제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_{3}H_{5}$ 의 값은? [2점]

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

$_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$

$\frac{7\times 6}{2}$

24. 서로 다른 종류의 연필 4자루가 있다. 이 4자루의 연필을 세 명의 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 연필을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 72 ② 75 ③ 78 ④ 81 ⑤ 84

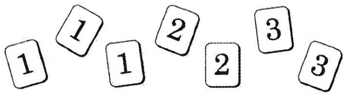
$3\times3\times3\times3 = 81$

if 서로 같은 종류의 연필이면,

$_3H_4$

25. 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 4가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 70 ② 75 ③ 80 ④ 85 ⑤ 90



ⅰ) 양 끝에 1과 3이 배치되는 경우

1 $\underline{1\ 1\ 2\ 2\ 3}$ 3

2가지 $\times \dfrac{5!}{2!2!} = 2 \times 30 = 60$

ⅱ) 양 끝에 2 2개가 배치되는 경우.

2 $\underline{1\ 1\ 1\ 3\ 3}$ 2

1가지 $\times \dfrac{5!}{3!\,2!} = 10$

26. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [3점]

$a+b+c+\lvert d-1\rvert=4$

① 35 ② 40 ③ 45 ④ 50 ⑤ 55

ⅰ) $d=0$ 이면,

$a+b+c+\lvert -1\rvert=4$

$a+b+c=3.$

${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$

ⅱ) $d \geq 1$ (자연수) 이면.

$a+b+c+d-1=4$

$a+b+c+d=5$ (d는 자연수)

$a+b+c+d'+1=5$

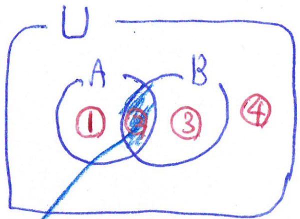
$a+b+c+d'=4$

${}_4H_4 = {}_7C_4 = 35$

27. 전체집합 $U=\{-4,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 4\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 A, B의 모든 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는? [3점]

(가) $n(A\cap B)\geq 2$
(나) 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은 0이다.

① 259 ② 262 ③ 265 ④ 268 ⑤ 271



★ 원소를 배치할 수 있는 구역
①~④ 4군데.

i) $\boxed{A\cap B}$에 (−1, 1) (−2, 2) (−4, 4)

3개 중 1개를 배치.

$_3C_1 \times 3^4 = 243$

남은 4개의 원소를

$A-B$ / $B-A$ / $(A\cup B)^c$ 중

한 군데에 배치.

ii) 3개 중 2개를 배치

$_3C_2 \times 3^2 = 27$

iii) 3개 모두를 배치 1가지.

28. 두 집합 $X=\{x\,|\,x$는 9 이하의 자연수$\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\rightarrow Y$의 개수는? [4점]

(가) 집합 $\{x\,|\,f(x)=1,\ x\in X\}$의 원소의 개수는 3이고, 집합 $\{x\,|\,f(x)=2,\ x\in X\}$의 원소의 개수는 2이고, 집합 $\{x\,|\,f(x)=4,\ x\in X\}$의 원소의 개수는 4이다.
(나) 7 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x)+f(x+1)\neq f(x+2)$이다.

① 920 ② 925 ③ 930 ④ 935 ⑤ 940

∨ 전체 경우의 수. $_9C_3 \times {_6C_2} \times {_4C_4}$

⇒ 9개의 정의역 중에서

1을 쏘는 것 (3개) / 2 쏘는 것 (2개) /

나머지 4 쏘는 것 (4개)를 ★분할

∨ (나) 어기면 $f(x)+f(x+1)=f(x+2)$

$(f(x),\ f(x+1),\ f(x+2)) \rightarrow (1,\ 1,\ 2)$ or $(2,\ 2,\ 4)$.

① (1, 1, 2) 배치

$(f(1),\ f(2),\ f(3)) \sim (f(7),\ f(8),\ f(9))$ 7가지

7가지 × $_6C_1$ × $_5C_1$ × 1가지.

$f(x)=1$ (1개) $f(x)=2$ (1개) 나머지 $f(x)=4$

② (2, 2, 4) 배치.

7가지 × $_6C_3$ × 1가지.

$f(x)=1$ (3개) 나머지 $f(x)=4$

★ ①∩② 의 경우 ⇒ (1, 1, 2, 2, 4)

$(f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)) \sim (f(5),\ f(6),\ f(7),\ f(8),\ f(9))$

5가지 × $_4C_1$ × 1가지

$f(x)=1$ (1개) 나머지 $f(x)=4$

전체 ① ② ①∩②

∴ 1260 − (210 + 140 − 20)

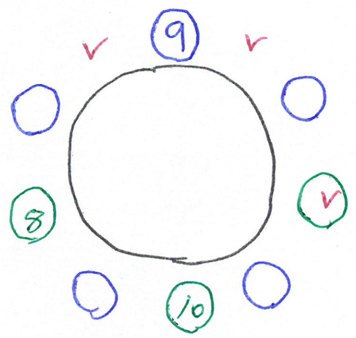
단답형

29. 숫자 1, 3, 5, 7, 9가 각각 하나씩 적혀 있는 5개의 흰색 접시와 숫자 2, 4, 6, 8, 10이 각각 하나씩 적혀 있는 5개의 검은색 접시가 있다. 이 10개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) 흰색 접시끼리는 서로 이웃하지 않는다.
(나) 서로 이웃한 2개의 접시에 적혀 있는 수의 곱은 70 이하이다.

ⅰ) 흰색 접시 먼저 배치 $\frac{5!}{5}$

ⅱ) 검은색 접시 8, 10이 9 접시에 이웃 하면 X. 3×2

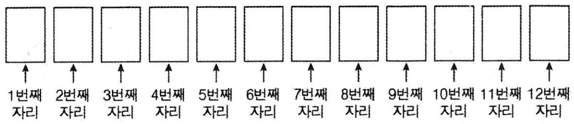


ⅲ) 남은 사이 자리 3군데에 나머지 검은색 접시 배치 $3!$

$\Rightarrow 24 \times 6 \times 6 = \boxed{864}$

30. 정수 -1이 적혀 있는 6장의 카드와 정수 1이 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 12장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 12개의 자리에 각각 한 장씩 놓을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 수가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

11 이하의 모든 자연수 n에 대하여 n번째 자리에 놓인 카드에 적혀 있는 수와 $(n+1)$번째 자리에 놓인 카드에 적혀 있는 수의 곱을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{11} a_n = 3$이다.



$\boxed{1}\boxed{1}$ or $\boxed{-1}\boxed{-1}$ $\rightarrow a_n = 1$

$\boxed{1}\boxed{-1}$ or $\boxed{-1}\boxed{1}$ $\rightarrow a_n = -1$.

$\Rightarrow$ 합이 3이 나오려면.

$1 \times x$번 $+ (-1) \times (11-x)$번 $= 3$

$x - 11 + x = 3 \quad \therefore x = 7.$

★ 즉, 1과 −1 과의 교차가 4번 일어나야 한다.

1 | −1 | 1 | −1 | 1

x개 a개 y개 b개 z개.

$x+y+z=6$ 자연수 ${}_3H_3$

$a+b=6$ 자연수 ${}_2H_4$

반대로도 가능합니다!! −1 | 1 | −1 | 1 | −1

$\therefore {}_3H_3 \times {}_2H_4 \times 2 = \boxed{100}$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(12n+1)}{4n^3-1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty}\frac{12n^3+n^2}{4n^3-1} = \frac{12}{4}$

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(3n+2)a_n=6,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=2$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

✓ $(3n+2)a_n = c_n$ / $\lim_{n\to\infty} c_n = 6.$

✓ $\frac{b_n}{n} = d_n$ / $\lim_{n\to\infty} d_n = 2.$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{3n+2} \times n d_n.$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n+2} \times c_n d_n\right)$

$= \frac{1}{3} \times 12 = 4$

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sqrt{n+2}$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,a_n$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$S_{n-1} = \sqrt{n+1}$

$\rightarrow \underbrace{S_n - S_{n-1}}_{a_n} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\,(\overbrace{n+2-(n+1)}^{1})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}$

26. 자연수 a에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5a^{2n} + (2a)^{n+1}}{a^{2n} + (2a)^n} = a+1$$

*분모, 분자 $\div a^{2n}$

을 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$\lim_{n\to\infty} \frac{5 + 2a \times \left(\frac{2}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{a}\right)^n}$

i) $\frac{2}{a} < 1$ 이면,

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{a}\right)^n = 0$.

$\rightarrow \frac{5+0}{1+0} = a+1$ $\therefore a=4$

ii) $\frac{2}{a} = 1$ 이면, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{a}\right)^n = 1$

$\rightarrow \frac{5+4\times 1}{1+1} = a+1$ ~~a=~~

iii) $\frac{2}{a} > 1$ 이면, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{a}\right)^n = \infty$

$\rightarrow \frac{0+2a}{0+1} = a+1$ $\therefore a=1$

⇒ NEXT

$y=f(x)$

27. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$y=a_n x$

좌표평면에서 원점을 지나고 기울기가 a_n인 직선이 ① 점 $(2n-1, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 n인 원과 서로 다른 두 점에서 만나고 ② 점 $(2n+1, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $n+1$인 원과 만나지 않는다.

$\lim_{n\to\infty} n\left(3-\dfrac{1}{a_n^2}\right)$의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

① $a_n x - y = 0$, $(2n-1, 0)$

$$d = \frac{(2n-1)a_n}{\sqrt{a_n^2+1}} < r = n$$

$$\rightarrow (2n-1)a_n < n\sqrt{a_n^2+1}$$

제곱 $(4n^2-4n+1)a_n^2 < n^2a_n^2+n^2$

$$(3n^2-4n+1)a_n^2 < n^2$$

$$\frac{1}{a_n^2} > \frac{3n^2-4n+1}{n^2}$$

② $a_n \cdot x - y = 0$. $(2n+1, 0)$

$$d = \frac{(2n+1)a_n}{\sqrt{a_n^2+1}} > r = n+1$$

→ 같은 과정. $\dfrac{1}{a_n^2} < \dfrac{3n^2+2n}{n^2+2n+1}$

$$\Rightarrow \frac{3n^2-4n+1}{n^2} < \frac{1}{a_n^2} < \frac{3n^2+2n}{n^2+2n+1}$$

$$\frac{4n+3}{(n+1)^2} < 3-\frac{1}{a_n^2} < \frac{4n-1}{n^2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n}{(n+1)^2} < \lim_{n\to\infty} n\left(3-\frac{1}{a_n^2}\right) < \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n}{n^2}$$

$\| \quad 4 \qquad\qquad \| \quad 4$

28. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+5$가 있다. 두 자연수 p, q에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}px^2+\frac{1}{2}qx+5 & (x<0) \\ 5 & (x\ge 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(f(x))^{2n+1}+5^{2n}\times g(x)}{(f(x))^{2n}+5^{2n}}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수가 7이다.

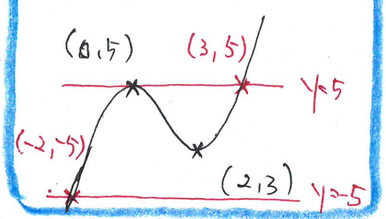
자연수 n에 대하여 직선 $y=\left(k-\frac{1}{2^n}\right)x+5$가 함수 $y=h(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n=4$이다.

$p+q+h(4)$의 값은? [4점]

① 38 ② 41 ③ 44 ④ 47 ⑤ 50

$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-3x$

$=\frac{3}{2}x(x-2)$



i) $f(x)^2 > 5^2$ 이면,

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)+g(x)\times\left(\frac{5}{f(x)}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{5}{f(x)}\right)^{2n}} = \frac{f(x)+0}{1+0}$$

ii) $f(x)^2 = 5^2$ 이면,

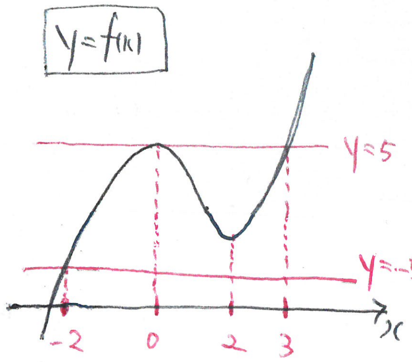
$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)+g(x)\times 1}{1+1}=\frac{f(x)+g(x)}{2}$$

iii) $f(x)^2 < 5^2$ 이면,

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)\times\left(\frac{f(x)}{5}\right)^{2n}+g(x)}{\left(\frac{f(x)}{5}\right)^{2n}+1}=\frac{0+g(x)}{0+1}$$

28

$$h(x)\begin{cases} f(x) & (f(x)>5,\ f(x)<-5) \Rightarrow x<-2,\ x>3 \\ \dfrac{f(x)+g(x)}{2} & (f(x)=5,-5) \Rightarrow x=-2,0,3 \\ g(x) & (-5<f(x)<5) \Rightarrow -2<x<0,\ 0<x<3 \end{cases}$$



⇒ $y=h(x)$는 실수 전체에서 "연속"

i) $x=-2$ 에서 연속 $f(-2)=g(-2)=-5$ → $2p-q+5=-5$ $\boxed{2p-q=-10}$

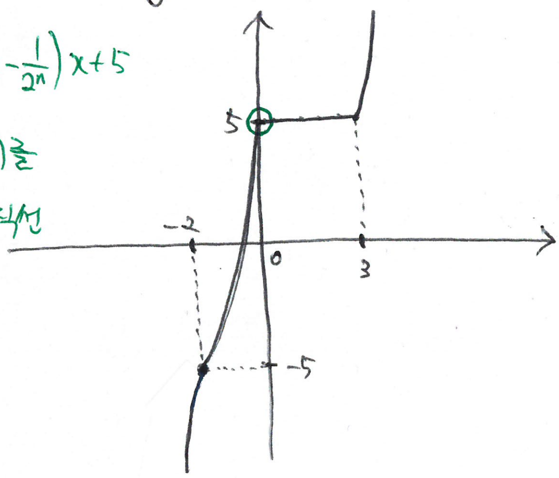
ii) $x=0$ 에서 연속 $\dfrac{f(0)+g(0)}{2}=g(0)$ → $f(0)=g(0)=5$.

iii) $x=3$ 에서 연속 $f(3)=g(3)=5$

따라서, $y=h(x)$의 그래프 개형은,

$y=\left(k-\frac{1}{2n}\right)x+5$

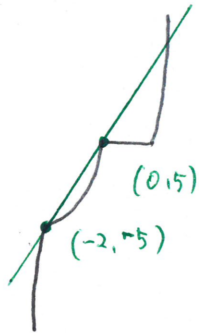
점 $(0,5)$를 지나는 직선



점$(-2,-5)$를 지날 때,

기울기가 5.

$y=h(x)$와의 교점 3개



점$(0,5)$에서 곡선부분의 접선을 그을 때,

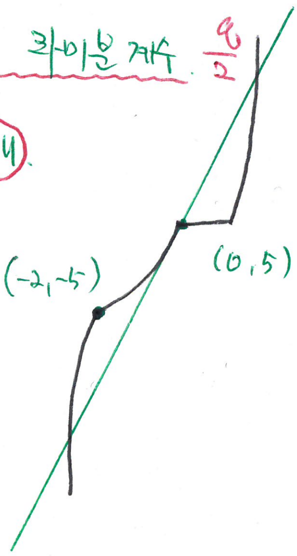
기울기는 "$x=0$"에서의 우미분계수 $\frac{q}{2}$

$y=h(x)$와의 교점 3개.

$y=\frac{1}{2}px^2+\frac{1}{2}qx+5$

$y'=px+\frac{q}{2}$

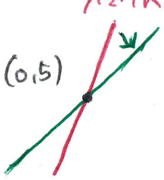
$h'(-0)=\frac{q}{2}$



★ n이 무한대(∞)가 되면,

직선은 $y=(k-0)x+5$

k보다 -0 만큼 낮은 기울기.



⇒ $y=h(x)$와의 교점을 4개 만드는 직선의 기울기 k

$5<k\le\frac{q}{2}$ 만족하는 자연수 k가 7개가 되려면 "$12\le\frac{q}{2}<13$"

$q=24$ or 25
↓ ↓
$p=7$ or $\cancel{\frac{15}{2}}$
★자연수

∴ $p+q+h(4)=7+24+f(4)=44$

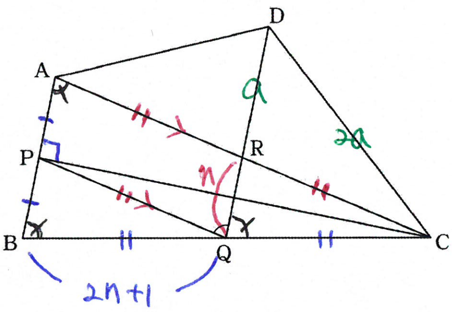
단답형

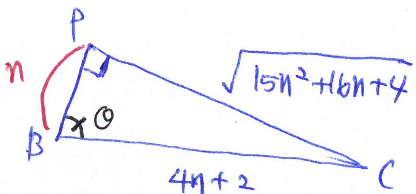
29. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 $\overline{AC}=\overline{BC}=4n+2$인 사각형 ABCD가 있다. 선분 AB의 중점을 P, 선분 BC의 중점을 Q라 하고, 선분 DQ가 선분 AC와 만나는 점을 R이라 하자.

$\theta =$ $\angle CAB=\angle PQR$, $\overline{CP}=\sqrt{15n^2+16n+4}$, $\overline{DR}:\overline{DC}=1:2$

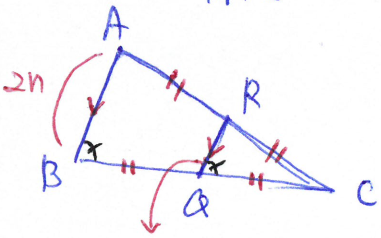
일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\overline{DR}-\frac{4}{3}n\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

□APQR
평행사변형





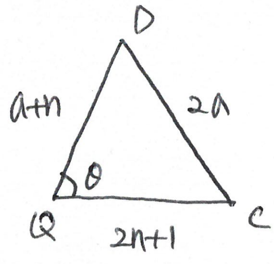
$\cos\theta = \dfrac{n}{4n+2}$



$\overline{QR}=n$

닮음비 = 큰 : 작
= 2 : 1
= $2n$: $\overline{QR}$

⇒



"cos 법칙"

$4a^2=(a+n)^2+(2n+1)-2(a+n)(2n+1)\cos\theta.$

* a에 대한 내림차순 정리

$3a^2-na-4n^2-4n-1=0.$

30. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. (단, k는 20 이하의 자연수이다.) [4점]

> 두 정수 a, b에 대하여
> $\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n$의 값과 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n$ $=A$ 의 값이 모두 존재하며
> $\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n$이 되도록 하는 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 19이다.

✓ $a=r=\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|$ 인 무한등비 수열.

* $r>0$ (절대값)

$r>1$ 이면, A는 ∞ 발산

$r=1$ 이면, $A=1$ 수렴.

$\cancel{-1}<r<1$ 이면, $A=0$ 수렴

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{2a+2b-20}{k}\right|=1$ or 0

→ NEXT

$\Rightarrow a=\dfrac{n+\sqrt{49n^2+48n+12}}{6}$ // $\overline{DR}$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{49n^2+48n+12}-7n\right)$

$=\dfrac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\dfrac{48n+12}{\sqrt{49n^2+48n+12}+7n}$

$=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{48}{\sqrt{49}+7}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{48}{14}=\boxed{\dfrac{4}{7}}$

30

(a,b) 순서쌍 개수

① $\lim_{n\to\infty} |a|(a+b)^n = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n = 1$ 인 경우.

$a+b=1$ 이고 $|a|=1$

$\frac{2a+2b-20}{k} = \pm 1$

$a=1,\ b=0$ 이면

$a=-1,\ b=2$ 이면.

$\frac{-18}{k} = \pm 1$

$\therefore k = 18,\ \cancel{-18}$

자연수

$(1,0)$ $(-1,2)$

2개

② $\lim_{n\to\infty} |a|(a+b)^n = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2a+2b-20}{k}\right| = 0$ 인 경우.

$a=0$ or $-1 < a+b < 1$

$a+b = 0$

a·b는 정수

$-1 < \frac{2a+2b-20}{k} < 1$

$a+b=0$ 이면, $-1 < \frac{-20}{k} < 1$ $\quad \cancel{k>20}$ (k는 20이하 자연수).

$a=0$ 이면, $-1 < \frac{2b-20}{k} < 1 \rightarrow \boxed{\frac{20-k}{2} < b < \frac{20+k}{2}}$

$k=1$: $9.5 < b < 10.5 \rightarrow b=10$ $\quad (0,10)$ 1개

$k=2$: $9 < b < 11 \rightarrow b=10$ $\quad (0,10)$ 1개

$k=3$: $8.5 < b < 11.5 \rightarrow b=9,10,11$ $\quad (0,9)\ (0,10)\ (0,11)$ 3개.

$k=4$: $8 < b < 12 \rightarrow b=9,10,11$ $\quad (0,9)\ (0,10)\ (0,11)$ 3개

⋮

$k=18$: $1 < b < 19 \rightarrow b=2,3,\dots,18$ $\quad (0,2) \sim (0,18)$ 17개

$k=19$: $0.5 < b < 19.5 \rightarrow b=1,2,\dots,19$ $\quad$ 19개

$k=20$: $0 < b < 20 \rightarrow b=1,2,\dots,19$ $\quad$ 19개

$\Rightarrow$ 만족하는 (순서쌍 개수 19개) 자연수 k 합 $18+19+20 = 57$