[2026 ENS 수능완성 16번]

1

★★★☆☆

상수 $a\,(a \neq 0)$ 과 실수 t 에 대하여 직선 $x=t$ 와 두 곡선

$$y=4^x,\quad y=a\times 2^x$$

이 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=8$ 이 되도록 하는 모든 t 의 개수가 2 일 때, a 의 값은?

① $-4\sqrt{2}$　② $-2\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{2}$　⑤ $6\sqrt{2}$

1

(2026년 3월 모의고사 22번 저격 문항)

선분 AB 의 길이는 $|4^t-a\times 2^t|$ 이므로
t 에 대한 방정식

$$|4^t-a\times 2^t|=8$$

의 실근의 개수가 2 이다. 여기서 $2^t=x$ 로 **치환하면**
x 에 대한 방정식

$$|x^2-ax|=8$$

의 서로 다른 **양의 실근**의 개수가 2 이다.

지수함수를 포함한 이차방정식은

→ 치환하여 이차방정식의 양의 실근을 관찰한다.

[2026년 3월 고3 22번]

22. 자연수 k 에 대하여 두 함수

$$f(x)=2^x,\quad g(x)=2\times 4^x+\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

이 있다. 실수 t 에 대하여 직선 $x=t$ 가
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 만나는 점을 각각 A, B 라 하자.
두 점 A, B 사이의 거리가 $\frac{1}{5}$ 이 되도록 하는
실수 t 의 개수가 2 이고 이 두 실수의 합을 p 라 할 때,
$k\times\left(\frac{1}{2}\right)^p$ 의 값을 구하시오. [4점]

t 에 대한 방정식

$$\left|2\times 2^{2t}-2^t+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right|=\frac{1}{5}$$

에서 $2^t=x$ 로 치환하여 x 에 대한 두 방정식

$$2x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{1}{5}=0,$$

$$2x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{1}{5}=0$$

의 양의 실근을 관찰해 보자.

[2026 ENS 수능완성 16번]

2

★★★☆☆

두 상수 $a\,(0<a<1)$, b에 대하여 두 함수

$$f(x)=a^{x-b},\ \ g(x)=\log_a x+b$$

가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 가 y축과 만나는 점을 A, 곡선 $y=g(x)$ 가 x축과 만나는 점을 B, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 만나는 점을 C 라 하자. 세 점 A, B, C 가 한 직선 위에 있고 삼각형 OAB 의 넓이가 8 일 때, $a\times b$의 값은? (단, O 는 원점이다.)

① $\sqrt{2}$ ② $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

2

출제 요소 (1) : 역함수

지수함수와 로그함수의 그래프에서 가장 기본적으로 출제되는 개념으로

역함수 관계에 있는 두 곡선의 교점

→ 곡선과 직선 $y=x$ 의 교점

으로 해석한다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 서로 역함수 관계에 있으므로 점 C 는 직선 $y=x$ 위에 있다.

[2026 ENS 수능완성 12번]

3

★★★☆☆

상수 a에 대하여 함수 $f(x)=\log_2(x-a)+2a+\dfrac{3}{2}$ 이 있다.

함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$ 일 때, $g\left(\dfrac{5}{2}\right)$ 의 값은?

① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

3

출제 요소 (2) : 기울기+길이 정보 해석

① 선분 AB의 기울기
② 선분 AB의 길이

가 주어졌을 때, 이를

→ 두 점 A, B의 x좌표차, y좌표차

로 해석한다.

주어진 문항에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 역함수 관계에 있으므로

선분 AB의 기울기는 1이다.

또한 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$ 이므로

(두 점 A, B의 x좌표의 차) = 1
(두 점 A, B의 y좌표의 차) = 1

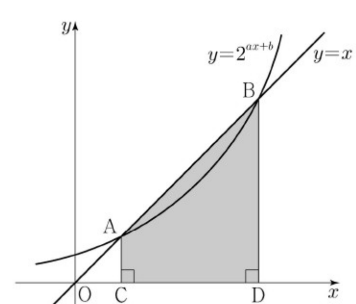
로 해석할 수 있어야 한다.
평가원 출제 요소 중 가장 많이 사용되는 개념으로

2025학년도 고3 9월 22번,
2021학년도 9월 가형 13번에서 출제된 요소이다.

[2021학년도 9월 가형 13번]

13. 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$ 이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$



[2026 ENS 수능특강 23번]

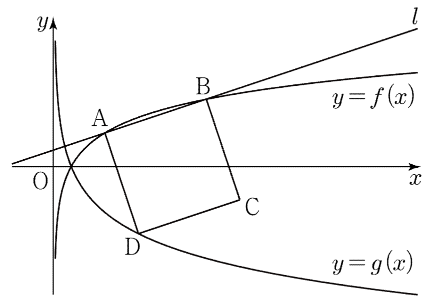
4

★★★★☆

1 보다 큰 두 상수 a, b에 대하여 두 함수

$$f(x)=\log_a x,\quad g(x)=-\log_b x$$

가 있다. 그림과 같이 기울기가 $\frac{1}{3}$ 인 직선 l 이 곡선 $y=f(x)$ 와 두 점 A, B 에서 만난다. y 좌표가 음수인 점 C 와 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 D 에 대하여 사각형 ABCD 가 넓이가 40 인 정사각형이고, 사각형 ABCD 의 두 대각선의 교점이 x 축 위에 있을 때, a^4+b^4 의 값을 구하시오.
(단, 점 A 의 x 좌표는 점 B 의 x 좌표보다 작다.)

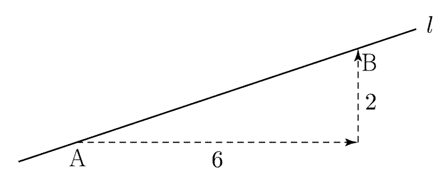


4

주어진 문항에서 정사각형 ABCD 의 넓이가 40 이므로
선분 AB 의 길이는 $2\sqrt{10}$ 이다.
선분 AB 의 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이므로

(두 점 A, B 의 x 좌표의 차) = 6
(두 점 A, B 의 y 좌표의 차) = 2

이다. 점 A 의 좌표를 $(p, \log_a p)$ 라 하고
위 정보를 이용하여 점 B 의 좌표를 적을 수 있다.



위 내용을 적용하여 과거 평가원 기출문항의 조건 (가), (나)를
해석해 보자.

14. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 A_nB_n의 기울기는 3이다.
(나) $\overline{A_nB_n}=n\times\sqrt{10}$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은? [4점]

① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$ ④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$

[2026 ENS 수능완성 23번]

5

★★★★☆

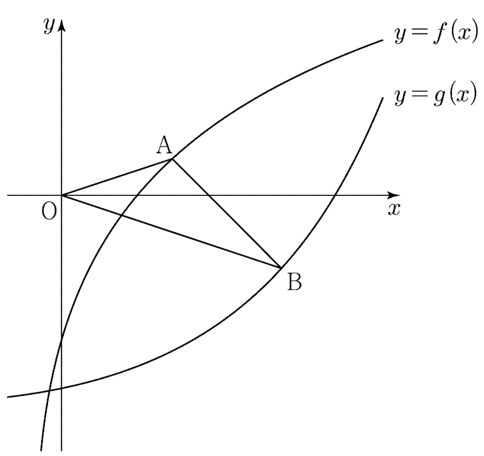
상수 $a\ (a>1)$ 에 대하여 두 함수

$$f(x)=\log_a(x+1)-4,\quad g(x)=a^{x-1}-6$$

이 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 중 제 1 사분면 위의 점 A 에 대하여 점 A 를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 만나는 점을 B 라 하자.

$$\overline{\mathrm{OB}}=2\times\overline{\mathrm{OA}}$$

이고 $\angle\mathrm{AOB}$ 가 x 축에 의하여 이등분될 때, a 의 값은? (단, O 는 원점이다.)



① $2^{\frac{1}{10}}$　② $2^{\frac{1}{5}}$　③ $2^{\frac{3}{10}}$　④ $2^{\frac{2}{5}}$　⑤ $2^{\frac{1}{2}}$

5

출제 요소 (3) : 평행이동

① 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:2$$

이다.

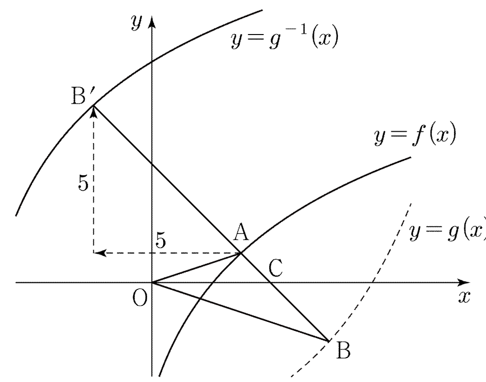
② 함수 $y=g(x)$ 의 역함수는

$$g^{-1}(x)=\log_a(x+6)+1$$

이고, 직선 AB 의 기울기는 -1 이므로 점 B′ 은 점 A 를

x 축의 방향으로 -5, y 축의 방향으로 5

만큼 **평행이동한** 점이다.



①, ②의 사실을 사용하여 두 점 A, B 의 좌표를 모두 한 문자를 사용하여 표현할 수 있다.

22. $k>1$ 인 실수 k에 대하여 두 곡선

$$y=2^x+\frac{k}{2},\quad y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 곡선 $y=2^{x-2}-3$과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 AOB의 넓이가 16일 때, $k+\log_2 k=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

작년 ENS 수능완성 문항에서 2026학년도 고3 6월 22번으로 출제된 평행이동 해석을 완벽 저격했다.

[2027 ENS 수능특강 16번]

6

★★★☆☆

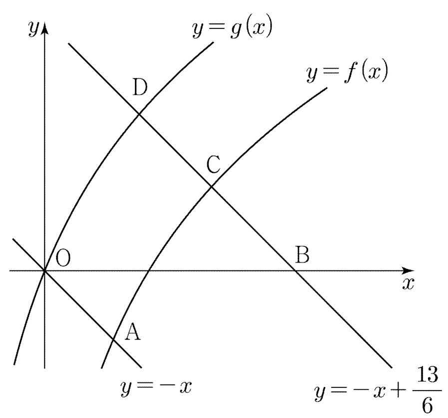
두 상수 a, b $(a>1,\ b>0)$ 에 대하여 두 함수

$$f(x)=\log_a x,\quad g(x)=\log_a(bx+1)$$

이 있다. 직선 $y=-x$ 가 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점을 A라 하자. 직선 $y=-x+\dfrac{13}{6}$ 이 x축과 만나는 점을 B, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 만나는 점을 각각 C, D라 하자.

$$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}$$

일 때, $16\times a^2\times b$의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.)



6

주어진 문항에서

$$\log_a(bx+1)=\log_a b\left(x+\frac{1}{b}\right)$$
$$=\log_a\left(x+\frac{1}{b}\right)+\log_a b$$

으로 고치면 곡선 $y=g(x)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를

x 축의 방향으로 $-\dfrac{1}{b}$, y 축의 방향으로 $\log_a b$ 만큼 평행이동한

곡선이다.

두 선분 OA, CD 의 기울기가 모두 -1 이므로
<u>평행이동의 기울기</u>는 -1 이라는 것을 파악할 수 있다.

따라서

$$\frac{1}{b}:\log_a b=1:1$$

인 것을 파악해야 한다.

수학1

[2026 ENS 수능특강 17번]

7

★★★☆☆

상수 $a\,(a>0)$ 에 대하여 두 곡선

$$y=2\log_2(x+a),\quad y=2\log_2(a-x)$$

가 만나는 점을 A 라 하자. 곡선 $y=2\log_2(x+a)$ 위의 점 B, 곡선 $y=2\log_2(a-x)$ 위의 점 C 에 대하여 삼각형 ABC 가 한 변의 길이가 $2a$ 이고, 한 변이 x 축과 평행한 정삼각형일 때, a 의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

7

출제 요소 (4) : 대칭이동

모든 실수 x 에 대하여

$$g(x)=f(-x)$$

이면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 y 축에 대하여 대칭이고, 두 곡선은 y 축 위에서 만난다.

주어진 문항에서 두 곡선

$$y=2\log_2(x+a),\quad y=2\log_2(a-x)$$

이 만나는 점 A 의 x 좌표는 0 인 것을 바로 파악할 수 있다.

작년 수능특강 문항에서 평가원 6월 10번 문항을 완벽히 저격 성공하였다.

[2026학년도 고3 6월 10번]

10. 실수 $a\,(a>1)$에 대하여
곡선 $y=\log_a(x+3)$이 곡선 $y=\log_a(-x+3)$과 만나는 점을 A,
곡선 $y=\log_a(x+3)$이 x축과 만나는 점을 B,
곡선 $y=\log_a(-x+3)$이 x축과 만나는 점을 C라 하자.
삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a의 값은? [4점]

① $3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$ ② $3^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ ③ $3^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ ④ $3^{\frac{5\sqrt{3}}{12}}$ ⑤ $3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

높은 난이도는 아니지만 주어진 두 곡선

$$y=\log_a(x+3),\ y=\log_a(-x+3)$$

이 y 축에 대하여 대칭이라는 것을 파악하여 빠르게 계산해 나갈 수 있어야 한다.

[2026 ENS 수능완성 24번]

8

★★★★☆

상수 $a\ (a>1)$ 에 대하여 그림과 같이 두 곡선

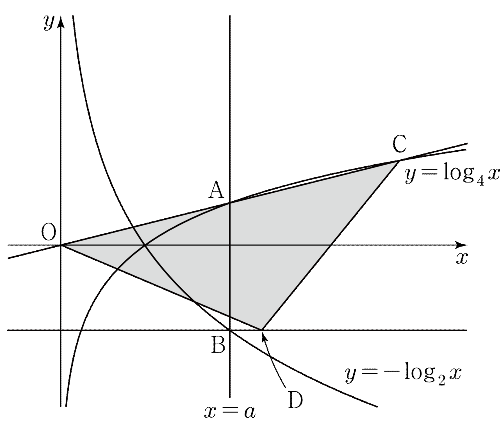
$$y=\log_4 x,\quad y=-\log_2 x$$

가 직선 $x=a$ 와 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, 직선 OA 는 곡선 $y=\log_4 x$ 와 A 보다 x 좌표가 큰 점 C 에서 만난다.

점 B 를 지나고 x 축과 평행한 직선 위에 점 D 를 $\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{CD}}$ 가 되도록 잡을 때, 삼각형 OCD 의 무게중심은 x 축 위에 있다.

삼각형 OCD 의 넓이가 $\dfrac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, O 는 원점이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



8

출제 요소 (5) : 확대, 축소

$\log_4 x=\dfrac{1}{2}\log_2 x$ 이므로

곡선 $y=\log_4 x$ 는

곡선 $y=\log_2 x$ 를 **y축에 대하여 2배 축소**시킨 그래프이다.

주어진 문항에서 두 점 A, B 의 y좌표의 절댓값의 비는

$1:2$

라는 것을 빠르게 파악할 수 있어야 한다.

따라서 삼각형 OCD 의 무게중심 G 에 대하여

$\overline{\mathrm{AG}}:\overline{\mathrm{DG}}=1:2$

이므로 점 A 는 직선 DG 위의 점인 것을 알 수 있다.

→ $f\left(\dfrac{x}{a}\right)$: $f(x)$ 의 그래프를 x축에 대하여 a배 확대

→ $af(x)$: $f(x)$ 의 그래프를 y축에 대하여 a배 확대

→ $af\left(\dfrac{x}{a}\right)$: $f(x)$ 의 그래프를 원점에 대하여 a배 확대

[2026학년도 수능 22번]

22. 곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,b)$ 와

곡선 $y=4^{x-1}-\dfrac{1}{2}$ 위의 점 B가 제1사분면에 있다.

점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 직선 OB 위에

있고 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\dfrac{77}{8},\dfrac{133}{8}\right)$일 때,

$a\times b=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$ 의 역함수는

$$y=\frac{1}{2}\times\left(4^{2x-1}-\frac{1}{2}\right)$$

이므로 이는 곡선 $y=4^{x-1}-\dfrac{1}{2}$ 을 원점에 대하여

2배 축소시킨 그래프이다. 이를 통해

$\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=1:2$

즉, 점 B 의 좌표가 $(2b,2a)$ 인 것을 빠르게 캐치하는 학생과 아닌 학생의 풀이 속도 차이 상당했을 것으로 보인다.

[2027 ENS 수능특강 24번]

9

★★★★★

두 상수 a, b $(a>1,\ b>0)$ 에 대하여 곡선 $y=\log_a x+b$ 가 직선 $y=2x$ 와 만나는 서로 다른 두 점을 x 좌표가 작은 것부터 각각 A, B 라 하고, 곡선 $y=2\times a^{-\frac{x}{2}-b}$ 이 직선 $y=-\frac{x}{2}$ 와 만나는 서로 다른 두 점을 x 좌표가 작은 것부터 각각 C, D 라 하자.

$$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}},\ (\text{사각형 ABCD의 넓이})=\frac{15}{4}$$

일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.)

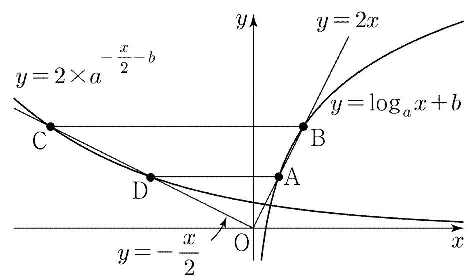
9

출제 요소 (6) : 회전이동

곡선 $y=2\times a^{-\frac{x}{2}-b}$ 은

곡선 $y=a^{-x-b}$ 을 2 배 확대시킨 그래프이다.

또한, 곡선 $y=a^{-x-b}$ 은 곡선 $y=\log_a x+b$ 를 원점에 대하여 반시계방향으로 90° **회전이동**시킨 그래프이다.



따라서 두 점 C, D 의 정체는

두 점 B, A 를 각각 원점에 대하여 90° 회전이동한 후

원점에 대하여 2 배 확대시킨 점인 것을 파악하면 쉽게 풀이할 수 있다.

회전이동은 현재 평가원 수능에서 유일하게 미출제된 요소인 만큼 올해 평가원 시험지에 등장할 가능성을 염두에 두자.

회전이동에 대한 기출 학습은 2020년 10월 가형 15번 문항을 통해 확인할 수 있다.

수학1

1

정답 ④

주어진 조건에 의하여

$|4^t - a\times 2^t| = 8$

이고 $2^t = k\ (k>0)$ 이라 하면

$|k^2 - ak| = 8$

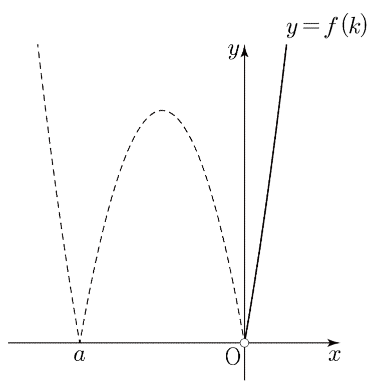
$f(k) = |k^2 - ak|$ 라 하자.

주어진 조건을 만족시키려면 $k>0$ 에서 함수 $y=f(k)$ 의 그래프와 직선 $y=8$ 이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

a 의 값의 범위에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

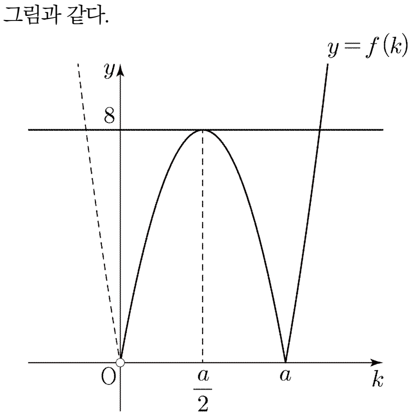
(i) $a<0$ 일 때

$k>0$ 에서 함수 $y=f(k)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$k>0$ 에서 함수 $y=f(k)$ 의 그래프와 직선 $y=8$ 의 교점의 개수는 1 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a>0$ 일 때 $k>0$ 에서 함수 $y=f(k)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



주어진 조건을 만족시키려면 $f\left(\frac{a}{2}\right)=8$ 이어야 하므로

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = a\times\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$= \frac{a^2}{4} = 8$$

$a^2 = 32$

$\therefore\ a = 4\sqrt{2}\ (\because\ a>0)$

(i), (ii)에 의하여 구하는 값은

$a = 4\sqrt{2}$

2

정답 ③

함수 $f(x)$ 는 함수 $g(x)$ 의 역함수이므로

$\overline{OA} = \overline{OB}$

이때 삼각형 OAB 의 넓이는 8 이므로 두 점 A, B 의 좌표는 각각

A$(0, 4)$, B$(4, 0)$

또한 점 C 는 선분 AB 의 중점이므로 점 C 의 좌표는

C$(2, 2)$

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 두 점 A$(0, 4)$, C$(2, 2)$ 를 지나므로

$4 = a^{-b}$,

$2 = a^{2-b}$

두 식을 연립하면

$a^2 \times a^{-b} = 4a^2 = 2$

$\therefore\ a = \frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because\ 0<a<1)$

$4 = a^{-b}$ 에 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 를 대입하면

$2^2 = 2^{\frac{b}{2}}\qquad \therefore\ b=4$

따라서 구하는 값은

$a\times b = \frac{\sqrt{2}}{2}\times 4 = 2\sqrt{2}$

3

정답 ②

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 두 교점은

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 두 교점과 같다.

이때 $\overline{AB} = \sqrt{2}$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 두 교점의 x 좌표를 각각 k, $k+1$ 이라 하면

$f(k)=k$, $f(k+1)=k+1$

이므로

$f(k) = \log_2(k-a) + 2a + \frac{3}{2} = k,\qquad \cdots ㉠$

$f(k+1) = \log_2(k+1-a) + 2a + \frac{3}{2} = k+1\qquad \cdots ㉡$

㉡−㉠에서

$\log_2(k+1-a) - \log_2(k-a) = 1$

$k+1-a = 2k-2a$

$\therefore\ k = a+1$

위 식을 ㉠에 대입하면

$2a + \frac{3}{2} = a+1$

$\therefore\ a = -\frac{1}{2}$, $f(x) = \log_2\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$

$g\left(\frac{5}{2}\right) = \alpha$ 라 하면 $f(\alpha) = \frac{5}{2}$ 이므로

$\log_2\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$\alpha + \frac{1}{2} = 4\qquad \therefore\ \alpha = \frac{7}{2}$

따라서 구하는 값은 $g\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2}$

4

정답 14

사각형 ABCD 가 넓이가 40 인 정사각형이므로 사각형 ABCD 의 한 변의 길이는 $2\sqrt{10}$ 이다.

이때 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이므로

점 A를 지나고 x축과 평행한 직선과
점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 만나는 점을 E라 하면

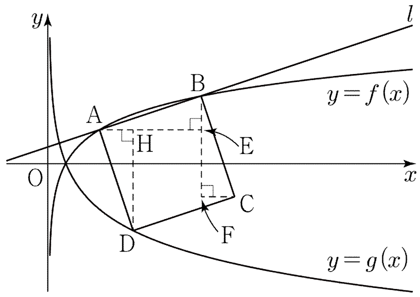
$\overline{AE}=3k$, $\overline{BE}=k\ (k>0)$

이라 할 수 있고, 삼각형 AEB에서

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{BE}^2}$

$2\sqrt{10}=\sqrt{(3k)^2+k^2}$

$10k^2=40$ ∴ $k=2$



사각형 ABCD 내부에 점 F를 두 삼각형 AEB, BFC가 서로 합동이 되도록 잡으면

$\overline{AE}=\overline{BF}=6$, $\overline{BE}=\overline{CF}=2$

이고 점 A가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 점 A의 좌표를

$(p,\ \log_a p)\ (p>1)$

이라 하면 두 점 B, C의 좌표는

$(p+6,\ \log_a p+2)$, $(p+8,\ \log_a p-4)$

이때 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이 x축 위에 있으므로 선분 AC의 중점의 y좌표는 0이어야 한다.

$\frac{\log_a p+\log_a p-4}{2}=0$ ∴ $\log_a p=2$ ⋯ ㉠

한편, 점 B는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$\log_a(p+6)=\log_a p+2$

이고 ㉠에서

$\log_a(p+6)=4$

$a^4=p+6$

$p^2=p+6$ (∵ ㉠)

$(p-3)(p+2)=0$

∴ $p=3$ (∵ $p>1$), $a=\sqrt{3}$

따라서 점 A의 좌표는 $(3,\ 2)$이다.

또한 점 D에서 선분 AE에 내린 수선의 발을 H라 하면 두 삼각형 AEB, DHA는 서로 합동이므로

$\overline{AH}=2$, $\overline{DH}=6$

점 D의 좌표는 $(5,\ -4)$이고 이 점이 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

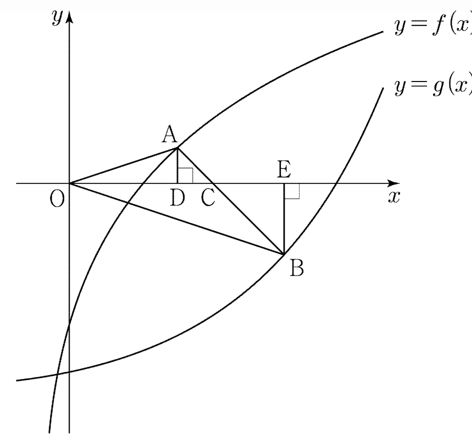
$-\log_b 5=-4$ ∴ $b^4=5$

따라서 구하는 값은

$a^4+b^4=9+5=14$

5

정답 ④



직선 AB가 x축과 만나는 점을 C,
두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.

$\angle AOC=\angle BOC$이고 $\overline{OB}=2\overline{OA}$이므로

$\overline{BE}=2\overline{AD}$

$\overline{AD}=k$, $\overline{BE}=2k\ (k>0)$이라 하면 직선 AB의 기울기가 -1이므로

$\overline{CD}=k$, $\overline{CE}=2k$

∴ $\overline{DE}=\overline{CD}+\overline{CE}=3k$

또한 두 삼각형 ADO, BEO는 서로 닮음이고 그 닮음비가 1 : 2이므로

$\overline{EO}=2\overline{DO}$

∴ $\overline{DO}=3k$, $\overline{EO}=6k$

즉, 두 점 A, B의 좌표는 각각

$A(3k,\ k)$, $B(6k,\ -2k)$ ⋯ ㉠

한편, 함수 $f(x)=\log_a(x+1)-4$의 역함수는

$y=a^{x+4}-1$

이고, 곡선 $g(x)=a^{x-1}-6$은 곡선 $y=a^{x+4}-1$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것과 같다.

즉, 점 B는 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것과 같으므로 점 B의 좌표는

$B(k+5,\ 3k-5)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$k=1$

따라서 점 A의 좌표는 $A(3,\ 1)$이고 점 A는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$1=\log_a 4-4$

$\log_a 4=5$

$a^5=4$ ∴ $a=2^{\frac{2}{5}}$

6

정답 81

두 점 A, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자.

이때 $\overline{OA}=\overline{BC}$이고 두 직선 OA, BC가 서로 평행하므로 두 삼각형 OHA, BIC는 합동이다.

따라서 두 점 A, C의 y좌표는 절댓값이 같고 부호가 다르다.

즉, 점 A의 x좌표를 $\alpha\ (0<\alpha<1)$이라 하면 점 C의 x좌표는 $\frac{1}{\alpha}$이다.

또한 $\overline{OH}=\overline{BI}$이므로

$\alpha=\frac{13}{6}-\frac{1}{\alpha}$

$6\alpha^2-13\alpha+6=0$

$(2\alpha-3)(3\alpha-2)=0$

$\therefore\ \alpha=\frac{2}{3}\ (\because\ 0<\alpha<1)$

즉, 두 점 A, C의 좌표는 각각

$A\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right),\ C\left(\frac{3}{2},\ \frac{2}{3}\right)$

$\overline{BC}=\overline{CD}$이므로

$D\left(\frac{5}{6},\ \frac{4}{3}\right)$

이때 점 A는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$-\frac{2}{3}=\log_a\frac{2}{3}$

$a^{-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a^2=\frac{27}{8}$

점 D는 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점이므로

$\frac{4}{3}=\log_a\left(\frac{5}{6}b+1\right)$

$a^{\frac{4}{3}}=\frac{5}{6}b+1$

$\frac{9}{4}=\frac{5}{6}b+1\ (\because\ a^2=\frac{27}{8})$

$\therefore\ b=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 값은

$16\times a^2\times b=16\times\frac{27}{8}\times\frac{3}{2}=81$

7

정답 ②

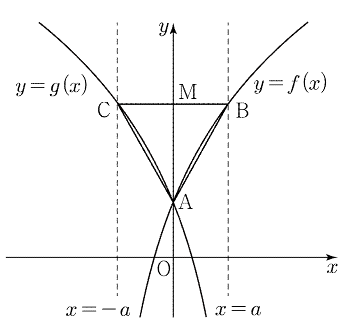
$f(x)=2\log_2(x+a),\ g(x)=2\log_2(a-x)$

라 하면 $f(x)=g(-x)$이므로 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$는 y축에 대하여 서로 대칭이고, 점 A의 좌표는 $(0,\ 2\log_2 a)$이다.

또한 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$의 점근선의 방정식은 각각

$x=-a,\ x=a$

이고, 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $2a$이고, 한 변이 x축과 평행한 정삼각형이므로 삼각형 ABC는 다음 그림과 같다.



선분 BC의 중점을 M이라 하면 점 M은 y축 위의 점이고, 점 B의 y좌표는 $2\log_2 2a$이므로

$\overline{MA}=2\log_2 2a-2\log_2 a=2$

따라서 삼각형 ABC의 높이는 2이므로

$\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2a=2\quad\therefore\ a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8

정답 67

점 A의 좌표는 $A(a,\ \log_4 a)$이고 점 D의 좌표를

$D(k,\ -\log_2 a)$

라 하자.

이때 삼각형 OCD의 무게중심을 G라 하면 점 G는 x축 위에 있으므로 y좌표는 0이다.

즉, 세 점 O, C, D의 y좌표의 합은 0이므로 점 C의 y좌표는

$\log_2 a=\log_4 a^2$

$\therefore\ C(a^2,\ \log_4 a^2)$

이때 세 점 O, A, C는 한 직선 위에 있으므로

$\frac{\log_4 a}{a}=\frac{\log_4 a^2}{a^2}$

$a^2=2a$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>1)$

따라서 세 점 A, C, D의 좌표는 각각

$A\left(2,\ \frac{1}{2}\right),\ C(4,\ 1),\ D(k,\ -1)$

한편, 삼각형 OCD는 이등변삼각형이고, 점 A는 선분 OC의 중점이므로 두 직선 OC, AD는 서로 수직이다.

$\frac{1}{4}\times\frac{\frac{1}{2}-(-1)}{2-k}=-1$

$\frac{3}{8}=k-2$

$\therefore\ k=\frac{19}{8}$

따라서 점 G의 x좌표는

$\frac{0+4+\frac{19}{8}}{3}=\frac{17}{8}$

이므로 삼각형 OGD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{17}{8}\times 1=\frac{17}{16}$

이고 삼각형 OCD의 넓이는 삼각형 OGD의 넓이의 3배이므로

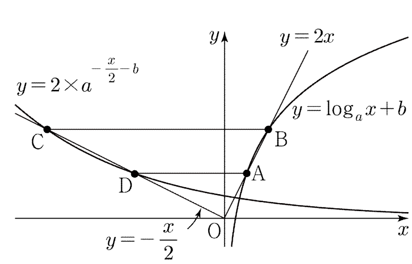
$\frac{17}{16}\times 3=\frac{51}{16}$

따라서 $p=16,\ q=51$이므로 $p+q=67$

9

정답 4

곡선 $y=\log_a x+b$와 직선 $y=2x$는 $x>0$에서 두 점 A, B에서 만나고, 곡선 $y=2\times a^{-\frac{x}{2}-b}$과 직선 $y=-\frac{x}{2}$는 $x<0$에서 두 점 C, D에서 만난다.



$\overline{OA}=\overline{AB}$이므로 두 점 A, B의 x좌표를 각각

$\alpha,\ 2\alpha\ (\alpha>0)$

이라 하면 x 에 대한 방정식

$\log_a x+b=2x$

의 실근은 α, 2α 이다. $\cdots$ ㉠

한편, 방정식

$2\times a^{-\frac{x}{2}-b}=-\frac{x}{2}$

$-\frac{x}{2}-b=\log_a\left(-\frac{x}{4}\right)$

$2\left(-\frac{x}{4}\right)=\log_a\left(-\frac{x}{4}\right)+b$

에서 $-\frac{x}{4}=t$ 라 하면

$\log_a t+b=2t$

$\therefore\ t=\alpha$ 또는 $t=2\alpha$ ($\because$ ㉠)

따라서

$x=-4\alpha$ 또는 $x=-8\alpha$

이므로 두 점 C, D 의 x 좌표는 각각

-8α, -4α

즉, 네 점 A, B, C, D 의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(\alpha, 2\alpha)$, $\mathrm{B}(2\alpha, 4\alpha)$, $\mathrm{C}(-8\alpha, 4\alpha)$, $\mathrm{D}(-4\alpha, 2\alpha)$

이므로 사각형 ABCD 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}})\times(4\alpha-2\alpha)=\frac{15}{4}$

$\frac{1}{2}\times(5\alpha+10\alpha)\times2\alpha=\frac{15}{4}$

$15\alpha^2=\frac{15}{4}$

$\alpha^2=\frac{1}{4}\quad\therefore\ \alpha=\frac{1}{2}\ (\because\ \alpha>0)$

따라서 방정식 $\log_a x+b=2x$ 의 두 실근은 $\frac{1}{2}$, 1 이므로

$x=1$ 을 대입하면 $\quad b=2$

$x=\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$\log_a\frac{1}{2}+2=1\quad\therefore\ a=2$

따라서 구하는 값은

$a+b=4$