$

이므로 양변을 미분하면

$$g'\left(f(2x+3) + 2x\right) \times \left(2f'(2x+3) + 2\right) = 1$$

이다. $g(0)$을 얻기 위해선 $f(2x+3) + 2x = 0$이 되는 함수 $f(x)$를 찾아야 한다. $x = -1$일 때, $f(1) + 2 = 0$이 되므로 $x = -1$을 대입하면 된다.

$$g'(0) \times (2f'(1) + 2) = 1$$

이므로 $f'(1) + 1 = \frac{5}{4}$이다. 따라서 $f'(1) = \frac{1}{4}$을 얻는다.

27. ★☆☆☆☆

점 A의 x좌표를 (k, kt)라 하면

$$kt = \cos 4k$$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 넓이는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{8} \times kt = \frac{\pi}{16} kt$$

이다.

$$\lim_{t \to 0+} \frac{S(t)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{\pi k}{16}$$

이므로 k가 얼마로 수렴할지만 구하면 된다.

$$t = \frac{\cos 4k}{k}$$

이므로 $t \to 0+$일 때, $k = \frac{\pi}{8}$에 가까워진다. 따라서 $\frac{\pi^2}{128}$임을 얻는다.

28. ★★★★☆

(가) 조건에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x+2)-g(x)}{e^{ax}}=L$$

이라 줬다. $f(x)-x^2=h(x)$라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{h(x+2)}-e^{h(x)}}{e^{ax}}=\lim_{x\to\infty}(e^{h(x+2)-ax}-e^{h(x)-ax})=L$$

로 정리할 수 있다. 저 식이 특정 상수로 수렴하려면 함수 $h(x)-ax$이 상수가 되어야 한다.

$$h(x)-ax=f(x)-x^2-ax$$

의 값이 상수여야 하므로 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^2+ax+b \ (b\text{는 상수})$$

라 할 수 있다.

(나) 조건에서

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(\alpha+h)g(\alpha-h)}{h^2}=f'(\alpha)$$

이므로 $g(\alpha)=0\to e^{h(\alpha)}=1\to h(\alpha)=0$이다.

미분계수의 정의로 식을 조작하면

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}\times\lim_{h\to0-}\frac{g(\alpha-h)-g(\alpha)}{h}=-\left(g'(a)\right)^2=f'(\alpha)$$

이다. $g'(x)=\left(f'(x)-2x\right)e^{\left(f(x)-x^2\right)}$이므로 $g'(\alpha)=f'(\alpha)-2\alpha$이다.

$f(1)=3$이므로 $1+a+b=3\to b=2-a$이다.

$$f'(x)=2x+a\to f'(\alpha)=2\alpha+a \quad \therefore g'(\alpha)=a$$

$$-a^2=2\alpha+a \ \left(\because -\left(g'(\alpha)\right)^2=f'(\alpha)\right)$$

이고 $h(\alpha)=0$임을 이용하면

$$f(\alpha)=\alpha^2\to\alpha^2+a\alpha+2-a=\alpha^2\to a\alpha=a-2$$

이다. $\alpha=\dfrac{-a^2-a}{2}$이므로 이를 대입하면

$$\frac{-a(a^2+a)}{2}=\frac{-a^3-a^2}{2}=a-2\to a^3+a^2+2a-4=0$$

이므로 $a=1$이다. 이를 통해 $\alpha=-1$임을 얻을 수 있고

$$f(x)=x^2+x+1$$

임도 얻는다. (가) 조건 극한값을 마저 계산하면

$$\lim_{x\to\infty}(e^{x+3-x}-e^{x+1-x})=e^3-e=L$$

따라서 $\alpha\times L\times f(3)=(-1)\times(e^3-e)\times13=-13e^3+13e$임을 얻는다.

29. ★★★★★

수열 $\{a_n\}$의 일반항을 $a_n=a_1r^{n-1}$(공비는 r)이라 하자.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

이므로 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_{n+1}=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}\left|a_1r^n\right|$$

이다. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값이 수렴하고 그 합이 -6이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-r}=-6\ ,\ 0<|r|<1$$

이다. 따라서 수열 $\{b_{n+1}\}$의 일반항은

$$b_{n+1}=-6(1-r^n)\left|-6(1-r)r^n\right|=-36(1-r)(1-r^n)\left|r^n\right|$$

임을 얻는다.

(1) $r>0$인 경우

수열 $\{b_{n+1}\}$의 일반항은

$$b_{n+1}=-36(1-r)(1-r^n)r^n=-36(1-r)(r^n-r^{2n})$$

임을 얻는다. $a_1<0$임을 얻은 상태이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=0$

이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=0$이다. 이를 계산하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 - \sum_{n=1}^{\infty} 36(1-r)r^n + \sum_{n=1}^{\infty} 36(1-r)r^{2n}$$

$$= b_1 - 36(1-r)\left(\frac{r}{1-r} - \frac{r^2}{1-r^2}\right) = b_1 - 36\left(r - \frac{r^2}{1+r}\right) = 0$$

이므로 $b_1 = 36r\left(1 - \frac{r}{r+1}\right) = \frac{36r}{r+1}$이다.

a_1의 값이 정수임을 고려해야 한다. $a_1 = -6(1-r)$

이므로 가능한 공비의 후보는 $r = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$이다.

b_1도 정수여야 하므로 가능한 r의 값은 $r = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$뿐이다.

$r = \frac{1}{3}$일 때, $b_1 = 9$이므로 $r + b_1 = \frac{28}{3}$

$r = \frac{1}{2}$일 때, $b_1 = 12$이므로 $r + b_1 = \frac{25}{2}$

(2) $r < 0$인 경우

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + a_n) = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{2a_1 r}{1-r^2} = -\frac{12r}{1+r}$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값은 $-\frac{12r}{5(1+r)}$이다.

$$b_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} = b_1 + \frac{36r(1-r^2)}{(1+r)(1+r^2)} = -\frac{12r}{5(1+r)}$$

해당 방정식을 정리하면

$$\therefore\ b_1 = \frac{-24r(8r^2 - 15r + 8)}{5(1+r)(1+r^2)}$$

이다. a_1의 값이 정수임을 고려해야 한다. $a_1 = -6(1-r)$이므로

가능한 공비의 후보는 $r = -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}$이다.

b_1도 정수여야 하므로 가능한 r의 값은 $r = -\frac{1}{3}$뿐이다.

$r = -\frac{1}{3}$일 때, $b_1 = 30$이므로 $r + b_1 = \frac{89}{3}$

최댓값 M은 $M = \frac{89}{3}$이고, 최솟값 m은 $m = \frac{28}{3}$이므로

$M + m = \frac{89+28}{3} = 39$임을 얻는다.

30. ★★★☆☆

(가) 조건에서 $x = 0$을 대입했을 때 성립해야 한다.

$f(2) = 2f(0)$

을 충족시키려면 함수 $f(x)$는

$x \to 0+$에서 $f(x) = \sin\pi x + 1$

$x \to 2-$에서 $f(x) = \cos\pi x + 1$

이다. (나) 조건에서 x축과 만나는 점이 존재해야 하므로

가능한 함수 $f(x)$의 개형은 하나로 좁혀지고 구간 $[0, 2]$에서

$$f(x) = \begin{cases} \sin\pi x + 1 & \left(0 < x < \frac{1}{4}\right) \\ \cos\pi x + 1 & \left(\frac{1}{4} < x \le 2\right) \end{cases}$$

임을 얻는다. 열린구간 $(0, 8)$에서 미분이 불가능한 구간은 좌미분계수와 우미분계수와 다른 지점이다. $0 < x < 2$에선 $x = \frac{1}{4}$이 될 때 미분가능하지 않다. 주기함수 조건인 (가) 조건을 이유로 $x = 2, 4, 6$에서 미분가능하지 않다. 추가로 주기성에 의해 $x = \frac{1}{4} + 2, \frac{1}{4} + 4, \frac{1}{4} + 6$에서도 미분가능하지 않다. 따라서 $\alpha = 7$임을 얻는다.

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = 0$$

임은 좌미분계수와 우미분계수의 합이 0이라는 뜻이다.

$0 < x < 2$에선 $x = \frac{1}{4}$에서 미분이 가능하지 않지만

좌미분계수와 우미분계수의 합이 0임을 알 수 있으며,

$x = 1$에선 미분가능하고 미분계수가 0임을 얻을 수 있다.

마찬가지로 주기성에 의해 $x = \frac{1}{4} + 2, \frac{1}{4} + 4, \frac{1}{4} + 6$에서,

$x = 1 + 2, 1 + 4, 1 + 6$에서 같은 현상이 관측된다.

따라서 이를 모두 더한 값인 β는 $\beta = 29$임을 얻는다.

따라서 $\alpha + \beta = 36$임을 얻는다.