제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $4^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

$2^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{1}$

2. 함수 $f(x) = 2x^2 + x + 2$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 4x + 1$

$f'(1) = 5$

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2, \quad 2a_2 + a_7 = 30$$

일 때, a_{10}의 값은? [3점]

① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

$a = 2.$ / $2(a+d) + a + 6d = 30$

$3a + 8d = 30$

$8d = 24$

$d = 3$

$\Rightarrow a_{10} = a + 9d = 2 + 27 = 29.$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & (x < 2) \\ 3x & (x \geq 2) \end{cases}$$

$\rightarrow f(2-0) = 4a - 2$

$\rightarrow f(2) = f(2+0) = 6$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\rightarrow 4a - 2 = 6$

$4a = 8 \quad a = 2$

5. 함수 $f(x)=(x+1)(2x^2-5x+1)$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$f'(x) = 1 \times (2x^2-5x+1) + (x+1)(4x-5)$

$x=2$ $f'(2) = -1+9 = 8$

6. 두 양수 a, b가

$$\log_3 a^2 = 4, \quad \log_9 ab = \frac{5}{2}$$

를 만족시킬 때, $\frac{b}{a}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$2\log_3 a = 4$

$\log_3 a = 2$

v $a=9$

v $\log_9 a + \log_9 b = \frac{5}{2}$

$1 + \log_9 b = \frac{5}{2}$

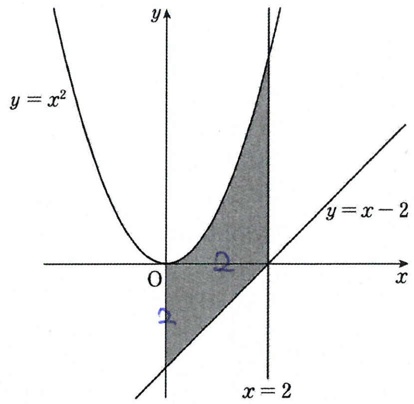
$\log_9 b = \frac{3}{2}$ $b = 9^{\frac{3}{2}}$

$= (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3$

$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{27}{9} = 3$

7. 곡선 $y=x^2$과 y축 및 두 직선 $y=x-2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5



$\int_0^2 x^2 dx + 2 \times 2 \times \frac{1}{2}$

$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 + 2 = \frac{8}{3} + 2$

8. $\cos\theta = 4\sin\theta$ 이고 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)<0$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{4\sqrt{17}}{17}$ ② $-\frac{\sqrt{17}}{17}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{17}}{17}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\cos\theta < 0$ 음수

÷ cosθ

$1 = 4\tan\theta$

$\tan\theta = \frac{1}{4}$ 양수

θ는 3사분면

⇒ 

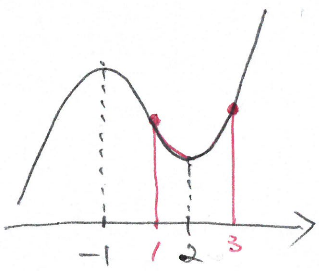
$\cos\theta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

9. 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 함수 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$ 가 최댓값 M, 최솟값 4를 가질 때, M의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

$f'(x) = 6x^2-6x-12$

$= 6(x+1)(x-2)=0 \rightarrow x=-1, 2.$



$f(2)=4$

$-20+a=4$

$a=24$

⇒ $f(1) = -13+a$

$f(3) = -11+a = M = 15$

10. 양수 k에 대하여 곡선 $y=\log_2(x-k)$가 x축과 만나는 점을 A라 하자. 직선 $y=2$가 곡선 $y=\log_2(x-k)$와 만나는 점을 B, y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=\overline{AC}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

x절편 $0=\log_2(x-k)$

$2^0 = x-k$

$x=k+1$ A(k+1, 0)

y=2 $2=\log_2(x-k)$

$2^2 = x-k$

$x=k+4$ B(k+4, 2)

⇒ C(0, 2)

$\overline{AB} = \overline{AC}$

$\sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{(k+1)^2+(-2)^2}$

$13 = (k+1)^2+4$

$(k+1)^2=9$

$k+1=\pm 3$ $\therefore k=2, \cancel{-4}$ (양수k)

A(3,0) B(6,2) C(0,2)

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix}3 & 6 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 2 & 0\end{matrix}\right|$

$= \frac{1}{2}|6+12-6| = 6$

11. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t(t\ge 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-24t+36$$ → $x(t)=t^3-12t^2+36t$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 25이다.
ㄴ. 출발한 후 점 P의 운동 방향은 두 번 바뀐다.
ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는 37이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $x(1)=1-12+36=25$

ㄴ. $v(t)=3(t-2)(t-6)=0$

$\therefore t=2,\ 6$

ㄷ. $\int_0^3 |v(t)|\,dt$

$=\int_0^2 (3t^2-24t+36)\,dt + \int_2^3 -(3t^2-24t+36)\,dt$

$=37$

12. $a_1=3$, $a_2=10$인 수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 등비수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k+1}=n^2+n$$ ★ 수열합이 상수항 X 이차식 "등차수열"

을 만족시킨다. 다음은 $\sum_{n=1}^{5}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하는 과정이다.

$n=1$일 때, $\frac{a_1}{b_1+1}=2$에서 $b_1=\frac{1}{2}$이다.
2 이상의 모든 자연수 n에 대하여
$\frac{a_n}{b_n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k+1}$이므로
$\frac{a_n}{b_n+1}=\boxed{(가)}\times n$ …… ㉠ 2
이다.
$n=1$일 때도 ㉠이 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여
$\frac{a_n}{n}=\boxed{(가)}\times(b_n+1)$ …… ㉡ 2
이다.
그러므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비는 $\boxed{(나)}$이다. 3
따라서 ㉡에 의하여 $\sum_{n=1}^{5}\frac{a_n}{n}=\boxed{(다)}$이다. 131

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 136 ② 137 ③ 138 ④ 139 ⑤ 140

★ $d=2$ → $\frac{a_n}{b_n+1}=2n$

(나) $n=2$, $\frac{a_2}{2}=2(b_2+1)$

$5=2(b_2+1)$

$b_2=\frac{3}{2}$ → $r=3$

(다) $\sum_{n=1}^{5}2(b_n+1)=2\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{2}\times 3^{n-1}+\sum_{n=1}^{5}2$

$=2\times\frac{\frac{1}{2}(3^5-1)}{3-1}+2\times 5$

$=131$

13. 함수 $f(x)=x^3-4x^2+6x-8$에 대하여
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ -5)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 6$, 접점$(1, -5)$

접선 $y+5 = f'(1)(x-1)$

$y = x-6$

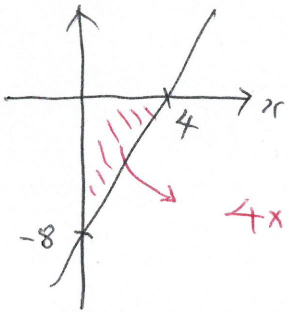
교점 $x^3-4x^2+6x-8 = x-6$

$x^3-4x^2+5x-2=0$.

$(x-1)^2(x-2)=0$. $x=1, 2$

⇒ 접점 $(2, -4)$. $f'(2)=2$

$y+4 = 2(x-2)$ $y=2x-8$



$4 \times 8 \times \frac{1}{2} = 16$

$y = a\cos x + b$

$(\frac{5}{4}\pi, 3) \rightarrow 3 = a\cos\frac{5}{4}\pi + b$

$(\frac{7}{4}\pi, 0) \rightarrow 0 = a\cos\frac{7}{4}\pi + b$

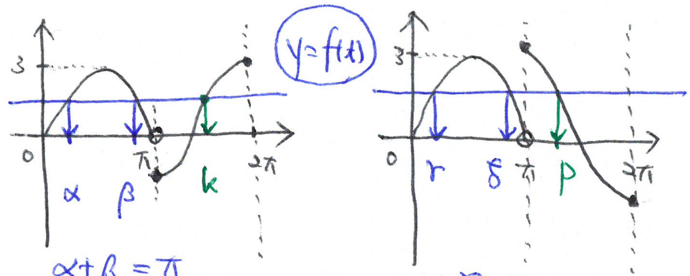
연립하면 $\boxed{a = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \ . \ b = \frac{3}{2}}$

14. 두 상수 $a\,(a \neq 0)$, b에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3\sin x & (0 \le x < \pi) \\ a\cos x + b & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$$

가 있다. $0 \le t \le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되도록 하는 서로 다른 모든 실수 t의 개수가 4일 때, a^2+b^2의 값은? [4점]

① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ 7 ④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

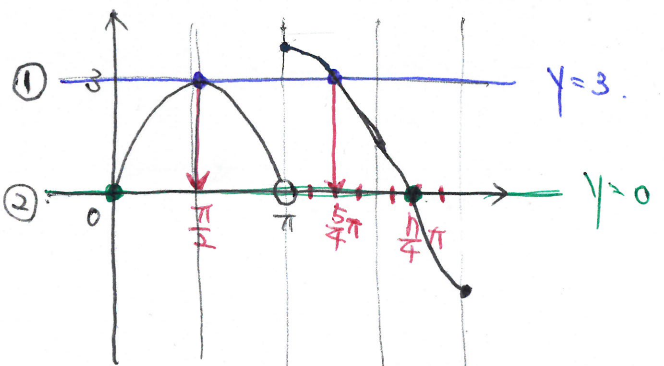


$\alpha+\beta=\pi$. $r+\delta=\pi$.

k 값이 π보다 크다. 역시. p 값도 π보다 크다.

⇒ 따라서 x 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$보다 커진다

$0 < f(t) < 3$ 사이의 값은 X



① $f(x) = f(t) = 3 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{4}\pi$

② $f(x) = f(t) = 0 \rightarrow t = 0. \frac{7}{4}\pi$

$$\begin{cases} f'(+0) = \frac{1}{4}f'(0) \\ f'(-0) = -f(0) \end{cases}$$

$$g'(x) \begin{cases} -f(x) - xf'(x) - 2ax \ (x<0) \\ \frac{1}{4}f'(x) - 2bx \ (x>0) \end{cases}$$

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} -xf(x) - ax^2 & (x \le 0) \\ \frac{1}{4}f(x) - bx^2 & (x > 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

$f(0) = f(-0) = 0$

$f(+0) = \frac{1}{4}f(0)$

> (가) 집합 $\{x \mid g(x) = -27\}$의 원소의 개수는 2이다.
> (나) $\{x \mid g(x) = -27\} \subset \{x \mid g'(x) = 0\}$

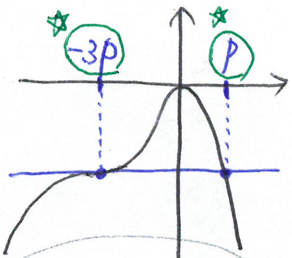
① $\frac{85}{4}$ ② $\frac{87}{4}$ ③ $\frac{89}{4}$ ④ $\frac{91}{4}$ ⑤ $\frac{93}{4}$

$f(0) = f'(0) = 0 \rightarrow f(x) = x^2(x+k)$

(나) $y = -27$ 과의 교점에서

미분계수 (접선 기울기) 가 0 이다.

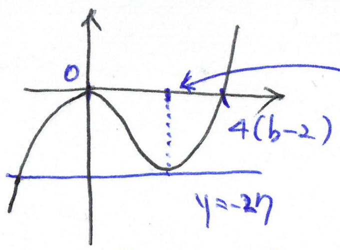
⇒



$-x^4 - kx^3 - ax^2 - (-27) = -(x+3p)^3(x-p)$

전개 후 계수 비교 하면, $p=1$, $k=8$, $a=18$

⇒



$g\left(\frac{8}{3}(b-2)\right) = -\frac{64}{27}(b-2)^3 = -27$

$\frac{4}{3}(b-2) = 3$ $\therefore b = \frac{17}{4}$

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = a_n^2 - 3n$$

을 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

$n=1 \rightarrow a_2 = a_1^2 - 3 = 9 - 3 = 6$

$n=2 \rightarrow a_3 = a_2^2 - 6 = 36 - 6 = 30$

$F(x) = x^4 - x^3 + 2x + C$

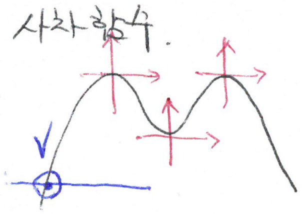
$x=1$ $F(1) = 1 - 1 + 2 + C = 5$ $\therefore C = 3$

$\rightarrow F(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$ $F(2) = 15$

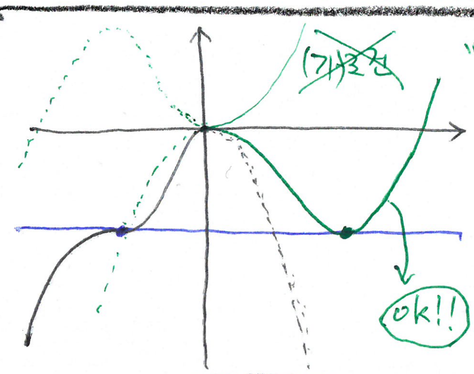
17. 함수 $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(1) = 5$일 때, $F(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$$g(x) \begin{cases} -x^4 - kx^3 - ax^2 \quad (x \le 0) \\ = -x^2(x^2 + kx + a) \\ \frac{1}{4}x^3 + \left(\frac{k}{4} - b\right)x^2 \quad (x>0) \\ = \frac{1}{4}x^2(x + k - 4b) \end{cases}$$

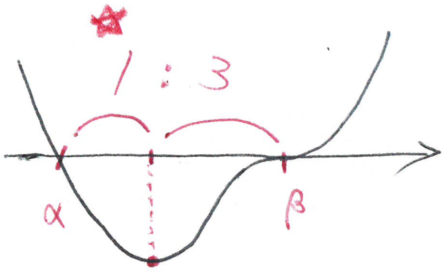
"y축 왼쪽" 사차함수.



어느 극점이 (0,0)이 되어도 (나)조건을 만족 시키지 못한다.



"y축 오른쪽" 삼차함수



★ 1:3으로 내분점.

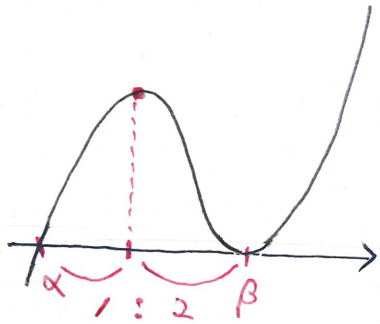
$$\frac{1\times\beta+3\times\alpha}{1+3}$$

$$y=k(x-\alpha)(x-\beta)^3$$

$$y'=k(x-\beta)^3+3k(x-\alpha)(x-\beta)^2$$

$$=k(x-\beta)^2(x-\beta+3x-3\alpha)=0$$

$$x=\beta,\ \frac{3\alpha+\beta}{4}$$



★ 1:2로 내분점.

$$\frac{1\times\beta+2\times\alpha}{1+2}$$

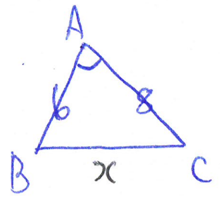
$$y=k(x-\alpha)(x-\beta)^2$$

$$y=k(x-\beta)^2+2k(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$=k(x-\beta)(x-\beta+2x-2\alpha)=0$$

$$x=\beta,\ \frac{2\alpha+\beta}{3}$$

18. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$이고 $\cos A=-\frac{1}{4}$일 때, $\overline{BC}^2$의 값을 구하시오. [3점]



$-\frac{1}{4}$

$\rightarrow x^2 = 36+64-2\times 6\times 8\times \cos A$

$= 100+24 = 124$

19. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+ax+b$는 $x=1$에서 극대이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 5일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

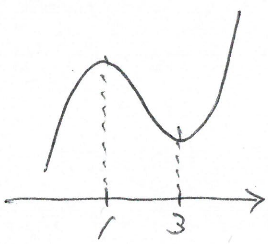
14

$\checkmark\ f'(x) = 3x^2-12x+a$

$f'(1)=0 \rightarrow x=1.\quad 0=3-12+a$

$a=9$

$\Rightarrow f'(x) = 3(x-1)(x-3)$



$f(3)=5$

$b=5$

$x=3,\quad 5 = 27-54+3a+b$

20. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\begin{cases} n & (n\text{이 5의 배수가 아닌 경우}) \\ -4n+10 & (n\text{이 5의 배수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $20 \le \sum_{k=1}^{m} a_k < 30$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
→	1	2	3	4	−10
	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
→	6	7	8 ①	9	−30
→	11	12 ②	13	14	−50
→	16	17	18	19	−70
→	21 ③	22	23	24	−90
→	26 ④	27	28	29	−110
→	31	32	33	34	−130

☆ $S_5 = 0$

$S_{10} = 0$

$S_{15}=0$

$S_{20}=0$

⋮

더 이상 없다!!

① $S_8 = 21$

② $S_{12} = 23$

③ $S_{21} = 21$

④ $S_{26} = 26$.

$\Rightarrow m = 8, 12, 21, 26$

m값 합 67

교차는 되지만 $\overline{AB}$ 가 $\frac{1}{5}$ 보다 작다

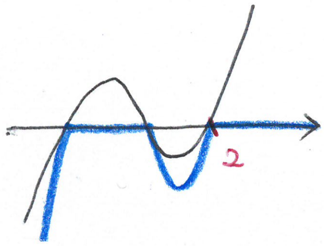
21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x (f(t)-|f(t)|)\,dt \qquad g'(x)=f(x)-|f(x)|$$

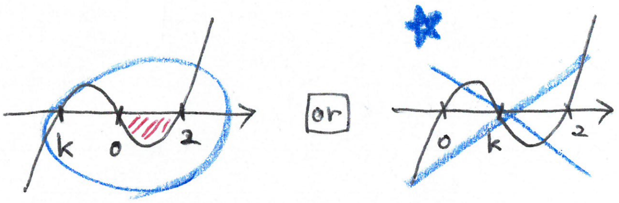
가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $x \ge k$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=0$을 만족시키는 실수 k의 최솟값이 2이다.
> (나) $g(2)=-8$

$y=g'(x)$ (가) 3건



$\Rightarrow$



$f(x)=x(x-2)(x-k)$

$$g(2)=\int_0^2 2f(t)\,dt=2\int_0^2 \left(t^3-(k+2)t^2+2kt\right)dt$$

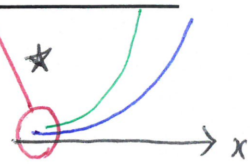
$$=2\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{k+2}{3}t^3+kt^2\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}k-\frac{8}{3}=-8 \qquad \therefore k=-2$$

$f(x)=x(x-2)(x+2) \rightarrow \boxed{f(4)=48}$

22. 자연수 k에 대하여 두 함수

$$f(x)=2^x,\quad g(x)=2\times 4^x+\left(\frac{1}{2}\right)^k$$



이 있다. 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B 사이의 거리가 $\frac{1}{5}$이 되도록 하는 ① 실수 t의 개수가 2이고 이 두 실수의 합을 p라 할 때, ② $k\times\left(\frac{1}{2}\right)^p$의 값을 구하시오. [4점]

$$\overline{AB}=2\times 4^x+\left(\frac{1}{2}\right)^k-2^x=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 2\times 4^x-2^x+\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}=0 \quad \text{근 } \alpha, \beta$$

$$\boxed{2^x=t} \quad 2t^2-t+\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}=0 \quad \text{근 } 2^\alpha, 2^\beta$$

① $D=1-8\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}\right)>0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^k}<\frac{13}{40} \quad \text{자연수 } k \text{ 2이상}$$

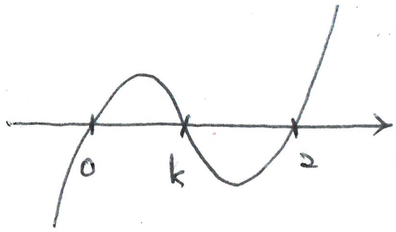
② $\begin{cases} 2^\alpha+2^\beta=\frac{1}{2} \\ 2^\alpha\times 2^\beta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}\right)>0 \end{cases}$

k 3이상 X

$$\therefore \begin{cases} k=2 \\ 2^{\alpha+\beta}=2^p=\frac{1}{40} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow k\times\frac{1}{2^p}=2\times 40=80$$

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.



이 조건이 되지 않는 이유!!

$$f(x) = x(x-k)(x-2) = x^3-(k+2)x^2+2kx$$

$$g(2) = \int_0^k 0\,dt + \int_k^2 2f(t)\,dt$$

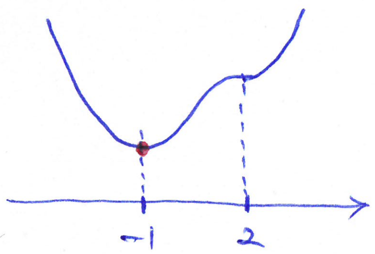
$$= 2\left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{k+2}{3}t^3 + kt^2\right]_k^2 = -8$$

$\Rightarrow$ 정리하면, "$k^4-4k^3+16k+32=0$."

그런데. 함수로 생각 해보면.

$$y = k^4-4k^3+16k+32$$

$$y' = 4k^3-12k^2+16 = 4(k+1)(k-2)^2$$



극소점이 $(-1, 21)$

즉. k절편이 없다.

$\Rightarrow$ "$k^4-4k^3+16k+32 \neq 0$"