제 2 교시

수학 영역

KSM

5 지 선 다 형

1. $4^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

2. 함수 $f(x)=2x^2+x+2$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 4x+1$

$f'(1) = 5$

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2, \quad 2a_2 + a_7 = 30$$

일 때, a_{10} 의 값은? [3점]

① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

$3(2+d) + 2+6d = 30$

$8d = 24, \quad d=3$

$a_{10} = a+9d = 29$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & (x < 2) \\ 3x & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$4a-2=6, \quad a=2$

5. 함수 $f(x)=(x+1)(2x^2-5x+1)$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$f'(x) = (2x^2-5x+1) + (x+1)(4x-5)$

$f'(2) = -1+9 = 8$

6. 두 양수 a, b가

$$\log_3 a^2 = 4, \quad \log_9 ab = \frac{5}{2}$$

를 만족시킬 때, $\frac{b}{a}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$\log_3 a = 2$, $\log_3 ab = 5$

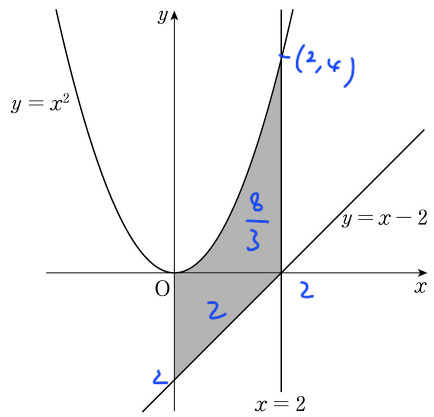
$\log_3 b = 3$

$\log_3 \frac{b}{a} = \log_3 b - \log_3 a = 1$

$\therefore \frac{b}{a} = 3$

7. 곡선 $y=x^2$과 y축 및 두 직선 $y=x-2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

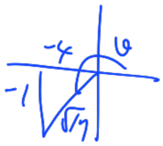
① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5



8. $\cos\theta = 4\sin\theta$ 이고 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) < 0$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{4\sqrt{17}}{17}$　② $-\frac{\sqrt{17}}{17}$　③ 0　④ $\frac{\sqrt{17}}{17}$　⑤ $\frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\tan\theta = \frac{1}{4}$, $\cos\theta < 0 \rightarrow$ 3사분면



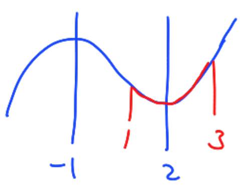
$\cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{17}} = \frac{-4\sqrt{17}}{17}$

9. 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 함수 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + a$ 가 최댓값 M, 최솟값 4를 가질 때, M 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [4점]

① 13　② 14　③ 15　④ 16　⑤ 17

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$= 6(x-2)(x+1)$

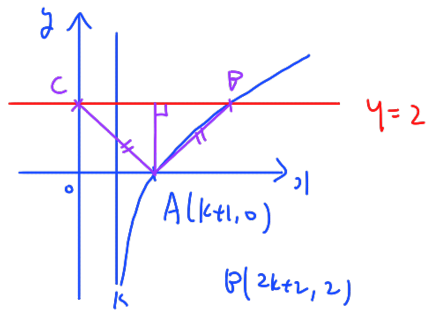


$m = f(2) = a - 20 = 4$, $a = 24$

$M = f(3) = a - 9 = 15$

10. 양수 k 에 대하여 곡선 $y = \log_2(x-k)$ 가 x 축과 만나는 점을 A 라 하자. 직선 $y=2$ 가 곡선 $y = \log_2(x-k)$ 와 만나는 점을 B, y 축과 만나는 점을 C 라 하자. $\overline{AB} = \overline{AC}$ 일 때, 삼각형 ABC 의 넓이는? [4점]

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12



B(2k+2, 2)

$\log_2(k+2) = 2$

$k+2 = 4$, $k = 2$

B(6, 2)

$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$

11. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t\,(t\geq 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-24t+36$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 25이다.
ㄴ. 출발한 후 점 P의 운동 방향은 두 번 바뀐다.
ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는 37이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$v(t)=3(t-2)(t-6)$

$x(t)=t^3-12t^2+36t$

ㄱ. $x(1)=25$

ㄴ. $t=2,\ t=6$

ㄷ. $x(0)=0$
$x(2)=32$
$x(3)=27$

$\therefore 32+5=37$

12. $a_1=3,\ a_2=10$인 수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 등비수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k+1}=n^2+n$$

을 만족시킨다. 다음은 $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하는 과정이다.

$n=1$일 때, $\dfrac{a_1}{b_1+1}=2$에서 $b_1=\dfrac{1}{2}$이다.

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{a_n}{b_n+1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k+1}$이므로

$2n$

$\dfrac{a_n}{b_n+1}=\boxed{(가)}\times n$ …… ㉠

2

이다.

$n=1$일 때도 ㉠이 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{a_n}{n}=\boxed{(가)}\times(b_n+1)$ …… ㉡

2

이다.

3

그러므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비는 $\boxed{(나)}$이다.

따라서 ㉡에 의하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\frac{a_n}{n}=\boxed{(다)}$이다.

131

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 $p,\ q,\ r$이라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 136 ② 137 ③ 138 ④ 139 ⑤ 140

$b_n=\dfrac{a_n}{2n}-1$

$b_1=\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2}$
$b_2=\dfrac{10}{4}-1=\dfrac{3}{2}$) $r=3 \Rightarrow b_n=\dfrac{1}{2}\times 3^{n-1}$

$\dfrac{a_n}{n}=3^{n-1}+2$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(3^{n-1}+2)=\frac{3^5-1}{3-1}+10=131$

$2+3+131=136$

13. 함수 $f(x)=x^3-4x^2+6x-8$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ -5)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$1+1+2=4$

$f'(x)=3x^2-8x+6$

$f'(2)=12-16+6=2$

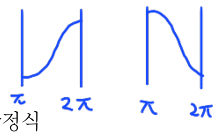
$y=2x-8$

$(0,-8),\ (4,0)$

$S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8=16$

14. 두 상수 $a\,(a\neq 0)$, b에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수

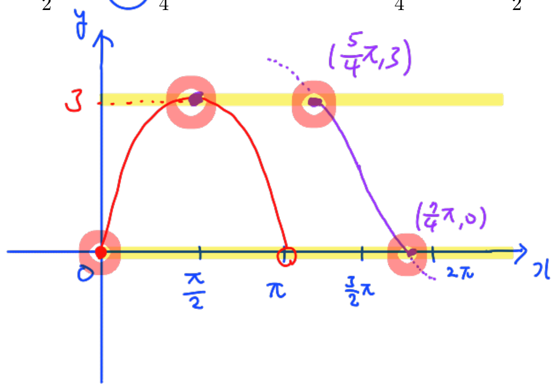
$$f(x)=\begin{cases} 3\sin x & (0\leq x<\pi) \\ a\cos x+b & (\pi\leq x\leq 2\pi) \end{cases}$$



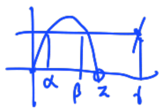
가 있다. $0\leq t\leq 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되도록 하는 서로 다른 모든 실수 t의 개수가 4일 때, a^2+b^2의 값은? [4점]

2+2

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ 7 ④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{15}{2}$



$0<f(t)<\pi$



$\alpha+\beta=\pi \to \gamma=\frac{3}{4}\pi$ (x)

$f(t)<0 \to t$가 1개 존재 (x)

$\therefore\ y=a\cos x+b$ $(\frac{5}{4}\pi, 3),\ (\frac{7}{4}\pi, 0)$ 지남

$-\frac{\sqrt{2}}{2}a+b=3$

$+)\ \frac{\sqrt{2}}{2}a+b=0$

$2b=3,\ b=\frac{3}{2},\ a=-\frac{3}{\sqrt{2}}$

$a^2+b^2=\frac{27}{4}$

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} -xf(x)-ax^2 & (x \le 0) \\ \frac{1}{4}f(x)-bx^2 & (x > 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

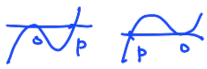
(가) 집합 $\{x \mid g(x)=-27\}$의 원소의 개수는 2이다.
(나) $\{x \mid g(x)=-27\} \subset \{x \mid g'(x)=0\}$

① $\frac{85}{4}$ ② $\frac{87}{4}$ ③ $\frac{89}{4}$ ④ $\frac{91}{4}$ ⑤ $\frac{93}{4}$

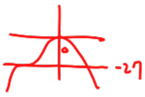
$g(0^-)=g(0) \rightarrow f(0)=0$

$g'(0^-)=g'(0^+) \rightarrow f'(0)=0$

$f(x)=x^2(x-p)$

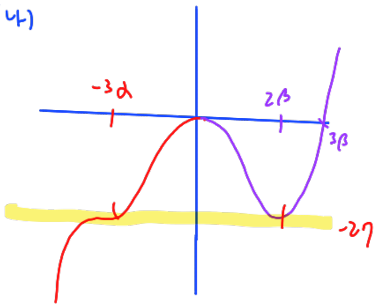


$-xf(x)-ax^2 = -x^2(x^2-px+a)$



$\frac{1}{4}f(x)-bx^2 = \frac{1}{4}x^2(x-p-4b)$

by (나)



$-(x+3\alpha)^3(x-\alpha)-27$

$(0,0) \rightarrow \alpha=1$

$-(x+3)^3(x-1)-27 = -x^4+px^3-ax^2$

$-3-3-3+1=p,\ p=-8$

$x=1 \rightarrow -27=-1+p-a,\ a=18$

$\frac{1}{4}x^2(x-3\beta)$

$(2\beta,-27) \rightarrow \beta=3$

$\frac{1}{4}x^2(x-9) = \frac{1}{4}x^2(x-p-4b)$

$9=p+4b=-8+4b \quad \therefore b=\frac{17}{4}$

$\Rightarrow a+b=\frac{89}{4}$

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_n^2-3n$$

을 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{30}$

$a_2=a_1^2-3=6$

$a_3=a_2^2-6=30$

17. 함수 $f(x)=4x^3-3x^2+2$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(1)=5$일 때, $F(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{15}$

$F(x)=x^4-x^3+2x+3$

$F(2)=16-8+4+3=15$

18. 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=8$이고 $\cos A=-\frac{1}{4}$일 때, $\overline{\mathrm{BC}}^2$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{124}$

$\overline{BC}^2 = 36+64-2\cdot6\cdot8\cdot(-\frac{1}{4})$

$= 100+24 = 124$

19. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+ax+b$는 $x=1$에서 극대이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 5일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

$\boxed{14}$

$f'(x) = 3x^2-12x+a$

$f'(1) = 3-12+a=0,\quad a=9$

$f'(x) = 3(x-1)(x-3)$

극솟값: $f(3) = 27-54+27+b=5$

$\therefore b=5$

$a+b=14$

20. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\begin{cases} n & (n\text{이 5의 배수가 아닌 경우}) \\ -4n+10 & (n\text{이 5의 배수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $20 \le \sum_{k=1}^{m} a_k < 30$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

$\boxed{67}$

1 2 3 4 $-10 \to 0$

5 6 7 8 $-30 \to 0$

11 12 13 14 $-50 \to 0$

16 17 18 19

$m = 8, 12, 21, 26 \to 67$

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x (f(t)-|f(t)|)\,dt$$

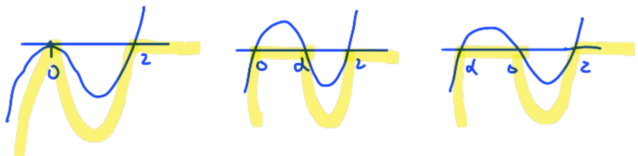
가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{48}$

(가) $x \ge k$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=0$을 만족시키는 실수 k의 최솟값이 2이다.
(나) $g(2)=-8$

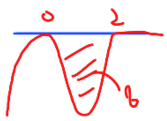
$f(2)=0$, $x\ge 2 \to f(x)\ge 0$

$g'(x)=f(x)-|f(x)| = \begin{cases} 0 & (f(x)\ge 0) \\ 2f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$

k최소$=0$ (x)



$f(x)$, $g'(x)$

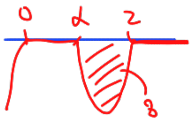


$g'(x)$

$2f(x)=2x^3 \sim$

$g(2)=\frac{1}{6}(2)^4=\frac{8}{3}\neq 8$

(x)



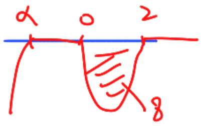
$2f(x)=2x^3 \sim$

$g(2)=\frac{1}{6}(2-\alpha)^3\left(\frac{2+\alpha}{2}\right)=8$

$(2-\alpha)^3(2+\alpha)=96$

$-1 \to 27 < 96$

(x)



$2f(x)=2x^3 \sim$

$g(2)=\frac{1}{6}(2)^4(1-\alpha)=8$

$1-\alpha=3,\ \alpha=-2$

$f(x)=x(x-2)(x+2)$

$f(4)=4\cdot 2\cdot 6=48$

22. 자연수 k에 대하여 두 함수

$$f(x)=2^x,\quad g(x)=2\times 4^x+\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

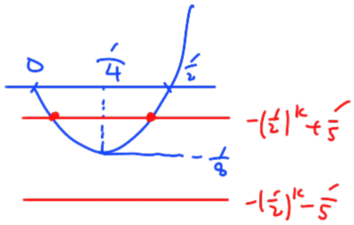
이 있다. 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B 사이의 거리가 $\frac{1}{5}$이 되도록 하는 실수 t의 개수가 2이고 이 두 실수의 합을 p라 할 때, $k\times\left(\frac{1}{2}\right)^p$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{80}$

$\left|2\times 4^t+\left(\frac{1}{2}\right)^k-2^t\right|=\frac{1}{5}$

$2^t=A\ (A>0)$, $2A^2-A+\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{5},\ -\frac{1}{5}$

$A(2A-1)=-\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{1}{5},\ -\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{1}{5}<-\frac{1}{8}$



$-\frac{1}{8}<-\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{1}{5}<0$

$\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{2}\right)^k<\frac{13}{40}$

$\therefore k=2$

$2\cdot 4^t-2^t+\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{1}{5}=0,\ k=2$

$2\cdot 4^t-2^t+\frac{1}{20}=0$ 근: α,β

$2A^2-A+\frac{1}{20}=0$ 근: $2^\alpha, 2^\beta \to 2^\alpha\times 2^\beta=2^{\alpha+\beta}=\frac{1}{40}=2^p$

$\therefore k\times\left(\frac{1}{2}\right)^p=2\times 40=80$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. ${}_3\mathrm{H}_5$의 값은? [2점]

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

$_7C_2 = 21$

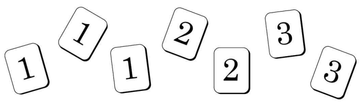
24. 서로 다른 종류의 연필 4자루가 있다. 이 4자루의 연필을 세 명의 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 연필을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 72 ② 75 ③ 78 ④ 81 ⑤ 84

$3^4 = 81$

25. 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 4가 되도록 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 70 ② 75 ③ 80 ④ 85 ⑤ 90



1 ——— 3 $\frac{5!}{2!2!} = 30$

3 ——— 1 〃 $= 30$

2 ——— 2 $\frac{5!}{3!2!} = 10$

70

26. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [3점]

$a+b+c+\lvert d-1\rvert=4$

① 35 ② 40 ③ 45 ④ 50 ⑤ 55

$d=0$ $\ _3H_3 = 10$

$d\geq 1$ $\ _4H_4 = {}_7C_3 = 35$

45

27. 전체집합 $U=\{-4,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 4\}$의 두 부분집합 $A,\ B$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 $A,\ B$의 모든 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는? [3점]

(가) $n(A\cap B)\geq 2$
(나) 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은 0이다.

① 259 ② 262 ③ 265 ④ 268 ⑤ 271

-1 1
-2 2
-4 4

$n(A\cap B)=2$ $3\times 3^4=243$
$n(A\cap B)=4$ $3\times 3^2=27$
$n(A\cap B)=6$ 1
271

28. 두 집합 $X=\{x\,|\,x$는 9 이하의 자연수$\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\rightarrow Y$의 개수는? [4점]

(가) 집합 $\{x\,|\,f(x)=1,\ x\in X\}$의 원소의 개수는 3이고,
집합 $\{x\,|\,f(x)=2,\ x\in X\}$의 원소의 개수는 2이고,
집합 $\{x\,|\,f(x)=4,\ x\in X\}$의 원소의 개수는 4이다.
(나) 7 이하의 모든 자연수 x에 대하여
$f(x)+f(x+1)\neq f(x+2)$이다.

① 920 ② 925 ③ 930 ④ 935 ⑤ 940

1
2
3
4
5
6
7
8
9

1 (3)
2 (2)
4 (4)

1 1 2 (×)
2 2 4 (×)

$${}_9C_3\times{}_6C_2-7\times{}_6C_1\times{}_5C_1-7\times{}_6C_3+5\times{}_4C_1$$
$$=84\times 15-210-140+20=930$$

1 → 1
2 → 2
3 → 4

1 → 1
2 → 2
3 → 4

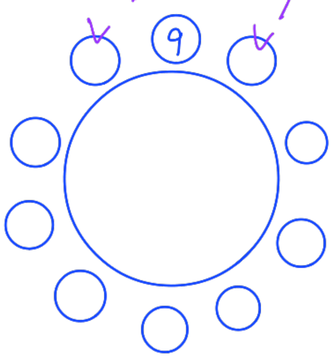
1 → 1
2
3 → 2
4
5 → 4

단답형

29. 숫자 1, 3, 5, 7, 9가 각각 하나씩 적혀 있는 5개의 흰색 접시와 숫자 2, 4, 6, 8, 10이 각각 하나씩 적혀 있는 5개의 검은색 접시가 있다. 이 10개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점] $\boxed{864}$

(가) 흰색 접시끼리는 서로 이웃하지 않는다.
(나) 서로 이웃한 2개의 접시에 적혀 있는 수의 곱은 70 이하이다.

9&8, 9&10 (×)



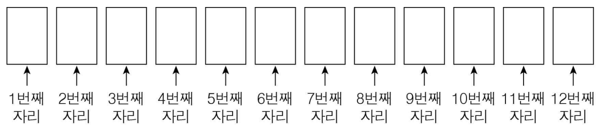
8,10 (×) → 2,4,6
$_3P_2$

∴ $_3P_2 \times 3! \times 4! = 864$
2,4,6 　 8,10,□ 　 1,3,5,7

30. 정수 -1이 적혀 있는 6장의 카드와 정수 1이 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 12장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 12개의 자리에 각각 한 장씩 놓을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 수가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점] $\boxed{100}$

11 이하의 모든 자연수 n에 대하여 n번째 자리에 놓인 카드에 적혀 있는 수와 $(n+1)$번째 자리에 놓인 카드에 적혀 있는 수의 곱을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{11} a_n = 3$이다.

1 → 7번
-1 → 4번 ⇒ 부호변화 4번



1 　 -1 　 1 　 -1 　 1
a 　 x 　 b 　 y 　 c

a,b,c → 1 3개 추가
x,y → -1 4개 추가

$_3H_3 \times {}_2H_4 = 10 \times 5 = 50$

-1 　 1 　 -1 　 1 　 -1 ⇒ 50

100

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(12n+1)}{4n^3-1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(3n+2)a_n=6,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=2$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n b_n$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n}a_n b_n=12$

$\lim_{n\to\infty}a_n b_n=4$

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sqrt{n+2}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,a_n$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$S_n = \sqrt{n+2}$

$a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$ $(n \geq 2)$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

$= \frac{1}{2}$

26. 자연수 a에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5a^{2n}+(2a)^{n+1}}{a^{2n}+(2a)^n} = a+1$$

을 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

i) $a^2 > 2a \rightarrow a > 2$

$5 = a+1$, $a = 4$ (ok)

ii) $a^2 = 2a \rightarrow a = 2$

$\frac{5+2a}{1+1} = \frac{9}{2} \neq a+1 = 3$ (x)

iii) $a^2 < 2a \rightarrow a < 2$

$2a = a+1$, $a = 1$ (ok)

$\therefore 4+1 = 5$

27. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> 좌표평면에서 원점을 지나고 기울기가 a_n인 직선이
> 점 $(2n-1, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 n인
> 원과 서로 다른 두 점에서 만나고
> 점 $(2n+1, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $n+1$인
> 원과 만나지 않는다.

$\lim_{n\to\infty} n\left(3-\frac{1}{a_n{}^2}\right)$의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

$y=a_nx$, $a_nx-y=0$

$(2n-1, 0) \rightarrow \frac{|(2n-1)a_n|}{\sqrt{a_n^2+1}} < n \rightarrow (2n-1)^2a_n^2 < n^2(a_n^2+1)$

$a_n^2 < \frac{n^2}{3n^2-4n+1}$

$(2n+1, 0) \rightarrow \frac{|(2n+1)a_n|}{\sqrt{a_n^2+1}} > n+1 \rightarrow (2n+1)^2a_n^2 > (n+1)^2(a_n^2+1)$

$a_n^2 > \frac{n^2+2n+1}{3n^2+2n}$

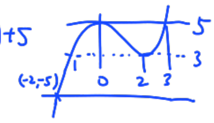
$\therefore \frac{3n^2-4n+1}{n^2} < \frac{1}{a_n^2} < \frac{3n^2+2n}{n^2+2n+1}$

$3+\frac{1-4n}{n^2} < \frac{1}{a_n^2} < 3+\frac{-4n-3}{n^2+2n+1}$

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n+3}{n^2+2n+1}\right) < \lim_{n\to\infty} n\left(3-\frac{1}{a_n^2}\right) < \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4n-1}{n^2}\right)$

$\downarrow$ 4 $\qquad \downarrow$ 4

28. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+5$가 있다. $\frac{1}{2}x^2(x-3)+5$



두 자연수 p, q에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}px^2+\frac{1}{2}qx+5 & (x<0) \\ 5 & (x\ge 0)\end{cases}$$

이라 하자.

실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(f(x))^{2n+1}+5^{2n}\times g(x)}{(f(x))^{2n}+5^{2n}}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수가 7이다.

$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2, x>3) \\ g(x) & (-2<x<3) \\ \frac{-5+g(-2)}{2} & (x=-2) \\ \frac{5+g(3)}{2} & (x=3)\end{cases}$

$x=-2$ 연속 $g(-2)=-5$

$x=3$ 연속 $g(3)=5$

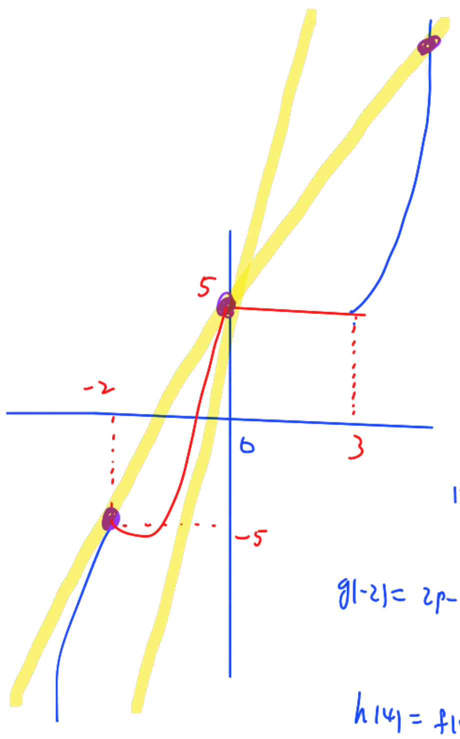
> 자연수 n에 대하여 직선 $y=\left(k-\frac{1}{2^n}\right)x+5$가
> 함수 $y=h(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 a_n이라
> 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n=4$이다.

$p+q+h(4)$의 값은? [4점]

① 38 ② 41 ③ 44 ④ 47 ⑤ 50

$g'(x)=px+\frac{1}{2}q$, $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2, x>3) \\ g(x) & (-2<x<3) \\ -5 & (x=-2) \\ 5 & (x=3)\end{cases}$

$g'(0)=\frac{1}{2}q$



$(-2,-5)$, $(0,5)$ 기울기 5

$h'(0)=\frac{1}{2}q$

k 7개

6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 $\quad$ 13 (×)

$12\le\frac{1}{2}q<13$ $\quad\therefore q=24$

$g(-2)=2p-q+5=-5$

$\therefore p=7$

$h(4)=f(4)=13$

$\therefore p+q+h(4)=7+24+13=44$

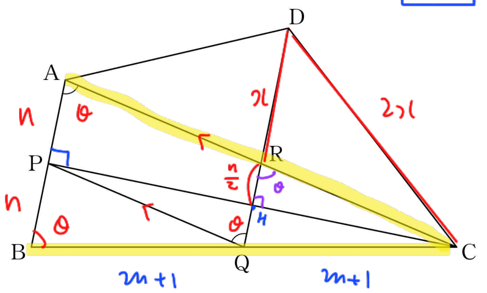
단답형

29. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 $\overline{AC}=\overline{BC}=4n+2$인 사각형 ABCD가 있다. 선분 AB의 중점을 P, 선분 BC의 중점을 Q라 하고, 선분 DQ가 선분 AC와 만나는 점을 R이라 하자.

$\angle CAB=\angle PQR$, $\overline{CP}=\sqrt{15n^2+16n+4}$, $\overline{DR}:\overline{DC}=1:2$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\overline{DR}-\frac{4}{3}n\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

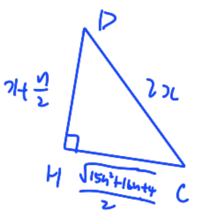
$\boxed{11}$



$\overline{BP}=\overline{AP}=\sqrt{(4n+2)^2-(15n^2+16n+4)}=n$

$\triangle BPQ \backsim \triangle BAC \Rightarrow \overline{PQ}\,/\!/\,\overline{AC}$, $\angle PQR=\angle CRQ=\theta=\angle PAC$

$\therefore \overline{AB}\,/\!/\,\overline{RQ} \to \overline{AR}=\overline{RC}=2n+1$, $\angle CRQ=90°$



$4x^2=x^2+nx+\frac{n^2}{4}+\frac{15n^2+16n+4}{4}$

$3x^2-nx-4n^2-4n-1=0$

$x=\frac{n+\sqrt{49n^2+48n+12}}{6}$, $x-\frac{4}{3}n=\frac{\sqrt{49n^2+48n+12}-7n}{6}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(x-\frac{4}{3}n\right)=\frac{48n+12}{6\left(\sqrt{49n^2+48n+12}+7n\right)}=\frac{48}{6(7+7)}=\frac{4}{7}$

30. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. (단, k는 20 이하의 자연수이다.) [4점]

$\boxed{57}$

> 두 정수 a, b에 대하여
>
> $\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n$의 값과 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n$의 값이 모두 존재하며
>
> $\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n$이 되도록 하는 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 19이다.

i) $a=0 \to \lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n=0$

$\therefore \left|\frac{2b-20}{k}\right|<1 \to \frac{20-k}{2}<b<\frac{k+20}{2}$

$10-\frac{k}{2}<b<10+\frac{k}{2}$

k: 짝수 $\to b: k-1$개

k: 홀수 $\to b: k$개

① $k-1=19 \to k=20$

② $k=19$

ii) $a\neq0 \to -1<a+b\le1$

$a+b=0 \to \left|\frac{20}{k}\right|<1$ (X) ($\because k$는 20이하 자연수)

$a+b=1 \to |a|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{18}{k}\right|^n$

$a\neq0 \Rightarrow k=18 \Rightarrow a=\pm1 \to \begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$ $\begin{cases}a=-1\\b=2\end{cases}$

③ $k=18 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}a=0 & 17개\\ a\neq0 & 2개\end{array}\right]$ 19개

$\Rightarrow 18+19+20=57$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 포물선 $y^2 = 20x$의 준선이 $x = k$일 때, 상수 k의 값은? [2점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

24. 타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{25} = 1$의 단축의 길이가 6일 때, 이 타원의 두 초점 사이의 거리는? (단, a는 양수이다.) [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$a=3$, $c^2=25-9=16$, $c=4$

$2c=8$

25. 쌍곡선 $\frac{x^2}{5a^2}-\frac{y^2}{a^2+1}=1$의 한 점근선의 방정식이 $y=-\frac{1}{2}x$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, a는 양수이다.) [3점]

① $2\sqrt{5}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $6\sqrt{5}$ ④ $8\sqrt{5}$ ⑤ $10\sqrt{5}$

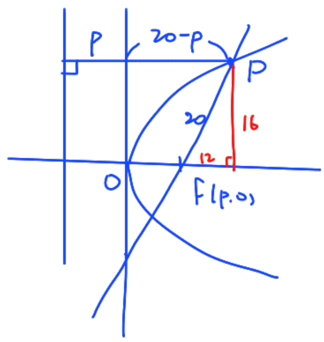
$\sqrt{\frac{a^2+1}{5a^2}}=\frac{1}{2}$, $\frac{a^2+1}{5a^2}=\frac{1}{4}$

$5a^2=4a^2+4$, $a=2$

$\therefore 2\sqrt{5a^2}=4\sqrt{5}$

26. 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$의 초점을 지나고 기울기가 $\frac{4}{3}$인 직선이 이 포물선과 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. 점 P와 이 포물선의 준선 사이의 거리가 20일 때, p의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



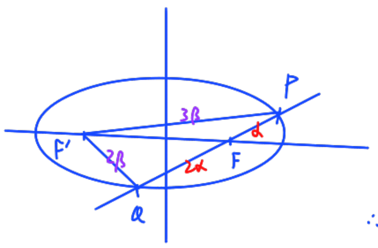
$y^2=4px$

$\overline{OF}=p=(20-p)-12$

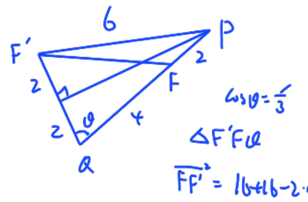
$p=4$

27. 두 점 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 8인 타원이 있다. 점 F를 지나고 기울기가 양수인 직선이 이 타원과 만나는 점 중 y좌표가 양수인 점을 P, y좌표가 음수인 점을 Q라 하자.
$\overline{\mathrm{FP}}:\overline{\mathrm{FQ}}=1:2$, $\overline{\mathrm{F'P}}:\overline{\mathrm{F'Q}}=3:2$일 때, c의 값은? [3점]

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

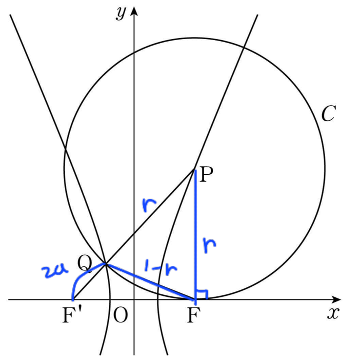


$\alpha+3\beta=8$
$2\alpha+2\beta=8$
$\alpha+\beta=4$
$\therefore \alpha=\beta=2$



$\cos\theta=\frac{1}{3}$
$\triangle F'FQ$
$\overline{FF'}^2=16+16-2\cdot4\cdot4\cdot\frac{1}{3}=\frac{64}{3}$
$\therefore \overline{FF'}=\frac{8}{3}\sqrt{3}=2c$
$c=\frac{4}{3}\sqrt{3}$

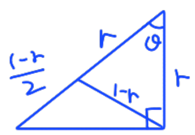
28. 그림과 같이 두 점 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 F$'$P가 이 쌍곡선과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하고, 점 P를 중심으로 하고 점 Q를 지나는 원을 C라 하자. 원 C가 x축과 점 F에서 접하고 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{FQ}}=1$일 때, 원 C의 반지름의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{2}}{12}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{7}$

$\overline{F'P}-\overline{PF}=2a$
$\therefore \overline{F'Q}=2a$

$\overline{FQ}-\overline{F'Q}=2a$
$1-r=4a$, $\overline{F'Q}=\frac{1-r}{2}$



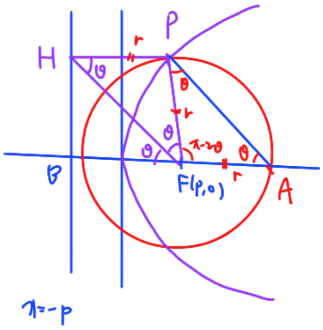
$\cos\theta=\frac{r^2+r^2-(1-r)^2}{2\cdot r\cdot r}=\frac{r}{\frac{1+r}{2}}=\frac{2r}{1+r}$

$4r^3=(1+r)(r^2+2r-1)=r^3+3r^2+r-1$
$3r^3-3r^2-r+1=0$
$3r^2(r-1)-(r-1)=0$
$(r-1)(3r^2-1)=0$ $\therefore r=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(\because \overline{QF}>0 \to r>1)$

단답형

29. 초점이 F$(p,\ 0)$ $(p>0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선과 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r $(r>p)$인 원 C가 있다. 원 C가 x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하고, 원 C가 이 포물선과 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하자. 점 P에서 이 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\cos(\angle\mathrm{PHF})=\frac{\sqrt{3}}{3}$이고 사각형 APHF의 넓이가 $54\sqrt{2}$일 때, $p+r$의 값을 구하시오. [4점]

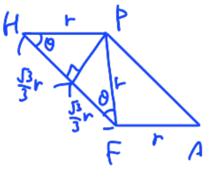
$\boxed{12}$



□APHF : 평행사변형

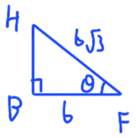
$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \overline{FH}=\frac{2}{3}\sqrt{3}r$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$



$\square APHF = r\times\frac{2\sqrt{3}}{3}r\times\sin\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}r^2=54\sqrt{3}$

$\therefore r=9$

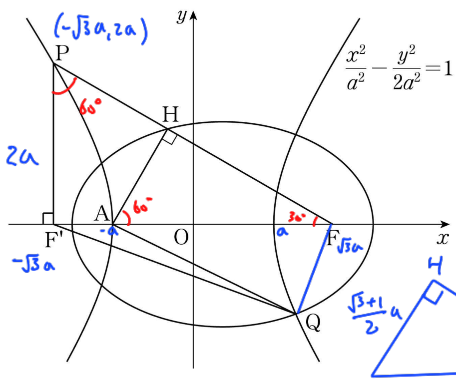


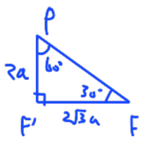
$\overline{BF}=6=2p \quad \therefore p=3$

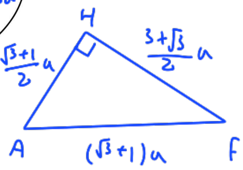
$p+r=12$

30. 그림과 같이 두 점 F$(c,\ 0)$, F$'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2a^2}=1$이 있다. 이 쌍곡선의 꼭짓점 중 x좌표가 음수인 점을 A라 하고, 점 F$'$을 지나고 x축에 수직인 직선이 이 쌍곡선과 만나는 점 중 제2사분면에 있는 점을 P라 하자. 점 A에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 H라 하자. 두 점 A, F를 초점으로 하고 점 H를 지나는 타원이 이 쌍곡선과 만나는 점 중 제4사분면에 있는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{F'Q}}=6+8\sqrt{3}$일 때, 이 타원의 장축의 길이는 $p+q\sqrt{3}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오.
(단, a는 양수이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]

$\boxed{52}$







$c=\sqrt{3}a,\quad \overline{QF'}-\overline{QF}=2a$

$+\ \overline{QA}+\overline{QF}=(2+\sqrt{3})a$

$\overline{QF'}+\overline{QA}=(4+\sqrt{3})a=6+8\sqrt{3},\quad a=\frac{6+8\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}(4+\sqrt{3})}{4+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

$\therefore (2+\sqrt{3})a=6+4\sqrt{3} \quad \therefore p=6,\ q=4$

$p^2+q^2=52$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.