

## 가중치 내분 Refined

논리화학

오랜만입니다. 칼럼을 왜 썼나? 원래 있던 칼럼의 서술방식만 바꾸는 것이라서, 얼마 걸리지도 않을 것 같고 어차피 올해가 화1 라스트 댄스인데 이거 들고있어서 뭐하나 싶어서 씁니다.

현재 화학1에서 사용되는 내분은 크게 두 종류가 있습니다. 일차함수 내분과 존재 비 내분입니다. 일차함수 내분은 직선을 사용하는 것이고, 존재 비 내분은 몰 농도/평균 분자량을 구하기 위해 분모를 기준으로 내분하는 것을 칭합니다.

이번 칼럼에선, 새로운 형식의 내분을 소개하려고 합니다.

이 내분의 이름은 '가중치 내분'입니다. 내분을 하고 싶은 대상에 대해 임의의 가중치를 잘 부여하여, 내분을 강제로 사용 가능하게 만든 후 내분을 적용하기 때문에 이런 이름을 붙였습니다. 작년 즈음부터 간간히 쓰던 스킬이었으나, 230920을 계기로 일반화 필요성을 느껴 다듬어서 올립니다.

먼저 주의사항을 말씀 드리자면, 이 풀이는 내분보다도 고도화된 방법이기 때문에 이해가 잘 가지 않는다면 굳이 쓰지 않아도 됩니다.

이 스킬의 적용 상황의 경우도, 일직선상의 세 점이 유리함수로 주어진 경우로 한정되기 때문에, 일반 내분만큼 엄청나게 확장 가능하진 않습니다. 대신 일반 내분의 계산량 감소보다도, 훨씬 더 큰 계산 감소량 기댓값을 가집니다.

우선 다음의 문제를 봅시다. 2018학년도 수능 20번입니다. 이 문항이 평가원 기출 문항 중에선 가중치 내분을 적용하기 가장 쉬운 상황입니다.

20. 다음은 중화 반응 실험이다.

**[실험 과정]**  
 (가)  $\text{HCl}(aq)$ ,  $\text{NaOH}(aq)$ ,  $\text{KOH}(aq)$ 을 각각 준비한다.  
 (나)  $\text{HCl}(aq)$   $x\text{ mL}$ 에  $\text{NaOH}(aq)$   $20\text{ mL}$ 를 조금씩 첨가한다.  
 (다) (나)의 최종 혼합 용액에서  $15\text{ mL}$ 를 취하여 비커에 넣고  $\text{KOH}(aq)$   $10\text{ mL}$ 를 조금씩 첨가한다.

**[실험 결과]**  
 (나)에서  $\text{NaOH}(aq)$  부피에 따른 혼합 용액의 단위 부피당  $\text{X}$  이온 수( $n$ )      (다)에서  $\text{KOH}(aq)$  부피에 따른 혼합 용액의 단위 부피당  $\text{X}$  이온 수( $n$ )

$\text{HCl}(aq)$   $x\text{ mL}$ 와  $\text{KOH}(aq)$   $30\text{ mL}$ 를 혼합한 용액에서  $\frac{\text{K}^+ \text{ 수}}{\text{Cl}^- \text{ 수}}$ 는?

(단, 혼합 용액의 부피는 혼합 전 각 용액의 부피의 합과 같다.) [3점]

- ①  $\frac{1}{4}$     ②  $\frac{3}{8}$     ③  $\frac{1}{2}$     ④  $\frac{2}{3}$     ⑤  $\frac{3}{4}$

일반적으로는  $x$ 를 구하기 위해 (나)에서의 그래프 값을 사용해 산수를 합니다.

가중치 내분으로 풀어봅시다. 앞서 임의의 가중치를 부여해 강제로 내분이 가능하다고 했던 것을 기억합시다.

$0\text{ mL}$  시점의 혼합 용액과  $20\text{ mL}$  시점의 혼합 용액을 그대로 섞는다고 생각해 봅시다. 즉 각각  $x\text{ mL}$ ,  $x+20\text{ mL}$ 로 단순히 섞습니다. 이러면 혼합 용액을 구성하는  $\text{HCl}(aq)$ 의 부피가  $2x$ ,  $\text{NaOH}(aq)$ 의 부피는  $20$ 이 됩니다.

잘 생각해 보면... 이 용액은  $10\text{ mL}$  첨가 지점의 2배와 같습니다. 이제 내분비를 확인합니다.  $10\text{ mL}$  지점의 단위 부피당  $\text{X}$  이온 수는  $2$ 로,  $0\text{ mL}$  지점의 값  $4$ 와,  $20\text{ mL}$  지점의 값  $1$ 의  $2:1$  내분점입니다. 따라서 존재 비(분모의 비, 즉 부피 비)는  $0\text{ mL}$  지점과  $20\text{ mL}$  지점이  $1:2$ 입니다.

1)  $0\text{ mL}$  지점의 용액  $x\text{ mL}$ ,  $20\text{ mL}$  지점의 용액  $x+20\text{ mL}$ 를 그대로 섞어서  $10\text{ mL}$  지점과 동일한 구성의 용액을 얻었고

2) 구한 부피 비가  $1:2$ 입니다. 따라서  $x:x+20=1:2$ 에서  $x=20$ 입니다.

여기까지가 이전 칼럼의 가중치 내분 방법이었고, 암기하기 편한 방법을 소개합니다.

우선 비례식의 곱을 정의합니다 :  $a:b$ 와  $c:d$  비례식의 곱은  $ac:bd$ 라고 정의합시다.

나눗셈도 비슷하게 정의됩니다.  $a:b$ 와  $c:d$  비례식의 나눗셈은  $\frac{a}{c}:\frac{b}{d}$ 입니다.

그러면 다음과 같이 가중치 내분을 표현할 수 있습니다.

$$\text{최종 비율} = \text{가짜 비율} \times \text{가중치 비}$$

최종 비율은 실제 혼합했을때의 결과(분수의 값의 내분비), 가짜 비율은 겉으로 보이는 부피 비(해당 지점에서의 분모의 값) 가중치 비는  $x$ 축의 내분비를 의미합니다.

윗 문항에 빗대어 설명해야 이해가 갑니다.

NaOH 0mL과 20mL지점을 1:1로 내분하면 10mL지점이므로 가중치 비는 1:1입니다.

최종 비율은 0mL지점에서 값이 4, 10mL지점에서 값이 2, 20mL지점에서 값이 1이므로, 내분비를 반대로 뒤집어서 구하면 최종 비율은 1:2입니다.

가짜 비율은 겉으로 보이는 부피 비(분모의 값)이므로  $x:x+20$ 입니다.

따라서  $1:2 = (x:x+20) \times (1:1)$ 이므로  $x=20$ 입니다.

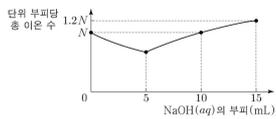
다음 문제를 풀어보기 전에, 가중치 내분이 사용 불가능한 상황을 알아봅시다.

이 문항의 경우, 0 mL 지점과 10 mL 지점, 15 mL 지점에서만 값이 주어졌습니다. 가중치 내분의 경우 일반적으로 점 세 개가 주어졌을 때 사용할 수 있지만, 이 상황의 경우 중간에 첨점을 가지므로 당연히 사용 불가능 합니다. 분모의 경우 직선이지만, 분모는 일직선이 아니기 때문에 0 mL 지점과 15 mL 지점을 적절히 혼합한다고 해도 10 mL 지점의 값을 얻을 순 없습니다.

20. 다음은 중화 반응 실험이다.

(실험 과정)  
 (가) HCl(aq), NaOH(aq)을 준비한다.  
 (나) HCl(aq) V mL를 비커에 넣는다.  
 (다) (나)의 비커에 NaOH(aq) 15 mL를 조금씩 넣는다.

(실험 결과)  
 ○ (다) 과정에서 NaOH(aq)의 부피에 따른 혼합 용액의 단위 부피당 총 이온 수



○ (다) 과정에서 NaOH(aq)의 부피가 각각 a mL, b mL일 때의 결과

NaOH(aq)의 부피(mL)	혼합 용액의 단위 부피당 총 이온 수	혼합 용액의 액성
a	$\frac{3}{4}N$	산성
b	$\frac{3}{4}N$	염기성

$a \times b$ 는? (단, 혼합 용액의 부피는 혼합 전 각 용액의 부피의 합과 같다.) [3점]

- ① 12    ② 15    ③ 18    ④ 20    ⑤ 24

이제 다음 문제를 가중치 내분을 사용 해 풀어 봅시다. 순수한  $\text{HCl}(aq)$ , B를 잘 혼합해 A를 얻어서  $V$ 를 구하기만 하고 끝까지는 안 풀어도 됩니다.

18. 다음은 중화 반응 실험이다.

[실험 과정]  
 (가)  $\text{HCl}(aq)$ ,  $\text{KOH}(aq)$ ,  $\text{NaOH}(aq)$ 을 준비한다.  
 (나) 4개의 비커에 각각  $\text{HCl}(aq)$  10 mL를 넣는다.  
 (다) (나)의 4개의 비커에 각각  $\text{KOH}(aq)$  2V mL,  $\text{KOH}(aq)$  3V mL,  $\text{NaOH}(aq)$  2V mL,  $\text{NaOH}(aq)$  20 mL를 첨가하여 혼합 용액 A~D를 만든다.

[실험 결과 및 자료]  
 ○  $\text{HCl}(aq)$ 에서 단위 부피당  $\text{H}^+$  수:  $n$   
 ○ A~D에서 단위 부피당  $\text{H}^+$  수 또는  $\text{OH}^-$  수 및 용액의 액성

혼합 용액	A	B	C	D
단위 부피당 $\text{H}^+$ 수 또는 $\text{OH}^-$ 수	$\frac{3}{8}n$	$\frac{1}{4}n$	$x$	$\frac{1}{6}n$
용액의 액성		산성		염기성

$x$ 는? (단, 혼합한 용액의 부피는 혼합 전 각 용액의 부피의 합과 같다.) [3점]

- ①  $\frac{1}{8}n$     ②  $\frac{1}{6}n$     ③  $\frac{1}{5}n$     ④  $\frac{1}{4}n$     ⑤  $\frac{1}{3}n$

순수한  $\text{HCl}$ , A와 B를 가중치 내분 할것입니다. 순수한  $\text{HCl}$  10mL에  $\text{KOH}$ 를 첨가하는 상황으로 해석하면 됩니다. 그러면  $\text{KOH}$ 의 첨가량이 0, A는 2V, B는 3V입니다.그러면 유리함수의 점이 세 개이므로 가중치 내분이 가능합니다.

A와 B 둘 다 산성입니다.

$n=24$ 로 두어서 편히 풉시다.

우선 가짜 비율은 같으로 보이는 부피비이므로 순수한  $\text{HCl}$  10mL와 혼합용액 B, 즉 10+3V의 비율인 10:10+3V입니다.

$\text{HCl}$ 의 농도는 24, A는 9, B는 6입니다.

그러면 실제 비율은 24, 9, 6을 내분하고 뒤집은 1:5입니다.

가중치 비는 0, 2V, 3V를 내분하고 뒤집은 1:2입니다.

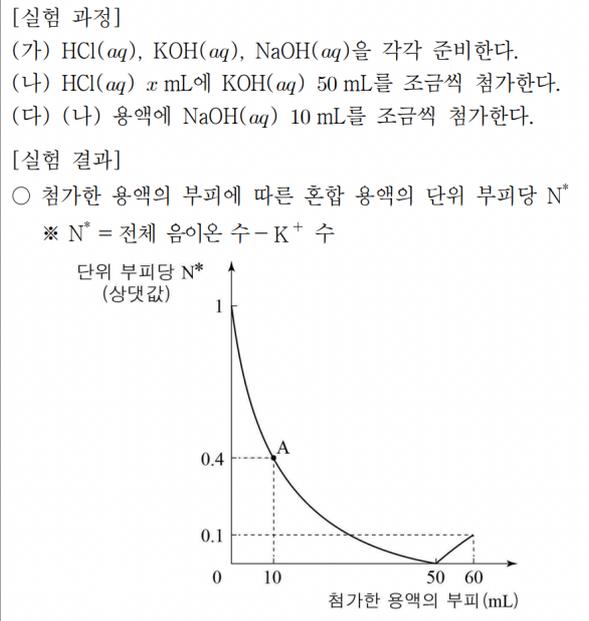
실제비율 = 가짜비율 × 가중치 비입니다.

따라서 1:5 = 가짜비율 × 1:2에서, 가짜 비율은 2:5임을 알게 됩니다.

즉 10과 10+3V의 비가 2:5이므로  $V=5$ 입니다.

다음 문제도 간략하게  $x$ 만 구해봅시다. 혼자 해 보세요.

20. 다음은 중화 반응 실험이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 혼합 용액의 부피는 혼합 전 각 용액의 부피의 합과 같다.) [3점]

<보 기>

- ㄱ. A에서 이온 수 비는  $K^+ : H^+ = 1 : 4$ 이다.  
 ㄴ. 단위 부피당 이온 수는  $\text{NaOH}(aq)$ 이  $\text{KOH}(aq)$ 의 3배이다.  
 ㄷ.  $\text{HCl}(aq)$   $x$  mL와  $\text{NaOH}(aq)$  20 mL를 혼합한 용액에서  

$$\frac{OH^- \text{수}}{Cl^- \text{수}} = \frac{2}{5}$$
이다.

- ① ㄱ    ② ㄴ    ③ ㄱ, ㄷ    ④ ㄴ, ㄷ    ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

0. 0mL지점, 10mL지점, 50mL지점을 가지고 가중치 내분 합니다.

1. 가짜 비율은  $x : x+50$ 입니다.

2. 실제 비율은 1, 0.4, 0을 내분하고 뒤집은 2:3입니다.

3. 가중치 비는 0, 10, 50을 내분하고 뒤집은 4:1입니다.

실제 비 = 가짜 비  $\times$  가중치 비에서

$2:3 = (x : x+50) \times 4:1$ ,  $2:12 = x : x+50$ 에서  $x=10$ 입니다.

위 비례식의 곱을 해결할 때 양변에 1:4를 곱해주고 4:4를 소거했습니다.

다음 문항도  $V$ 만 구해봅시다. 혼자 해 보세요.

20. 다음은 중화 반응 실험이다.

[실험 과정]  
 (가)  $\text{NaOH}(aq)$ ,  $\text{HCl}(aq)$ ,  $\text{HBr}(aq)$  을 각각 준비한다.  
 (나)  $\text{NaOH}(aq)$  10 mL에  $\text{HCl}(aq)$  3V mL를 조금씩 첨가한다.  
 (다) (나) 용액에  $\text{HBr}(aq)$  4V mL를 조금씩 첨가한다.

[실험 결과]  
 ○ (나)에서  $\text{HCl}(aq)$  부피에 따른 혼합 용액의 단위 부피당 X 이온 수

$\text{HCl}(aq)$ 의 부피(mL)	0	$V$	$2V$	$3V$
단위 부피 당 X 이온 수	$\frac{3}{2}n$	$\frac{4}{5}n$	$x$	$\frac{6}{25}n$

○ (다)에서  $\text{HBr}(aq)$  부피에 따른 혼합 용액의 Y 이온 수

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 혼합 용액의 부피는 혼합 전 각 용액의 부피의 합과 같다.) [3점]

< 보 기 >

ㄱ. X 이온은  $\text{OH}^-$ 이다.  
 ㄴ.  $V = 10$ 이다.  
 ㄷ.  $\frac{y}{x} = 40$ 이다.

- ① ㄱ    ② ㄷ    ③ ㄱ, ㄴ    ④ ㄱ, ㄷ    ⑤ ㄴ, ㄷ

X이온이 무엇인지는 판단할 필요가 없습니다. 어차피 일차함수이므로 일단 가중치 내분 때리면 부피는 나옵니다.

$n = 50$ 으로 편하게 둡니다.

0,  $V$ ,  $3V$  지점에서

단위부피당 X 이온 수 75, 40, 12를 가중치 내분 합니다.

실제 비율은 내분하고 뒤집은  $28 : 35 = 4 : 5$ 입니다.

가짜 비율은 겉으로 보이는 부피인,  $10 : 10 + 3V$ 입니다.

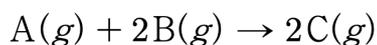
가중치 비는 0,  $V$ ,  $3V$ 를 내분하고 뒤집은  $2 : 1$ 입니다.

따라서  $4 : 5 = (10 : 10 + 3V) \times 2 : 1$ 에서  $2 : 5 = 10 : 10 + 3V$ ,  $V = 5$ 입니다.

지금까지는 농도 비만 내분의 대상으로 사용했습니다. 특이한 분수값이 제시된 230920을 한번 끝까지 풀어볼까요? 양적관계 분수 값에 내분을 적용하는 것이 까다롭게 느껴질 수도 있습니다. 본질적으로 분모가 기준임을 이해하고 계신다면 적용할 수 있을 겁니다. 즉, 아래의 자료에서, 내분을 사용하고 싶다면 A의 질량의 내분이 기준이고, 반대로 말하면 내분을 통해 얻는 비율이 A의 질량의 비율입니다.

다음 페이지에 힌트가 있으니 모르겠으면 참고하시면 됩니다.

20. 다음은 A(g)와 B(g)가 반응하여 C(g)를 생성하는 반응의 화학 반응식이다.



표는 실린더에 A(g)와 B(g)를 넣고 반응시켰을 때, 반응이 진행되는 동안 시간에 따른 실린더 속 기체에 대한 자료이다.  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ 이고,  $t_4$ 에서 반응이 완결되었다.

시간	0	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$
$\frac{B(g) \text{의 질량}}{A(g) \text{의 질량}}$	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{1}{2}$	
전체 기체의 양(mol) (상댓값)	$x$	7	6.7	6.1	$y$

$\frac{A \text{의 분자량}}{C \text{의 분자량}} \times \frac{y}{x}$ 는? (단, 실린더 속 기체의 온도와 압력은 일정하다.) [3점]

- ①  $\frac{3}{10}$       ②  $\frac{2}{5}$       ③  $\frac{8}{15}$       ④  $\frac{7}{12}$       ⑤  $\frac{2}{3}$

전체 기체의 양을  $x$ 축으로 둡니다.

그러면 7, 6.7, 6.1 지점에서

$\frac{B}{A}$ 가  $\frac{7}{8}, \frac{7}{9}, \frac{1}{2}$ 입니다.

우선 가중치 내분만을 할 것이기 때문에, 분수값 전체에 72를 곱해줍니다.

그러면 63, 56, 36입니다.

가중치 비는 7, 6.7, 6.1을 내분하고 뒤집은 2:1입니다.

실제 비율은 63, 56, 36을 내분하고 뒤집은 20:7입니다.

그러면  $20:7 = \text{가짜비율} \times (2:1)$ 에서 가짜 비율은 10:7을 얻습니다.

여기서 가짜 비율이 무엇인지 해석해주면 됩니다.

분모가 A였으므로 앞서 가짜 비율이 각 지점의 부피비였듯이, 이번엔 각 지점의 A의 비율입니다.

그러면 A의 양의 비율이 10:7임을 얻습니다.

$\frac{B}{A}$ 가  $\frac{7}{8}, \frac{1}{2}$ 일 때 A의 양의 비율이 10:7이었으므로,

$\frac{7}{8} : \frac{1}{2}$ 에 10:7을 곱해주고 통분하면 B의 개수의 비율을 얻습니다.

$(7:4) \times (10:7) = 5:2$ 입니다. 따라서 B의 개수의 비는 5:2입니다.

반응 계수 비가 1:2이므로

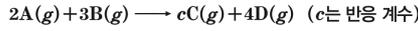
A의 양의 비율이 10:7일때

B는 10:4로 두면 변화량이 맞습니다.

즉  $t_1$ 일 때 A, B가 존재하는 양이 같습니다. 이 때 질량 비가  $A:B=8:7$ 이므로, 분자량 비는 8:7입니다. 그러면 초기지점 존재 비율이 7:8임을 얻습니다.

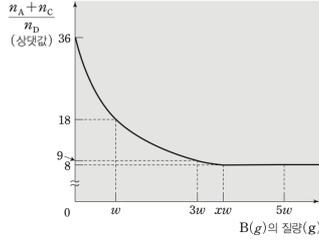
이제 뒷부분은 지금 구한것들을 이용하면 충분히 푸실 수 있을겁니다.

다음은 A(g)와 B(g)가 반응하여 C(g)와 D(g)를 생성하는 반응의 화학 반응식이다.



그림은 A(g)와 D(g)가 각각  $\frac{7}{3}w \text{ g}$ ,  $\frac{3}{4}w \text{ g}$ 씩 들어 있는 용기에 B(g)를 넣어 반응을 완결시켰을 때, 넣어 준

B(g)의 질량에 따른  $\frac{n_A+n_C}{n_D}$ 를 나타낸 것이다.  $n_A, n_C, n_D$ 는 각각 A, C, D의 양(mol)이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 (보기)에서 있는 대로 고른 것은?

보기

- ㄱ.  $c=2$ 이다.
- ㄴ.  $x = \frac{7}{2}$ 이다.
- ㄷ.  $\frac{D \text{의 분자량}}{C \text{의 분자량}} = \frac{9}{22}$ 이다.

- ① ㄱ                      ② ㄷ                      ③ ㄱ, ㄴ                      ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

적당한 지점까지만 풀겠습니다.  
 유리함수와 세 점이므로 내분이 가능합니다.

B의 질량을  $x$ 축으로 잡습니다. 그러면 가중치 비는 2:1입니다.  
 주어진 분수의 상댓값이 36, 18, 9이므로, 실제 비는 1:2입니다.  
 실제 비 = 가짜 비 × 가중치 비에서, 가짜 비는 1:4입니다.

가짜 비는 겉으로 보이는 비율이고, 분모의 비율에 해당합니다. 즉, 가짜 비의 의미는  $n_D$ 의 비율입니다. 0 지점에서와  $3w$  지점에서의 D의 비율이 1:4라는겁니다. 적당히 D를 0 지점에서 1,  $3w$  지점에서 4개로 둡시다.

그러면 선형성에 의해  $w$ 지점에서의 D의 개수가 2입니다.

$\frac{n_A+n_C}{n_D}$ (상댓값)에  $n_D$ 를 곱해서  $n_A+n_C$ 의 상댓값을 각 지점에서 구해보면, 전부 36입니다. 즉  $n_A$ 와  $n_C$ 이 합이 일정하고, 계수가 같다는 뜻이므로  $c=2$ 입니다. 뒷부분 생략.