2027학년도 The Origin.Zero

• 수학 영역 •

해 설

1.
정답 ②

$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} = 2^{-3 \times \frac{1}{3}} \times 2^{2 \times \frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$

2.
정답 ②

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$에서
$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$이므로
$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$
$= 3 - 6 + 2$
$= -1$

3.
정답 ②

$\sum_{k=1}^{6} (k^2 - ak) = \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - a \times \frac{6 \times 7}{2}$
$= 7$
에서
$12 \times 7 = a \times 3 \times 7$
곧, $a = 4$

4.
정답 ④

$2^2 + 3 = a \times 2^2 + 2 + 1$에서
$a = 1$
따라서
$f(1) = 1^2 + 3 = 4$

5.
정답 ⑤

$f(x) = (x^3 - x)(x^2 + x - 4)$에서
$f'(x) = (3x^2 - 1)(x^2 + x - 4) + (x^3 - x)(2x + 1)$
이므로
$f'(2) = 11 \times 2 + 6 \times 5 = 52$

6.
정답 ⑤

$a^{\log_2 b} = 8$의 양변에 $\log_2$를 취하면
$\log_2 a \times \log_2 b = 3$
$ab = 16$의 양변에 $\log_2$를 취하면
$\log_2 a + \log_2 b = 4$
따라서
$(\log_2 a)^2 + (\log_2 b)^2 = (\log_2 a + \log_2 b)^2 - 2 \times \log_2 a \times \log_2 b$
$= 4^2 - 2 \times 3$
$= 10$

7.
정답 ④
$x \ge 0$에서 $|x|^3 = x^3$이므로
$x^3 = -x^2 + 6x$
$(x+3)x(x-2) = 0$
곧, 두 곡선 $y = |x|^3$, $y = -x^2 + 6x$은
$x = 0$, $x = 2$일 때 만나고
이 두 곡선으로 둘러싸인 넓이는
$\int_0^2 \{(-x^2 + 6x) - x^3\} dx$
$= \frac{16}{3}$

8.
정답 ④

$3\sin^2(\pi + \theta) - 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - 4 = 0$
에서
$3\sin^2\theta - 4\cos\theta - 4 = 0$
$3\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1 = 0$
$(3\cos\theta + 1)(\cos\theta + 1) = 0$
$\cos\theta = -\frac{1}{3}$ ($\because$ $\pi < \theta < 2\pi$)
$\pi < \theta < 2\pi$에서 $\sin\theta < 0$
곧, $\sin\theta = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$이므로
$\tan\theta = 2\sqrt{2}$

9.
정답 ②

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^3} = 1$에서 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$($a$, b, c는 실수)
$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{x} = -6$에서 $a = -3$, $b = 0$
곧, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + c$
$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 극솟값 -4를 가진다.
$f(1) = 2 - 3 + c = -4$, 곧 $c = -3$
따라서 $f(2) = 1$

10.
정답 ③

$0 = 2^x - a$에서 $x = \log_2 a$,
$0 = -2^{x-1} + b$에서 $x = 1 + \log_2 b$
문제의 조건에서 $\log_2 a = 1 + \log_2 b$, 곧 $a = 2b$
두 점 P, Q의 좌표는 $\mathrm{P}(0,\ 2^0 - a)$, $\mathrm{Q}(0,\ -2^{-1} + b)$
따라서 선분 PQ의 길이는
$\left|(1 - a) - \left(-\frac{1}{2} + b\right)\right| = \frac{9}{2}$

$a=2b$, $b>0$이므로 $b=2$, $a=4$
따라서 $a+b=6$

11.
정답 ②

시각 $t(t\ge 0)$에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하자.
$t=0$일 때, 원점에서 출발하므로
$x_1(t)=t^3-6t^2+9t$,
$x_2(t)=-t^2+3t$
ㄱ. $t=2$일 때, 두 점의 위치는 모두
$x_1(2)=2$, $x_2(2)=2$
이므로 $t=2$일 때, 두 점 P, Q는 만난다. (참)
ㄴ. 두 점이 만나려면 위치가 같아야 하므로
$x_1(t)=x_2(t)$
$t^3-6t^2+9t=-t^2+3t$
$t(t-2)(t-3)=0$
따라서 출발한 후, 곧 $t>0$에서 $t=2$, $t=3$일 때, 두 점이 만나므로
그 횟수는 2이다. (참)
ㄷ. $v_1(t)=3(t-1)(t-3)$이므로 $t=0$에서 $t=3$까지
점 P가 이동한 거리는
$\int_0^3 |v_1(t)|dt=\int_0^1 v_1(t)dt-\int_1^3 v_1(t)dt$
$=2x_1(1)-x_1(3)$
$=8$,
$v_2(t)=-2t+3$이므로 $t=0$에서 $t=3$까지
점 Q가 이동한 거리는
$\int_0^3 |v_2(t)|dt=\int_0^{\frac{3}{2}} v_2(t)dt-\int_{\frac{3}{2}}^3 v_2(t)dt$
$=2x_2\left(\frac{3}{2}\right)-x_2(3)$
$=\frac{9}{2}$
따라서 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 이동한 거리는 점 Q가 이동한 거리의 2배가 아니다. (거짓)

12.
정답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.
$r\ge 0$이면 $|a_1+a_2+a_3+a_4|=|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|$이어야 하므로
문제의 조건에 모순이다.
따라서 $r<0$
$a_1+a_2+a_3+a_4=a_1(1+r)(1+r^2)=5$,
$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|=|a_1|(1-r)(1+r^2)=15$
두 식의 양변을 서로 나누어 정리하면
$\frac{a_1(1+r)}{|a_1|(1-r)}=\frac{1}{3}$
(i) $a_1>0$인 경우
$r=-\frac{1}{2}$이고, $a_1(1+r)(1+r^2)=5$에서 $a_1=8$
이때 $a_3=2$
(ii) $a_1<0$인 경우
$r=-2$이고, $a_1(1+r)(1+r^2)=5$에서 $a_1=-1$
이때 $a_3=-4$
(i), (ii)에 의하여 a_3의 값의 합은 -2

[참고]
$a_1=0$이면 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$이 되어 모순이다.

13.
정답 ③

$f(0)=-8$이므로
$f(x)=x^3+ax^2+bx-8$(a, b는 실수)로 놓을 수 있다.
점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은
$y=f'(t)(x-t)+f(t)$
이므로 이 접선이 원점을 지나려면
$f(t)-tf'(t)=0$
$2t^3+at^2+8=0$
그런데 원점을 지나는 접선의 개수는 2이므로
함수 $g(t)=2t^3+at^2+8$의 극솟값 또는 극댓값은
0이어야 한다.
$g'(t)=6t^2+2at=0$
에서 $t=0$ 또는 $t=-\frac{a}{3}$이고,
$g(0)=8\ne 0$이므로
$g\left(-\frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}+8=0$
곧, $a=-6$
$g(t)=2(t+1)(t-2)^2=0$에서 $t=-1$, $t=2$이고,
$t=-1$, $t=2$일 때 접선의 기울기는 각각
$f'(-1)=b+15$, $f'(2)=b-12$
이므로
$(b+15)+(b-12)=15$
에서 $b=6$
따라서 $f(x)=x^3-6x^2+6x-8$이고,
$f(3)=-17$

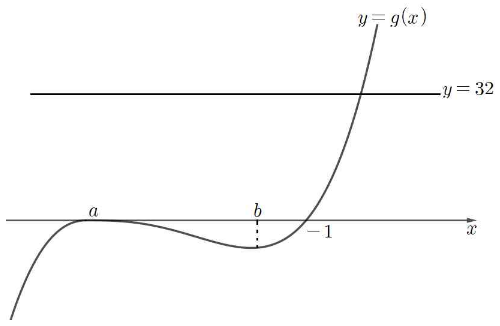
14.
정답 ③

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{BC}}^2=8^2+3^2-2\times 8\times 3\times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
곧, $\overline{\mathrm{BC}}=7$
$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로 원주각의 성질에 의하여
$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}$
따라서 선분 AD는 각 BAC의 이등분선이고,
이등분선의 성질에 의하여
$\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{CE}}=8:3$
곧, $\overline{\mathrm{CE}}=7\times\frac{3}{11}=\frac{21}{11}$
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
$\sin(\angle\mathrm{ABC})=\frac{3}{2R}$,
삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여
$\sin(\angle\mathrm{CDE})=\frac{21}{22r}$
이고, 원주각의 성질에 의하여
$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADC}(=\angle\mathrm{CDE})$
이므로
$\sin(\angle\mathrm{ABC})=\sin(\angle\mathrm{CDE})$
$\frac{3}{2R}=\frac{21}{22r}$
따라서 $\frac{r}{R}=\frac{7}{11}$

15.

정답 ③

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 $f(a)=0$,
함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로 $f'(a)=f(a)=0$
따라서 $f(x)=(x-a)^2(x-b)$(b는 실수)로 놓을 수 있다.
함수 $|g(x)|$가 $x=-1$에서 미분가능하지 않으므로
$g(-1)=0$
(ⅰ) $a>-1$인 경우
$x<a$일 때, $g(x)=f(x)$이고, $g(-1)=0$이므로 $b=-1$
곧, $f(x)=(x-a)^2(x+1)$
$x \geq a$일 때 $g(x)=\int_a^x (t-a)^2(t+1)dt$이므로 $x>a$에서
$g'(x)=(x-a)^2(x+1)>0$이 되어 증가함수이다.
따라서 $g(x)=0$의 실근은 $x=-1$과 $x=-1$뿐이다.
그런데 $g'(-1)=f'(-1)=(a+1)^2>0(\because a>-1)$이고,
$g'(a)=f(a)=0$이므로
함수 $|g(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않아 조건 (나)를 만족시킨다.
(ⅱ) $a \leq -1$인 경우
$x<a$일 때,, $g(x)=f(x)$이므로 $b<a$이면 $|g(x)|$는 $x=b$에서
미분가능하지 않다.
따라서 $b \geq a$
한편, $b \geq -1$이면 $a \leq x \leq -1$에서 $f(x)<0$이므로
$g(-1)=\int_a^{-1}(t-a)^2(t-b)dt<0$이 되어 $g(-1)=0$에 모순이다.
$x>a$일 때, $g'(x)=(x-a)^2(x-b)$이므로
함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



방정식 $g(x)=32$의 서로 다른 실근의 개수는 1이 되어 조건 (다)를
만족시키지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $f(x)=(x-a)^2(x+1)(a>-1)$이다.
함수 $g(x)$는 $x>a$에서 증가함수이므로 $x>a$에서 방정식의 $g(x)=32$의
서로 다른 실근의 개수는 1이고, 조건 (다)에 의하여 $x \leq a$에서 방정식
$g(x)=32$의 서로 다른 실근의 개수는 1이어야 한다.
곧, $f(x)$의 극댓값은 32이어야 하므로

$$f\left(\frac{a-2}{3}\right)=\frac{4(a+1)^3}{27}=32$$

에서 $a=5$
따라서 $f(x)=(x-5)^2(x+1)$이고,

$$g(7)=\int_5^7 (t-5)^2(t+1)dt=20$$

16.

정답 2

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n \leq 5) \\ a_n-6 & (a_n>5) \end{cases}$$에서

$n=1$일 때, $a_2=8(\because a_1=4)$
$n=2$일 때, $a_3=2(\because a_2=8)$
$n=3$일 때, $a_4=4(\because a_3=2)$
따라서 $a_{30}=a_3=2$

17.

정답 7

$f(x)=6x^2-4x+3$이므로
$F(x)=\int(6x^2-4x+3)dx$
$=2x^3-2x^2+3x+C$(단, C는 적분상수)
$F(1)=2-2+3+C=10$에서 $C=7$
따라서 $F(x)=2x^3-2x^2+3x+7$이고,
$F(0)=7$

18.

정답 4

함수 $f(x)$의 주기가 4이고, $b>0$이므로

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=4,\ 곧\ b=2$$

최댓값 5, 최솟값 1에서
$|a|+c=5$, $-|a|+c=1$
곧, $|a|=2$, $c=3$

$$f(1)=a\cos\frac{\pi}{3}+3=\frac{a}{2}+3<3$$

에서 $a<0$, 곧 $a=-2$

$$f(2)=-2\cos\frac{2\pi}{3}+3=4$$

19.

정답 27

$f(x)=x^4-6x^2-8x+60$
에서
$f'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$
이므로
함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $f(2)=36$을 갖는다.
또한, $g(x)=-x^2+6x+k$에서
함수 $g(x)$는 $x=3$에서 최댓값 $g(3)=9+k$를 갖는다.
따라서 문제의 조건에 의하여
$36 \geq 9+k$
$k \leq 27$
따라서 실수 k의 최댓값은 27

20.

정답 78

주어진 식에 의하여 $n \geq 2$일 때,

$$\frac{a_n}{n+1}=\frac{2S_n}{n+3}-\frac{2S_{n-1}}{n+2}$$

이다. $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로 이를 위 식에 대입하여 정리하면

$$(S_n-S_{n-1})\times\frac{1}{n+1}=\frac{2S_n}{n+3}-\frac{2S_{n-1}}{n+2}$$

$$S_n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+3}\right)=S_{n-1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}\right)$$

$$S_n\times\frac{n-1}{(n+1)(n+3)}=S_{n-1}\times\frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

$$S_n=\frac{n(n+3)}{(n-1)(n+2)}S_{n-1}\ (n \geq 2)$$

이 성립한다. 따라서 $f(n)=n(n+3)$
또한, $S_1=a_1=2$이므로

$$S_n=\frac{n(n+3)}{(n-1)(n+2)}\times\frac{(n-1)(n+2)}{(n-2)(n+1)}\times\cdots\times\frac{2\times5}{1\times4}\times S_1$$

에서

$$S_n = \frac{n(n+3)}{2}\,(n \geq 1)$$

이다. 따라서 $g(n) = \frac{n(n+3)}{2}$이고, $n \geq 2$에서

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= \frac{n(n+3)}{2} - \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$
$$= n+1$$

이고, $n=1$일때, $a_1 = 2$도 이를 만족하므로

$$a_n = n+1\,(n \geq 1)$$

이다. 따라서 $h(n) = n+1$이므로

$f(5)+g(6)+h(10) = 40+27+11 = 78$

21.

정답 50

조건 (나)에서

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{(x-1)^2} = k$

$f(1)-g(1)=0,\ f'(1)-g'(1)=0$ …… ㉠

조건 (다)에서 $f(1)=0$이므로 $g(1)=0$

$h(x)=f(x)+g(x)$라 하면 조건 (가)에서

$h(x) \geq 0$

이고 $h(1)=f(1)+g(1)=0$이므로

$h'(1)=0$

곧, $f'(1)+g'(1)=0$

㉠과 연립하면 $f'(1)=g'(1)=0$

따라서 $g(x)=(x-1)^2$이고,

조건 (다)에서 $h(3)=0$이고, 조건 (가)에서 $h(x) \geq 0$이므로

$h(x)=(x-1)^2(x-3)^2$

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x-3)^2-(x-1)^2$

$=(x-1)^2(x-2)(x-4)$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x-2)(x-4)-(x-1)^2}{(x-1)^2} = 2$

이므로 $k=2$

따라서 $k+f(5)=2+48=50$

22.

정답 30

두 함수 $f(x)=2^{x-a}+b,\ g(x)=\log_2(x-b)+a$는 서로 역함수 관계이고,

두 함수 $y=-2x+22,\ y=-\frac{1}{2}x+11$도 서로 역함수 관계이므로

두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(t,\ s)$라 하면, 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(s,\ t)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{2}$에서

$\sqrt{2}\,|t-s|=4\sqrt{2}$

$|t-s|=4$

(i) $t-s=4$인 경우

$s=-2t+22$와 연립하면 $t=\frac{26}{3},\ s=\frac{14}{3}$

곧, $\mathrm{A}\left(\frac{26}{3},\ \frac{14}{3}\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{14}{3},\ \frac{26}{3}\right)$

두 점근선은 $y=b,\ x=b$이므로 점 C의 좌표는 $\mathrm{C}(b,\ b)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\left|\frac{80}{3}-4b\right|=8$

$b=\frac{14}{3}$ 또는 $b=\frac{26}{3}$

$b=\frac{14}{3}$이면 두 점 A, B가 각각의 점근선 위의 점이 되므로 모순이다.

$b=\frac{26}{3}$이면 점 A가 점근선의 아래에 존재하므로 모순이다.

(ii) $s-t=4$인 경우

$s=-2t+22$와 연립하면 $t=6,\ s=10$

곧, $\mathrm{A}(6,\ 10),\ \mathrm{B}(10,\ 6),\ \mathrm{C}(b,\ b)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$|32-4b|=8$

$b=6$ 또는 $b=10$

$b=10$이면 두 점 A, B는 각각의 점근선 위의 점이므로 모순이다.

따라서 $b=6$이고, 점 A는 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$10=2^{6-a}+6$

곧, $a=4$

따라서 $f(x)=2^{x-4}+6,\ g(x)=\log_2(x-6)+4$이므로

$f(8)+g(22)=22+8=30$

확률과 통계

23.

정답 ②

$5^3=125$

24.

정답 ③

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{1}{4}$에서

$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{4}$

곧, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{7}{12}$에서

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{12}$

곧, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

25.

정답 ③

한 번의 주사위를 던져서 3의 배수가 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 점 P의 좌표의 x좌표와 y좌표의 합의 증감은 $+3$이다.

한 번의 주사위를 던져서 3의 배수가 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이고, 점 P의 좌표의 x좌표와 y좌표의 합의 증감은 1이다.

따라서 주사위를 4번 던져서 점 P의 좌표의 x좌표와 y좌표의 합의 증감이 $+6$이 되려면 3의 배수인 경우가 1번 3의 배수가 아닌 경우가 3번 나와야 한다.

따라서 구하는 확률은 독립시행의 정리에 의하여

${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$

26.

정답 ③

표본의 크기가 16일 때, 표본평균이 $\overline{X_1}$이므로

$\overline{X_1} \sim N\left(50,\ \left(\frac{\sigma}{4}\right)^2\right)$

따라서 $\mathrm{P}\left(\overline{X_1} \geq 53\right) = 0.1151$에서

$\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{53-50}{\frac{\sigma}{4}}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 1.2)(\because \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.2) = 0.3849)$

곧, $\sigma = 10$

따라서 표본의 크기가 25인 표본평균

$\overline{X_2} \sim N\left(50,\ \left(\frac{10}{5}\right)^2\right)$

$\mathrm{P}\left(48 \leq \overline{X_2} \leq 54\right) = \mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 2)$

$= 0.3413 + 0.4772$

$= 0.8185$

27.

정답 ③

$f(x)$는 밀도함수이므로 $f(x) \geq 0$

$b \geq 0,\ a+b \geq 0$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(0 \leq X \leq 2) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \times (b+2a+b) \times 2 = \frac{1}{2}$

$a+b = \frac{1}{4}$ ...... ㉠

또한, $\mathrm{P}(0 \leq X \leq 1) = \frac{1}{8}$이므로

$\frac{1}{2} \times (b+a+b) \times 1 = \frac{1}{8}$

$a+2b = \frac{1}{4}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a = \frac{1}{4},\ b = 0$

따라서

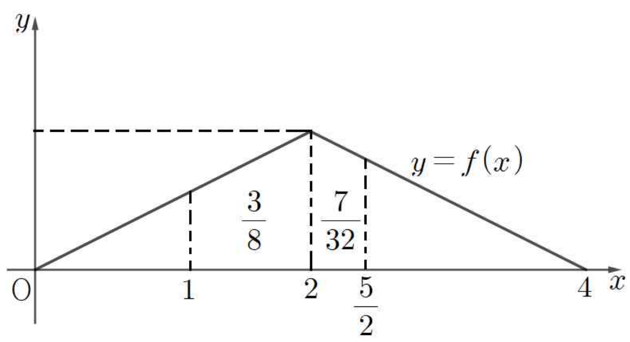
$\mathrm{P}\left(1 \leq X \leq \frac{5}{2}\right) = \mathrm{P}(1 \leq X \leq 2) + \mathrm{P}\left(2 \leq X \leq \frac{5}{2}\right)$

$= \mathrm{P}(1 \leq X \leq 2) + \mathrm{P}\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2\right)$

$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{8}\right)$

$= \frac{19}{32}$

[참고]



28.

정답 ③

각 행에 배치된 카드에 적힌 수의 합이 홀수가 되려면

각 행에 배치되는 홀수가 적힌 카드의 수의 합이 홀수이어야 한다.

홀수가 적힌 카드는 총 5장이므로

각 행에 배치되는 홀수가 적힌 카드의 수의 조합은 (1, 1, 3)이어야 한다.

각 행에 배치되는 홀수가 적힌 카드의 수의 조합은 (1, 1, 3)인 사건을 A라 하고, 대각선에 배치된 카드에 적힌 수의 합이 짝수인 사건을 B라 하자.

(i) 사건 A의 경우의 수

홀수가 적힌 카드를 3장 배치하는 행을 고르는 경우의 수는 3,

남은 두 행에서 홀수가 들어갈 열을 선택하는 경우의 수는 3×3

따라서 사건 A의 경우의 수는 27

(ii) 사건 $A \cap B$의 경우의 수

왼쪽 위에서 오른쪽 아래로 향하는 대각선에 배치된 카드에 적힌 수를 각각 $a,\ b,\ c$라 하자.

(ii-1) 홀수가 적힌 카드를 3장 배치하는 행이 1행일 때

a는 홀수이므로 'b가 홀수이고, c가 짝수' 이거나 'b가 짝수이고, c가 홀수'이어야 하므로 이 경우의 수는

$1 \times 2 + 2 \times 1$

(ii-2) 홀수가 적힌 카드를 3장 배치하는 행이 2행일 때

(ii-1)과 마찬가지이므로 이 경우의 수는 4

(ii-3) 홀수가 적힌 카드를 3장 배치하는 행이 3행일 때

(ii-1)과 마찬가지이므로 이 경우의 수는 4

따라서 구하는 확률

$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{3 \times 4}{27} = \frac{4}{9}$

29.

정답 130

$X \sim B(n,\ p) \approx N(np,\ np(1-p))$

$\mathrm{P}(X \leq 64) = 0.0228$에서

$\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{64-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \mathrm{P}(Z \leq -2)$

곧, $np - 2\sqrt{np(1-p)} = 64$ ...... ㉠

$\mathrm{P}(X \geq 88) = 0.1587$에서

$\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{88-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 1)$

곧, $np + \sqrt{np(1-p)} = 88$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $n = 400,\ p = \frac{1}{5}$

$Y \sim B(k,\ p) \approx N\left(\frac{k}{5},\ \frac{4k}{25}\right)$

$\mathrm{P}(Y \geq 216) = 0.0013$에서

$\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{216 - \frac{k}{5}}{\frac{2\sqrt{k}}{5}}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 3)$

곧, $216 - \frac{k}{5} = \frac{6\sqrt{k}}{5}$

$k = 900$

따라서 $\frac{n+k}{10} = 130$

30.

정답 100

$f(4) = k$라 하면 조건 (나)에서 $f(k) = 6$

$k \leq 3$이면 $k < 4$인데 $f(4) < f(k) = 6$가 되어 조건 (가)에 모순이다.

$k = 4$이면 $f(f(4)) = f(4) = 6$이 되어 $f(4) = k$에 모순이다.

$k \geq 7$이면 $f(4) \geq 7$인데 $6 = f(k) < f(4)$가 되어 조건 (나)에 모순이다.

가능한 $k = 5$ 또는 $k = 6$

(i) $f(4) = 5$인 경우

이 경우 $f(5) = 6$이고, 조건 (가), (다)에 의하여

$1 \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq 3$,

$6 \le f(6) \le f(7) \le f(8) \le 8,\ f(7) \ge 7$
이므로 구하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_3 \times \left({}_3\mathrm{H}_3 - 3\right) = 70$
(ii) $f(4) = 6$인 경우
이 경우 $f(6) = 6$이고, 조건 (가), (다)에 의하여
$1 \le f(1) \le f(2) \le f(3) \le 3,\ f(5) = 6,$
$7 \le f(7) \le f(8) \le 8$
이므로 구하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_3 \times {}_2\mathrm{H}_2 = 30$
(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 100

미적분

23.
정답 ③

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{\ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{6x}-1}{6x}}{\frac{\ln(1+2x)}{2x}} \times \frac{6}{2}$$
$= 3$

24.
정답 ②

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\, dx\,(\because \sin 2x = 2\sin x\cos x)$$
$= 2\int_0^1 t^2\, dt$ ($\sin x = t$로 치환)
$= \frac{2}{3}$

25.
정답 ④

$1 \le k \le n$이므로
$n^2+1 \le n^2+k \le n^2+n$
$$\frac{8k}{n^2+n} \le \frac{8k}{n^2+k} \le \frac{8k}{n^2+1}$$
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n^2+n} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n^2+k} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n^2+1}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^2+n}\times\frac{n(n+1)}{2} \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n^2+k} \le \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^2+1}\times\frac{n(n+1)}{2}$$
$$4 \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n^2+k} \le 4$$
따라서 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n^2+k} = 4$

26.
정답 ①

구하는 부피는
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (f(x))^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^x(\sin x + \cos x)dx$$
$= \left[e^x \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}\ (\because (e^x \sin x)' = e^x(\sin x + \cos x))$
$= \frac{e^{\frac{\pi}{6}}}{2}$

27.
정답 ⑤

점 $(f(t),\ g(t))$에서의 접선의 기울기는 $\frac{g'(t)}{f'(t)}$이므로 이 접선의 방정식은
$y = \frac{g'(t)}{f'(t)}(x - f(t)) + g(t)$
이 접선의 x절편은 $f(t) - \frac{2}{t^2}$이므로
$0 = \frac{g'(t)}{f'(t)}(x - f(t)) + g(t)$
에서
$f(t) - g(t) \times \frac{f'(t)}{g'(t)} = f(t) - \frac{2}{t^2}$
$\frac{g'(t)}{g(t)} = t\ (\because f'(t) = \frac{2}{t})$
따라서 $\ln g(t) = \frac{1}{2}t^2 + C$ (C는 적분상수)
$g(t) = Ae^{\frac{t^2}{2}}\ (A = e^C)$
$g(2) = e^2$에서 $A = 1$
$g'(t) = te^{\frac{t^2}{2}}$ 이므로
$t = 2$일 때, $\frac{dy}{dt} = \frac{g'(2)}{f'(2)} = 2e^2$

28.
정답 ②

$h'(x) = \left(e^{f(x)} - e^{-f(x)}\right)f'(x) = 0$
에서
$f(x) = 0$ 또는 $f'(x) = 0$
그런데 사차방정식 $f(x) = 0$의 실근의 개수는 4 이하이고,
삼차방정식 $f'(x) = 0$의 실근의 개수는 3 이하이므로
조건 (가)에 의하여 $x_1,\ x_3,\ x_5,\ x_7$은 방정식 $f(x) = 0$의 실근이고,
$x_2,\ x_4,\ x_6$은 방정식 $f'(x) = 0$의 실근이다.
따라서 $f(x_2) < 0,\ f(x_4) = f(0) > 0,\ f(x_6) < 0$이고 함수 $f(x)$의
그래프는 'W'자 형태를 갖는다. …… ㉠
또한, 함수 $h(x)$는 $x = x_1,\ x_3,\ x_5,\ x_7$일 때, 극솟값을 가지고
그 값은 모두 $g(f(x_1)) = g(0) = 0$이다.
함수 $h(x)$는 $x = x_2,\ x_4 = 0,\ x_6$에서 극댓값을 가지고
그 값은 각각
$g(f(x_2)),\ g(f(0)) = e + \frac{1}{e} - 2,\ g(f(x_6)) = e^2 + \frac{1}{e^2} - 2$이다.
조건 (나)의 $N(t) \ne 4$에 의하여
$e + \frac{1}{e} - 2 < e^2 + \frac{1}{e^2} - 2 = g(f(x_2))$
그런데
$e^x + \frac{1}{e^x} - 2 = e^2 + \frac{1}{e^2} - 2$
에서 $x = -2$ 또는 $x = 2$
㉠에 의하여 $f(x_2) = f(x_6) = -2$
따라서 $f(x) = a(x - x_2)^2(x - x_6)^2 - 2$이고
$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f'(1) = 0$
에서 $x_2 = -1,\ x_6 = 1$이고, $a = 3$
따라서 $f(3) = 3(3+1)^2(3-1)^2 - 2 = 190$

29.
정답 288

수열 $\{a_n\}$의 초항을 a, 공비를 r이라 하자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = -8$$

에서 $\dfrac{ar}{1-r^2} = -8$ …… ㉠

a, r의 부호에 따라 경우를 나누어 살펴보자. …… [참고]

(i) $r > 0$인 경우

$a > 0$이면

$b_{2k-1} = a(1-r)r^{2k-2}$, $b_{2k} = ar(1+r)r^{2k-2}$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) = \frac{-ar}{1+r} = 28$$

㉠과 연립하면 $r = -\dfrac{5}{2}$가 되어 모순이다.

$a < 0$이면 같은 방법으로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) = \frac{-a(2+3r-r^2)}{1-r^2} = 28$$

㉠과 연립하면 $2r^2 + r - 4 = 0$, 곧 $|r| > 1$이 되어 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$가 수렴하지 않아 모순이다.

(ii) $r < 0$인 경우

$a > 0$이면

$b_{2k-1} = a(1-r)r^{2k-2}$, $b_{2k} = -ar(1-r)r^{2k-2}$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) = \frac{a(r^2-3r)}{1-r^2} = 28$$

㉠과 연립하면 $r = -\dfrac{1}{2}$이고, $a = 12$

$a < 0$이면 같은 방법으로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) = \frac{-a(2-r)}{1-r} = 28$$

㉠과 연립하면 $2r^2 + 5r - 4 = 0$, 곧 $|r| > 1$이 되어 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$가 수렴하지 않아 모순이다.

(i), (ii)에 의하여

$a = 12$, $r = -\dfrac{1}{2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|b_n = 216\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 288$$

[참고]

$a = 0$이거나 $r = 0$인 경우들은 쉽게 문제의 조건에서 모순을 보일 수 있고, 모의고사의 정답 상황으로 출제될 가능성이 없으므로 해설에서는 따로 살펴보지 않겠음.

30.

정답 200

조건 (가)의

$$\int_0^x f(t)dt = xf(x) - \frac{1}{32}(f(x))^4 - \frac{a}{2}(f(x))^2$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - \frac{4}{32}(f(x))^3 f'(x) - af(x)f'(x)$$

$$f'(x)\left\{x - \frac{1}{8}(f(x))^3 - af(x)\right\} = 0$$

$f(x)$가 역함수를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 '$f'(x) = 0$'일 수 없고, 함수 $f(x)$는 연속이므로

$$x = \frac{1}{8}(f(x))^3 + af(x)$$

따라서 함수 $f(x)$의 역함수

$$g(x) = \frac{1}{8}x^3 + ax$$

$$g'(x) = \frac{3}{8}x^2 + a$$

함수 $g(x)$는 역함수를 가지므로 $g'(x) \geq 0$, 곧 $f(x)$와 $g(x)$는 증가함수이다.

조건 (나)에서 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x$가 $x \geq 0$에서 오직 두 점에서 만나므로 곡선 $y = g(x)$와 직선 $y = x$가 $x \geq 0$에서 오직 두 점에서 만난다.

$g(x) = x$

$$\frac{1}{8}x^3 + ax = x$$

따라서 $a < 1$이고, $x = 0$, $x = \pm 2\sqrt{2(1-a)}$

조건 (나)에 의하여

$$\int_0^{2\sqrt{2(1-a)}} |f(x) - x|dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{2\sqrt{2(1-a)}} (x - g(x))dx = \frac{1}{2}$$

$$64(1-a)^2 = 16$$

곧, $a = \dfrac{1}{2}$ ($\because a < 1$)

$$g(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x$$

따라서

$$\int_0^2 x(f(x))^2 f'(x)dx = \int_0^2 g(y)y^2 dy \,(y = f(x)\text{로 치환})$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{8}y^5 + \frac{1}{2}y^3\right)dy$$

$$= \frac{10}{3}$$

곧, $60\displaystyle\int_0^2 x(f(x))^2 f'(x)dx = 200$