제 2 교시

수학 영역

홀수형

빠른 정답

9	①	3	13	③	3
10	④	4	14	③	4
11	④	4	20	12	4
12	③	4	21	64	4

27학년도 워너비 하프 모의고사 7회로 인사드립니다.
7회차는 전반적으로 무난하게 출제하였습니다.

수1에서는 수열로 변별하고자 하여 9번, 11번, 20번을 수열로 구성하였고, 수2에서는 함수 추론과 극한 추론을 적절히 구성하여 과하지 않은 정도로 출제하였습니다. 14번 문제는 예전에 만들고 사용하지 않았던 문제지만, 27학년도 수능특강에 같은 아이디어를 쓴 문제가 나와버려서 어쩌다보니 변형 문제가 되어버렸는데 궁금하다면 수능특강 문제를 참고해주시면 되겠습니다. 20번의 발문이 상당히 특이해서 당황하셨을 거 같은데 이번 기회를 통해 등차수열의 조건 해석법을 얻어가시길 바랍니다.

끝을 향해 달려가는 여러분들을 응원합니다. 파이팅!

<난이도>

전체 난이도: 살짝 쉬움

★☆☆☆☆: 9번, 10번, 11번
★★☆☆☆: 12번, 13번, 14번
★★★☆☆: 20번
★★★★☆: 21번
★★★★★: X

< 해설 유형 >

[상세한 풀이]: 정석적으로 자세히 서술하여 해설에 비약이 최대한 적도록 하였습니다.

[실전 풀이]: '실전에서 이렇게 해야한다'의 느낌으로 서술하여 풀이에 비약이 있을 수 있습니다.

9. ★☆☆☆☆

[상세한 풀이]

$a_1=2$이므로

$a_2=4-1=3(\because |a_1|\le 2)$
$a_3=-2(\because |a_2|>2)$
$a_4=-4-1=-5(\because |a_3|\le 2)$
$a_5=5+1=6(\because |a_4|>2)$
$a_6=-6+1=-5(\because |a_5|>2)$
이 된다. $n=4$일 때부터 $a_{n+1}=-a_n+1$이므로
$a_7=6\to a_8=-5\to a_9=6\to a_{10}=-5$이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=2+3-2-5+6-5+6-5+6-5=1$$

임을 얻는다.

10. ★☆☆☆☆

[상세한 풀이]

변수를 구분하여 정리하면

$$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=\frac{1}{4}x^4-x^3+2x^2$$

이다. 양변을 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt=x^3-3x^2+4x$$

이고 한 번 더 미분하면

$$f(x)=3x^2-6x+4$$

이므로 $f(2)=12-12+4=4$임을 얻는다.

11. ★☆☆☆☆

[상세한 풀이]

$g(x)=\cos(-a\pi x)=\cos(a\pi x)$이므로 주어진 등식은

$$|\sin(a^2\pi)|=|\cos(a^2\pi)|$$

이다. 양변을 제곱하여 정리하면

$$\tan^2(a^2\pi)=1 \rightarrow \tan(a^2\pi)=\pm 1$$

이다. 등식을 만족시키는 $a^2\pi$의 일반항을 구하면

$$a^2\pi=m\pi\pm\frac{\pi}{4} \rightarrow a^2=\frac{4m\pm 1}{4} \quad (\text{단, } m\text{은 정수})$$

이다. 모든 홀수의 제곱은 $4m+1$ 꼴이므로,

$$a^2=\frac{4m+1}{4}$$

임을 얻는다. 이를 만족시키는 모든 양의 유리수 a는

$$a=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{9}{2},\frac{11}{2},\cdots$$

이므로 $\sum_{n=1}^{6}a_n=\frac{1+3+5+7+9+11}{2}=18$

임을 얻는다.

12. ★★☆☆☆

[상세한 풀이]

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$라 하자. (α와 β는 $\alpha<\beta$인 실수)

이를 활용하면

$$\lim_{x\to t}\frac{xf(x+1)}{f(x)}$$

에서 분모가 0이 될 수 있는 후보는 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이다. 모든 실수 t에 대하여 연속이어야 하므로 $t=\alpha$ 또는 $t=\beta$에서도 극한값이 존재해야 한다.

$$\alpha f(\alpha+1)=0$$

에서 $\alpha=0$ 또는 $\alpha+1=\beta$여야 하며,

$$\beta f(\beta+1)=0$$

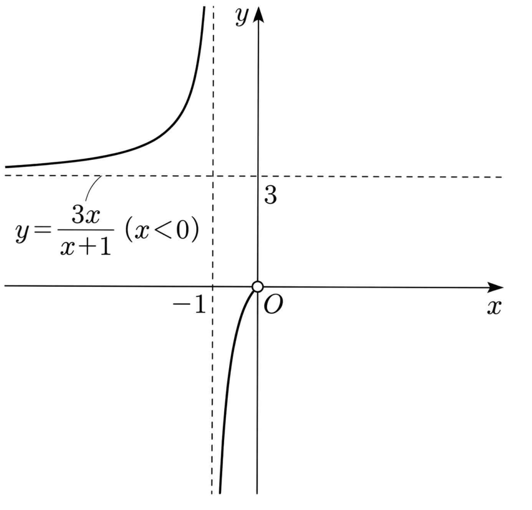
에서 $f(\beta+1)\neq 0$이므로 $\beta=0$이고, $\alpha<\beta=0$이므로 $\alpha+1=\beta$여야 한다. 따라서 $\alpha=-1$이다.
$f(x)=x(x+1)$이므로 $f(4)=4\times 5=20$임을 얻는다.

13. ★★☆☆☆

[상세한 풀이]

$$f(x)=\frac{3x}{x+1}=\frac{3x+3}{x+1}-\frac{3}{x+1}=3-\frac{3}{x+1} \quad (x<0)$$

이므로 $x=-1, y=3$에서 점근선을 가진다. 함수 $f(x)$를 $x<0$에 대해서만 그래프로 표현하면 다음과 같다.



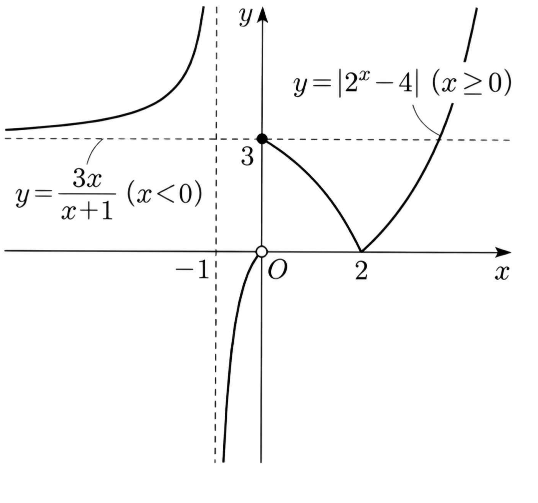
$x<0$에 대하여 박스 조건을 해석해보면, t의 값이 커져감에 따라 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 점점 증가함을 캐치할 수 있다. $t<0$ 또는 $t>3$인 모든 실수 t에 대하여 교점의 개수가 1이 기본적으로 추가된다. $0<t<3$에선 만나는 점의 개수가 하나 모자르므로 교점의 개수를 $x>0$에서 채워주는 방향으로 풀이를 진행해야 한다.

$a<1$인 경우 $f(0)=1-a>0$이므로 $0<t<1-a$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=0$이므로 박스 조건을 충족시키지 못한다.

$a=1$인 경우 $f(0)=0$이라 교점의 개수를 채워주며 박스 조건까지 덩달아 충족시킨다.

$1<a<4$인 경우 절댓값의 효력이 작용한다. 그런데 $f(0)=|1-a|=a-1$이므로 $a-1<t<3$인 모든 실수 t에 대한 $g(t)$의 값이 $0<t<a-1$인 모든 실수 t에 대한 $g(t)$의 값보다 1만큼 크다. 따라서 박스 조건을 충족시키지 못한다.

$a=4$인 경우 다음과 같이 점근선 경계와 완벽하게 겹치는 그림이 탄생한다.



$a>4$인 경우 $3<t<a-1$에 속하는 모든 실수 t에 대한 $g(t)$의 값이 $t>a-1$에 속하는 모든 실수 t에 대한 $g(t)$의 값보다 크므로 박스 조건을 충족시키지 못한다. 따라서 가능한 모든 a의 값의 합은 $1+4=5$임을 얻는다.

14. ★★☆☆☆

[실전 풀이]

문제에서 함수 $g(x)$는 미분한 상태로 주어져 있다. 박스 조건을 보면 극값을 갖도록 하는 모든 실수 x의 개수는 4라 한다. 도함수 $g'(x)$를 보면 $g(x)$는 $x=-2$에서 극값을 가지므로 $x<0$에서 극값을 갖도록 하는 실수 x를 하나 확보한 상태다. 그런데 이차함수 $f(x)$는 $f(x)=0$의 실근의 개수가 아무리 많아봐야 2이다. 따라서 단순 x축을 지나는 상황으로는 극값을 가지도록 하는 실수 x의 개수의 최대가 3이다. 따라서 도함수 $g'(x)$의 불연속 후보인 $x=0$에서 좌극한과 우극한의 부호가 서로 다르면 극값을 가진다. 또한, 크기순으로 나열하면 등차수열을 이루므로 극값을 가지도록 하는 모든 실수 x의 값은 $-2, 0, 2, 4$이다. 따라서 함수 $f(x)$를

$$f(x)=a(x-2)(x-4)\ \ (a<0)$$

라 할 수 있다. $g(x)$를 적분하여 직접 구하면

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+2x+c & (x\le 0)\\[2ex] \dfrac{a}{3}x^3-3ax^2+8ax+c & (x>0)\end{cases}$$

이다. 등식 $g(x)=g(4)$을 만족시키는 서로 다른 실수 x의 개수가 3이 되도록 하려면 $x=-2$에서의 극솟값과 $x=4$에서의 극댓값이 같은 경우여야 한다.

$g(4)=g(-2)$이므로

$$g(-2)=2-4+c=c-2$$

$$g(4)=\frac{64}{3}a-48a+32a+c=\frac{16}{3}a+c$$

이다. 따라서 $a=-\dfrac{3}{8}$이다. 이에 따라

$$f(3)=(-1)\times\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{3}{8}$$

임을 얻는다.

20. ★★★☆☆

[상세한 풀이]

(나) 조건에서 특정 자연수 n빼고는 $S_n<S_k$이 성립하므로 공차가 음수임을 얻는다. $S_n\ge S_k$를 만족하는 모든 n의 값의 합이 5이 되는 자연수 k의 개수가 2려면

가능한 n의 값은 연속된 자연수인 $2, 3$에만 해당하고 k가 $2, 3$에 해당해야 한다. 따라서 $k=2, 3$일 때 모두 $S_n\ge S_k$를 만족시키는 모든 n의 값의 합이 5이 되어야 한다.

$k=2$라면 $S_n\ge S_2$인 n의 값이 $2, 3$이다. 따라서 $S_3\ge S_2$

$k=3$이라면 $S_n\ge S_3$인 n의 값이 $2, 3$이다. 따라서 $S_2\ge S_3$

따라서 $S_2=S_3\rightarrow a_3=0$임을 얻는다.

$S_5=0$이므로 $S_4>0, S_8<0$이다. 공차를 d로 설정하여 (가) 조건에 대입하면

$$|S_8|-|S_4|=-S_8-S_4=-12d-(-2d)=-10d=1$$

이다. 따라서 $-5\times a_{27}=-5\times 24d=12$임을 얻는다.

21. ★★★★☆

[실전 풀이]

미분이 가능한 함수이므로 미분해주면

$$g'(x)=\begin{cases} 2(x+2) & (x<-2) \\ -xf'(x) & (x>-2) \end{cases}$$

이다. 미분가능하니 좌미분계수와 우미분계수가 같아야 하므로 $f'(-2)=0$임을 얻는다. 따라서 함수 $f'(x)$는

$$f'(x)=4(x+2)(x-a)\ (a\text{는 상수})$$

이다. 이때 함수 $-xf'(x)$는

$$-xf'(x)=-4x(x+2)(x-a)=-4x^3+4(a-2)x^2+8ax$$

이고 이를 연속함수라는 특징을 이용하여 적분하면 $x>-2$에서 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\int_{-2}^{x}-xf'(x)dx=-x^4+\frac{4}{3}(a-2)x^3+4ax^2-\frac{16}{3}a-\frac{16}{3}$$

이고 $g(0)=0$이므로 $a=-1$임을 얻는다. 따라서 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} (x+2)^2 & (x<-2) \\ -x^2(x+2)^2 & (x\geq -2) \end{cases}$$

임을 얻는다. 직선 $y=tx+2t=t(x+2)$와 함수 $g(x)$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, $h(t)=5$이 되려면 개형상 $t<0$이어야 하고 접하는 점이 경계이므로

$$t(x+2)=-x^2(x+2)^2$$

이 한 점에서 중근을 가져야 한다. 중근을 가질 때의 x좌표를 k라 하면

$$t=-k^2(k+2)=-2k(k+2)^2-2k^2(k+2)=-4k(k+1)(k+2)$$

이므로 $k=-\frac{4}{3}$이고 이를 대입하면 $t=-\left(-\frac{4}{3}\right)^2\frac{2}{3}=-\frac{32}{27}$이다.

따라서 $-\frac{32}{27}<t<0$이므로 $54(\alpha-\beta)=54\times\frac{32}{27}=64$임을 얻는다.