제 2 교시

2027학년도 이대은 3월 모의고사 행동강령 정리집

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

해설강의는 유튜브 대은이대은에서 수강가능합니다.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

이대은 수학 연구소

LEE DAE EUN

선생님 덕분에 3등급에서 1등급으로 올랐습니다. 수업을 듣다보면 열심히 가르치실려고 노력하시는게 느껴집니다. 이해하기 쉽게 설명해주시려는 열정, 많은 양의 질 높은 자료가 좋았습니다. 또한 수업에 지루해하지 않게 하기 위해 재밌는 모습을 많이 보여주셔서 만족스러웠다고 생각합니다. 많은 수학 학원을 다녀봤지만 단지 특정 문제를 푸는 방법만이 아닌 문제가 궁극적으로 물어보는 것을 읽고 해야하는 사고의 틀과 그 순서까지 잡아주는 곳은 이대은 선생님이 처음이었습니다. 문제를 보고 그냥 아무 생각이 없이 손부터 움직이는 사람들은 꼭 들어야 하는 수업이라고 생각합니다. 덕분에 변형된 문제를 보더라도 당황하지 않고 천천히 풀어나갈 수 있게 되었습니다

목소리 안정감이 매우 좋은 편임. 그리고 매우 단계적으로 잘 가르치심. 필기가 정말 예쁨. 현우진 느낌. 매 문제마다 이러한 개념을 사용했다고 명확하게 가르치심.계속 반복되는 노트로 머리에 안들어올래야 안들어 올 수 없는 주입식 수업! 내가 이미 알고있다고 생각하고 도외시하기 쉬운데 강제로 노트를 과제통해서 쓰게하셔서 어쩔 수 없이 반복하게 됨.

2~3등급일때 선생님 강의를 들었다면 더욱 원하는 점수에 빨리 도달하지 않았을까 싶습니다 문제를 그냥 풀어제끼고 버리는 것이 아니고 선생님이 적어주신 노트(문제를 보고 떠올려야 하는 것들)처럼 정리해가며 범주화 시키며 공부해야 한다는 것을 재수 할때 깨달았었는데 현역때 선생님 강의를 들었다면 더 빨리 지금 실력으로 도약 할 수 있었을거 같습니다
3등급 정도의 후배가 강사를 추천해달라고 하면 바로 선생님을 추천할 것 같습니다.

결국 1등급을 받고보니 1등급으로 성적을 올리는 방법은 정해져 있다는 생각이 드네요! 유튜브로 선생님을 처음 봤을때, 그저 학원에서 알려주는 기계적인 풀이가 아니라 조건을 "해석"할 수 있는 사고를 도와주는 수업이라 꼭 듣고 싶었어요! 선부터 듣기 시작했는데 선에서 기출을 풀면서 풀이 도구들을 정리하고, 면으로 사고 과정과 부족한 부분을 매꾸고, 커튼콜로 시간배분까지 연습하며 많은 도움이 되었던 것 같아요ㅎㅎ

저는 수능을 제외한 시험에서 평소 4등급을 맞던 한 수강생입니다. 쌤을 만나기전까지는 문제를 풀때 별생각없이 풀이 써보고 어? 풀리네 이런식으로 그냥 아무생각없이 문제를 풀었습니다. 하지만 이대은선생님이 알려주시는 문제풀이에 들어가기전에 문제에 조건, 우리가 모르고 무심코 지나갈법한 조건들을 보고 "이렇게 풀어야된다" "이 조건을 보고 이렇게 반응 해야된다" 어떻게 풀지 생각을 하고 풀이에 들어간다는 것을 선생님께서 귀에 딱지가 붙도록 말씀하셨고, 실제로 수능에서 이 방법이 크게 도움이 되었어요 진짜 감사합니다!

저는 수학을 꽤나 잘하는 편에 속했습니다. 고난도 문제도 잘 풀어냈습니다. 하지만 준킬러를 빠르게 풀어내지 못하여 고난도 문제를 볼 시간도 없었습니다. 그렇지만 이대은T 수업을 듣고 준킬러 부분을 빨리 풀어낼 수 있었습니다. 그 덕분에 25수능을 15번까지 20분정도 걸리며 시험지 운영을 쉽게 할 수 있었습니다. 이대은T 수업은 3,4등급 친구들에게도 좋지만 저는 1,2등급 친구들도 충분히 들을 만한 가치가 있다고 생각합니다. 특히 시간은 문제를 풀 수 있지만 오래걸리는 친구들에게 강추합니다👍👍

유튜브　　　　오르비클래스

수학강사 이대은

<온라인>

현) 오르비클래스

<오프라인>

현) 매시브학원 대치, 광화문

현) 대치명인학원 중계

전) 사관등용문학원 대치

전) 비상에듀 재수종합반

* 23, 24, 25학년도 수학 단독 수강생수 1위

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

9. 닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$가 최댓값 M, 최솟값 4를 가질 때, M의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

9번
Note1. 삼차함수의 닫힌구간에서 최대최소 구하기
⇒ 비율관계를 이용하여 닫힌구간의 양끝값과 극값의 대소관계를 간접적으로 비교할 수 있다.
Note2. 함수의 최대나 최소를 구하는 경우
① 그래프 그리기
② 정의역에 따라
case1. 모든 실수 또는 열린구간에서 구하는 경우 ⇒ 반드시 극점에서 최대, 최소 발생
case2. 닫힌구간에서 구하는 경우 ⇒ 극점과 구간의 양 끝값을 비교

10. 양수 k에 대하여 곡선 $y=\log_2(x-k)$가 x축과 만나는 점을 A라 하자. 직선 $y=2$가 곡선 $y=\log_2(x-k)$와 만나는 점을 B, y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=\overline{AC}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

10번
Note1. 기하적 조건 (길이, 넓이, 평행 등)이 주어진 경우
⇒ 그래프를 그려서 최대한 기하적 관점에서 해석을 진행한다.

11. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 t $(t \geq 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-24t+36$$

이다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 25이다.
ㄴ. 출발한 후 점 P의 운동 방향은 두 번 바뀐다.
ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는 37이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11번

Note1. 두 시각에서의 위치에 대한 정보가 주어진 경우

⇒ 위치 변화량 $\int_a^b v(t)\,dt$를 이용해 관계식 설정

Note2. 운동방향 바꾸기

⇒ 속도함수의 부호가 바뀌는 순간

Note3. 속도, 가속도의 특수조건

⇒ 다항함수 관점에서 동일하게 해석하기

12. $a_1=3$, $a_2=10$인 수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 등비수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k+1}=n^2+n$$

을 만족시킨다. 다음은 $\sum_{n=1}^{5}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하는 과정이다.

$n=1$일 때, $\frac{a_1}{b_1+1}=2$에서 $b_1=\frac{1}{2}$이다.

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_n}{b_n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k+1}$$ 이므로

$$\frac{a_n}{b_n+1}=\boxed{(가)}\times n \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

$n=1$일 때도 ㉠이 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_n}{n}=\boxed{(가)}\times(b_n+1) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이다.

그러므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비는 $\boxed{(나)}$이다.

따라서 ㉡에 의하여 $\sum_{n=1}^{5}\frac{a_n}{n}=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r$의 값은?

① 136 ② 137 ③ 138
④ 139 ⑤ 140

12번

Note1. 네모네모

⇒ ① 답지를 읽듯이 문제를 풀면 된다.

② 등호관계를 반드시 이용한다.

③ 박스 위 주어진 공식을 활용한다.

Note2. 합 S_n이 n에 대한 이차식인 경우

⇒ 미분을 이용하여 a_n을 다음과 같이 편하게 구할 수 있다.

$S_n=pn^2+qn \Rightarrow a_n=2pn+qp \quad n \geq 1$

$S_n=pn^2+qn+r \Rightarrow a_n=2pn+qp \quad n \geq 2$

Note3. 등비수열 두 항 주어진 경우

⇒ 두 항의 비율 공비도 나타내기 $\frac{a_p}{a_q}=r^{p-q}$

13. 함수 $f(x)=x^3-4x^2+6x-8$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ -5)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

13번
Note1. 접선의 접점 $(a,\ f(a))$이 주어진 경우
⇒ ① $f'(a)$ 구하기
② $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ 구하기
Note2. 삼차함수와 접선의 교점의 x좌표가 언급된 경우
⇒ 비율관계 이용
Note3. $y=ax^3+bx^2+cx+d$에서 변곡점의 x좌표
⇒ $x=-\dfrac{b}{3a}$

14. 두 상수 $a\ (a\neq 0)$, b에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3\sin x & (0\le x<\pi) \\ a\cos x+b & (\pi\le x\le 2\pi) \end{cases}$$

가 있다. $0\le t\le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\dfrac{7}{4}\pi$가 되도록 하는 서로 다른 모든 실수 t의 개수가 4일 때, a^2+b^2의 값은?

① $\dfrac{13}{2}$ ② $\dfrac{27}{4}$ ③ 7
④ $\dfrac{29}{4}$ ⑤ $\dfrac{15}{2}$

14번
Note1. 삼각방정식 실근에 대한 조건이 주어진 경우
⇒ ① 그래프 그려서 대칭성, 주기성 이용하기
② 주어진 구간에서 등호 유무 파악하기
Note2. 곡선이 미지수 포함하는 경우
⇒ 곡선 위의 점 구해서 관계식으로 이용하기

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} -xf(x)-ax^2 & (x \le 0) \\ \frac{1}{4}f(x)-bx^2 & (x>0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

> (가) 집합 $\{x \mid g(x)=-27\}$의 원소의 개수는 2이다.
> (나) $\{x \mid g(x)=-27\} \subset \{x \mid g'(x)=0\}$

① $\frac{85}{4}$ ② $\frac{87}{4}$ ③ $\frac{89}{4}$ ④ $\frac{91}{4}$ ⑤ $\frac{93}{4}$

15번

Note1. 다항함수 n차 함수 구하기
$\Rightarrow$ 관계식 $(n+1)$개 구하기

Note2. $f(x)=\begin{cases} g(x) & x \ge a \\ h(x) & x < a \end{cases}$ 의 미분가능
$\Rightarrow$ ① $g(a)=h(a)$, $g'(a)=h'(a)$
② 두 곡선 $g(x)$, $h(x)$이 $x=a$에서 서로 접한다.

Note3. 교점(실근)의 개수
$\Rightarrow$ 그래프 그려서 판단하기

Note4. 조건을 만족시키는 경우가 두 가지 이상인 경우
$\Rightarrow$ 귀류법 (부등식, 자연수 조건)을 이용하여 모순인 경우 제외시키기

Note5. 삼차함수와 접선의 교점의 x좌표가 언급된 경우
$\Rightarrow$ 비율관계 이용

Note6. 삼차함수 $y=ax^3+\cdots$의 두 극점의 x좌표가 α, β인 경우 두 극값의 차
$\Rightarrow$ (극댓값)−(극솟값)$=\frac{|a|(\beta-\alpha)^3}{2}$

Note7. 항등식과 다항함수가 주어진 경우
$\Rightarrow$ ① 함수를 $ax^n+\cdots$로 두고 최고차항 차수 구하기
② 미정계수법을 이용하여 모든 미정계수 구하기

Note8. 곡선과 직선의 위치관계
$\Rightarrow$ 직선이 접선이나 점근선일 때 답이 되는 경우가 많다.

20. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\begin{cases} n & (n\text{이 5의 배수가 아닌 경우}) \\ -4n+10 & (n\text{이 5의 배수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $20 \le \sum_{k=1}^{m} a_k < 30$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오.

20번

Note1. 합이 n의 배수
$\Rightarrow$ n으로 나눈 나머지끼리의 연산 이용하기

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x (f(t)-|f(t)|)dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

> (가) $x \ge k$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=0$을 만족시키는 실수 k의 최솟값이 2이다.
> (나) $g(2)=-8$

21번
Note1. 다항함수 n차 함수 구하기
⇒ 관계식 $(n+1)$개 구하기
Note2. 정적분함수 $g(x)=\int_a^x f(t)dt$이 주어진 경우
⇒ $g(a)=0$, $g'(x)=f(x)$
Note3. A, $|A|$가 조건으로 주어진 경우
⇒ $|A|+A=\begin{cases} 2A & (A \ge 0) \\ 0 & (A<0) \end{cases}$,
$|A|-A=\begin{cases} 0 & (A \ge 0) \\ -2A & (A<0) \end{cases}$ 이용하기
Note4. 조건을 만족시키는 경우가 두 가지 이상인 경우
⇒ 귀류법 (부등식, 자연수 조건)을 이용하여 모순인 경우 제외시키기

22. 자연수 k에 대하여 두 함수

$$f(x)=2^x,\ g(x)=2\times4^x+\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

이 있다. 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B 사이의 거리가 $\frac{1}{5}$이 되도록 하는 실수 t의 개수가 2이고 이 두 실수의 합을 p라 할 때, $k\times\left(\frac{1}{2}\right)^p$의 값을 구하시오.

22번
Note1. 두 점 사이의 거리
⇒ $|x_1(t)-x_2(t)|$ (절댓값 반드시 이용하기)
Note2. 두 곡선과 $x=k$ 또는 $y=k$과의 교점 사이의 거리
$x=k$ ⇒ Δy와 교점 사이의 거리 같음
$y=k$ ⇒ Δx와 교점 사이의 거리 같음
Note3. 이차방정식 실근의 개수 & 절대부등식인 이차부등식
case1. 구간이 없는 경우 ⇒ 판별식 이용
case2. 구간이 있는 경우 ⇒ 근의 분리 이용
Note4. 지수방정식 실근의 합, 로그방정식 실근의 곱
⇒ 근과 계수의 관계 이용하기
Note5. 자연수 조건이 주어진 경우
⇒ 주로 귀류법이나 부등식에서 수의 특정에 이용된다.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

28. 두 집합 $X=\{x \mid x$는 9 이하의 자연수$\}$, $Y=\{1, 2, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to Y$의 개수는?

(가) 집합 $\{x \mid f(x)=1, x\in X\}$의 원소의 개수는 3이고, 집합 $\{x \mid f(x)=2, x\in X\}$의 원소의 개수는 2이고, 집합 $\{x \mid f(x)=4, x\in X\}$의 원소의 개수는 4이다. (나) 7 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x)+f(x+1)\neq f(x+2)$이다.

① 920 ② 925 ③ 930
④ 935 ⑤ 940

28번
Note1. A는 B가 아니다 ($A\neq B$)의 조건이 주어진 경우
$\Rightarrow$ $A=B$인 경우를 여사건으로 제외시키기
Note2. 서로 이웃 조건
$\Rightarrow$ 한 묶음으로 취급하기
Note3. 케이스를 나눠서 경우의 수 또는 확률을 구하는 경우
$\Rightarrow$ 교집합 유무 확인하기

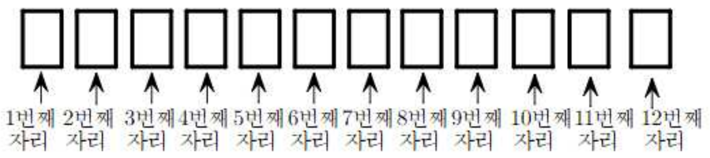
29. 숫자 1, 3, 5, 7, 9가 각각 하나씩 적혀 있는 5개의 흰색 접시와 숫자 2, 4, 6, 8, 10이 각각 하나씩 적혀 있는 5개의 검은색 접시가 있다. 이 10개의 접시를 원 모양의 식탁에 일정한 간격을 두고 원형으로 놓을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

(가) 흰색 접시끼리는 서로 이웃하지 않는다. (나) 서로 이웃한 2개의 접시에 적혀 있는 수의 곱은 70 이하이다.

29번
Note1. 적어도, 또는, 이상 이하가 주어진 경우
$\Rightarrow$ 여사건을 이용하면 빠를 가능성이 높다.
Note2. 나열되는 요소마다 조건이 다른 경우
$\Rightarrow$ 조건이 많은 순서로 먼저 나열하기

30. 정수 -1이 적혀 있는 6장의 카드와 정수 1이 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 12장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 그림과 같은 12개의 자리에 각각 한 장씩 놓을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 수가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.)

> 11 이하의 모든 자연수 n에 대하여
> n번째 자리에 놓인 카드에 적혀 있는 수와 $(n+1)$번째 자리에 놓인 카드에 적혀 있는 수의 곱을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{11} a_n = 3$이다.



30번

Note1. n회 시행하고 사건마다 수에 대한 조건이 붙은 경우
$\Rightarrow$ 각각의 사건의 발생 횟수를 미지수로 두고 연립방정식 이용

Note2. 서로 같은 것을 같은 것에 나눠주기 $\Rightarrow$ 자연수 분할
서로 같은 것을 다른 것에 나눠주기 $\Rightarrow$ 중복조합
서로 다른 것을 다른 것에 나눠주기 $\Rightarrow$ 중복순열
서로 다른 것을 같은 것에 나눠주기 $\Rightarrow$ 집합의 분할

Note3. ${}_n\mathrm{H}_r$
n: 서로 구분이 가능한 것의 가짓수
r: 서로 구분이 불가능한 것의 가짓수

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

28. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+5$가 있다. 두 자연수 p, q에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}px^2+\frac{1}{2}qx+5 & (x<0) \\ 5 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(f(x))^{2n+1}+5^{2n}\times g(x)}{(f(x))^{2n}+5^{2n}}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수가 7이다.

> 자연수 n에 대하여 직선 $y=\left(k-\frac{1}{2^n}\right)x+5$가 함수 $y=h(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n=4$이다.

$p+q+h(4)$의 값은?

① 38 ② 41 ③ 44
④ 47 ⑤ 50

28번

Note1. $(f(x))^n$이 포함된 분수식의 극한
⇒ 공비와 1과 대소에 따라 함수 나누기

Note2. 자연수(정수) 조건
⇒ 귀류법 (케이스 중 모순찾기), 부등식에서 수 특정

Note3. 직선이 미지수를 포함하고 교점의 개수에 대한 조건이 주어진 경우
⇒ 직선이 미지수에 관계없이 항상 지나는 점을 이용하기

Note4. 교점(실근)의 개수
⇒ 그래프 그려서 판단하기

Note5. 곡선과 직선의 위치관계
⇒ 직선이 접선이나 점근선일 때 답이 되는 경우가 많다. (주로 미적분에선 변곡접선이 답인 경우가 많다.)

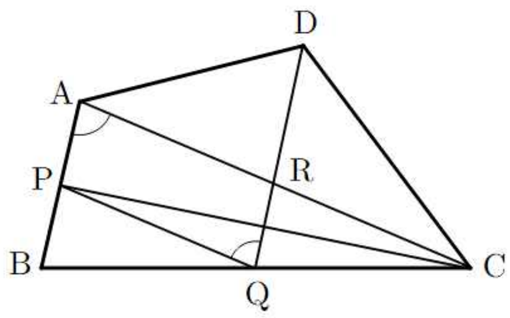
Note6. 부등식을 구하는 경우
⇒ 등호 유무 확인하기

Note7. 조건을 만족시키는 경우가 두 가지 이상인 경우
⇒ 귀류법 (부등식, 자연수 조건)을 이용하여 모순인 경우 제외시키기

29. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 $\overline{AC}=\overline{BC}=4n+2$인 사각형 ABCD가 있다. 선분 AB의 중점을 P, 선분 BC의 중점을 Q라 하고, 선분 DQ가 선분 AC와 만나는 점을 R라 하자.

$$\angle CAB = \angle PQR,\ \overline{CP}=\sqrt{15n^2+16n+4},\ \overline{DR}:\overline{DC}=1:2$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\overline{DR}-\frac{4}{3}n\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



29번

Note1. 이등변삼각형이 주어진 경우

⇒ 수직이등분선을 보조선으로 이용하기

Note2. 직각삼각형이 주어진 경우

case1. 1개가 주어진 경우

⇒ 피타고라스의 정리 이용하기

case2. 서로 닮음인 직각삼각형이 2개 이상인 경우

⇒ 삼각비, 닮음비 이용하기

30. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. (단, k는 20 이하의 자연수이다.)

> 두 정수 a, b에 대하여
>
> $\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n$의 값과 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n$의 값이 모두 존재하며
>
> $\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n$이 되도록 하는 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 19이다.

30번

Note1. 자연수(정수) 조건

⇒ 귀류법 (케이스 중 모순찾기), 부등식에서 수 특정

Note2. 등비수열이나 등비급수가 수렴함이 주어진 경우

$a_n=a_1\times r^{n-1}$ 수렴 ⇒ $-1<r\le 1$ 또는 $a_1=0$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 수렴 ⇒ $|r|<1$ 또는 $a_1=0$

Note3. 조건을 만족시키는 경우가 두 가지 이상인 경우

⇒ 귀류법 (부등식, 자연수 조건)을 이용하여 모순인 경우 제외시키기

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

정답 및 해설

9) [정답] ③

[해설]

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(2)=16-12-24+a=-20+a=4$

$a=24$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+24$이므로

$f(1)=2-3-12+24=11$

$f(3)=54-27-36+24=15$

닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 15이므로 $M=15$

10) [정답] ②

[해설]

$y=\log_2(x-k)$에 $y=0$을 대입하면 $0=\log_2(x-k)$

$2^0=1=x-k$, $x=k+1$

이므로 $\mathrm{A}(k+1, 0)$

점 B의 x좌표를 t라 하면 점 B의 y좌표는 2이므로

$\log_2(t-k)=2$, $2^2=t-k$, $t=k+4$

이므로 $\mathrm{B}(k+4, 2)$

점 C는 직선 $y=2$가 y축과 만나는 점이므로 $\mathrm{C}(0, 2)$

삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형이므로

선분 BC의 중점을 M이라 할 때

$\overline{\mathrm{AM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이고 점 M의 x좌표는 점 A의 x좌표와 같다.

$\mathrm{M}\left(\dfrac{k+4}{2}, 2\right)$이므로

$\dfrac{k+4}{2}=k+1$, $k+4=2k+2$, $k=2$

그러므로 $\mathrm{A}(3, 0)$, $\mathrm{B}(6, 2)$, $\mathrm{C}(0, 2)$, $\mathrm{M}(3, 2)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\times6\times2=6$

11) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는

$$0+\int_0^1 v(t)\,dt=\int_0^1(3t^2-24t+36)\,dt$$

$$=\left[t^3-12t^2+36t\right]_0^1=25 \qquad \text{(참)}$$

ㄴ. $v(t)=3(t^2-8t+12)=3(t-2)(t-6)$

시각 $t=2$, $t=6$일 때 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 출발한 후 점 P의 운동 방향은 두 번 바뀐다. (참)

ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|v(t)|\,dt$$

$$=\int_0^3|3t^2-24t+36|\,dt$$

$$=\int_0^2(3t^2-24t+36)\,dt+\int_2^3\{-(3t^2-24t+36)\}\,dt$$

$$=\left[t^3-12t^2+36t\right]_0^2+\left[-t^3+12t^2-36t\right]_2^3$$

$$=(32-0)+\{-27-(-32)\}=37 \qquad \text{(참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12) [정답] ①

[해설]

$n=1$일 때, $\dfrac{a_1}{b_1+1}=2$에서 $b_1=\dfrac{1}{2}$이다.

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_n}{b_n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k+1}\text{이므로}$$

$$=(n^2+n)-\{(n-1)^2+(n-1)\}$$

$$\frac{a_n}{b_n+1}=\boxed{2}\times n \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

$n=1$일 때도 ㉠이 성립하므로

모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_n}{n}=\boxed{2}\times(b_n+1) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이다.

$n=2$일 때, $\dfrac{a_2}{2}=2\times(b_2+1)$에서 $b_2=\dfrac{3}{2}$이다.

그러므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비는 $\boxed{3}$이다.

따라서 ㉡에 의하여

$$\sum_{n=1}^{5}\frac{a_n}{n}=2\times\sum_{n=1}^{5}(b_n+1)=2\times\left(\sum_{n=1}^{5}b_n+\sum_{n=1}^{5}1\right)$$

$$=2\times\left\{\frac{\frac{1}{2}(3^5-1)}{3-1}+5\right\}=2\times\left(\frac{121}{2}+5\right)=\boxed{131}$$

이다.

$p=2$, $q=3$, $r=131$이므로 $p+q+r=136$

13) [정답] ⑤

[해설]
$f'(x)=3x^2-8x+6$이므로
점 $P(1,\ -5)$에서의 접선의 방정식은
$y=f'(1)(x-1)+f(1)$
$y=x-6$
점 Q의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면
$f(t)=t-6$
$t^3-4t^2+5t-2=0,\ (t-1)^2(t-2)=0$
점 Q는 점 P가 아닌 점이므로 $t=2$이다.
점 $Q(2,\ -4)$에서의 접선의 방정식은
$y=f'(2)(x-2)+f(2)$
$y=2x-8$
이 직선의 x절편은 4, y절편은 -8이므로
구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times|-8|=16$

14) [정답] ②

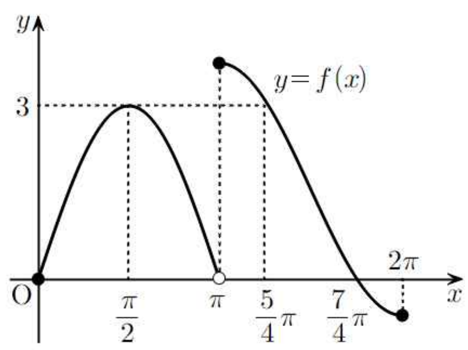
[해설]
실수 k에 대하여
(ⅰ) $k=0$인 경우
$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해는 $x=0$이므로 $0\le x\le2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되려면 $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=0$이어야 하고, 이때 $f(t)=k$를 만족시키는 실수 t의 값은 0 또는 $\frac{7}{4}\pi$로 2개다.
(ⅱ) $0<k<3$인 경우
$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해의 합은 π
① $\pi\le x\le2\pi$에서 방정식 $a\cos x+b=k$의 해가 존재하면 $0\le x\le2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합은 2π 이상이다.
② $\pi\le x\le2\pi$에서 방정식 $a\cos x+b=k$의 해가 존재하지 않으면 $0\le x\le2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합은 π이다.
그러므로 조건을 만족시키는 실수 t는 존재하지 않는다.
(ⅲ) $k=3$인 경우
$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해는 $x=\frac{\pi}{2}$이므로 $0\le x\le2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되려면 $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=3$이어야 하고, 이때 $f(t)=k$를 만족시키는 실수 t의 값은 $\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi$로 2개다.
(ⅳ) $k<0$ 또는 $k>3$인 경우
$0\le x<\pi$에서 방정식 $3\sin x=k$의 해가 존재하지 않으므로 $0\le x\le2\pi$에서 방정식 $f(x)=k$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되려면 $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=k$이어야 하고, 이때 $f(t)=k$를 만족시키는 실수 t의 값은 $\frac{7}{4}\pi$로 1개다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=3$이고 $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=0$인 경우에만 조건을 만족시킨다.

$$f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=a\cos\frac{5}{4}\pi+b=-\frac{\sqrt{2}}{2}a+b=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=a\cos\frac{7}{4}\pi+b=\frac{\sqrt{2}}{2}a+b=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

따라서 $a^2+b^2=\frac{9}{2}+\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$



15) [정답] ③

[해설]
함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로
$$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}(-xf(x)-ax^2)=0$$
$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{4}f(x)-bx^2\right)=\frac{1}{4}f(0)$$
$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)$에서
$$f(0)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$
함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로
$$\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{-hf(h)-ah^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}(-f(h)-ah)$$
$$=-f(0)=0$$
$$\lim_{h\to0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{g(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{\frac{1}{4}f(h)-bh^2}{h}$$
$$=\frac{1}{4}f'(0)$$

$\lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{g(0+h)-g(0)}{h}$ 에서

$f'(0)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 $f(x)=x^3+px^2$을 만족시키는 실수 p가 존재한다.

$g_1(x)=-xf(x)-ax^2=-x^4-px^3-ax^2$,

$g_2(x)=\dfrac{1}{4}f(x)-bx^2=\dfrac{1}{4}x^3+\left(\dfrac{p}{4}-b\right)x^2$

이라 하자.

$x \le 0$에서 $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)=-\infty$이고 $g(0)=0$이므로

$g(\alpha)=-27$을 만족시키는 실수 α가 구간 $(-\infty, 0)$에 적어도 하나 존재한다.

$g_1'(x)=-x(4x^2+3px+2a)$이고 조건 (나)에서

$g'(\alpha)=0$이므로 실수 β가 존재하여

α, β는 이차방정식 $4x^2+3px+2a=0$의 근이다.

(i) $\beta<\alpha<0$인 경우

함수 $g(x)$는 구간 $(-\infty, \beta)$에서 증가하고 구간 (β, α)에서 감소하므로 $g(k)=-27$이지만 $g'(k)\neq 0$인 실수 k가 구간 $(-\infty, \beta)$에 존재하여 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha<\beta<0$인 경우

함수 $g(x)$는 구간 (α, β)에서 감소하고 구간 $(\beta, 0)$에서 증가하며 $g(0)=0$이므로 $g(k)=-27$이지만 $g'(k)\neq 0$인 실수 k가 구간 $(\beta, 0)$에 존재하여 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $\alpha<0\le\beta$인 경우

함수 $g(x)$는 구간 $(\alpha, 0)$에서 감소하므로 $g(\alpha)=-27$이고 $g(0)=0$인 것에 모순이다.

(i)~(iii)에서 조건을 만족시키기 위해서는 $\beta=\alpha$이어야 한다.

이차방정식 $4x^2+3px+2a=0$의 근과 계수와의 관계에 의하여

$2\alpha=-\dfrac{3}{4}p$, $\alpha^2=\dfrac{a}{2}$

$p=-\dfrac{8}{3}\alpha$, $a=2\alpha^2$

$g(\alpha)=-\alpha^4+\dfrac{8}{3}\alpha^4-2\alpha^4=-\dfrac{1}{3}\alpha^4=-27$

$\alpha^4=81$, $\alpha=3$ 또는 $\alpha=-3$

$\alpha<0$이므로 $\alpha=-3$이고 $p=8$, $a=18$

$x \le 0$에서 $g(x)=-27$을 만족시키는 x의 값은 α뿐이므로 조건 (가)에 의하여 $\gamma>0$인 실수 γ가 존재하여 $g(\gamma)=-27$, $g'(\gamma)=0$을 만족시킨다.

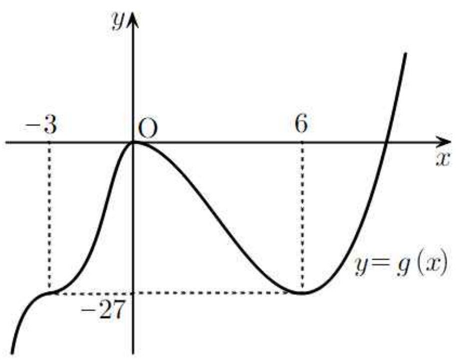
$g_2'(x)=\dfrac{3}{4}x^2+(4-2b)x=0$에서

$\gamma=\dfrac{8}{3}(b-2)$

$g(\gamma)=g\left(\dfrac{8}{3}(b-2)\right)=-\dfrac{64}{27}(b-2)^3=-27$

$b-2=\dfrac{9}{4}$, $b=\dfrac{17}{4}$

따라서 $a+b=18+\dfrac{17}{4}=\dfrac{89}{4}$



20) [정답] 67

[해설]

자연수 t에 대하여

$a_{5t-4}+a_{5t-3}+a_{5t-2}+a_{5t-1}+a_{5t}$

$=(5t-4)+(5t-3)+(5t-2)+(5t-1)+\{(-4)\times 5t+10\}$

$=20t-10+(-20t+10)=0$

$\sum\limits_{k=1}^{5t} a_k=\sum\limits_{k=1}^{t}(a_{5k-4}+a_{5k-3}+a_{5k-2}+a_{5k-1}+a_{5k})$

$=\sum\limits_{k=1}^{t} 0=0$

그러므로

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=\begin{cases} 5t-4 & (m=5t-4) \\ 10t-7 & (m=5t-3) \\ 15t-9 & (m=5t-2) \\ 20t-10 & (m=5t-1) \\ 0 & (m=5t) \end{cases}$$

(i) $m=5t-4$이면 $20\le 5t-4<30$에서 $t=5$, 6이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 21, 26이다.

(ii) $m=5t-3$이면 $20\le 10t-7<30$에서 $t=3$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 12이다.

(iii) $m=5t-2$이면 $20\le 15t-9<30$에서 $t=2$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은 8이다.

(iv) $m=5t-1$이면 $20\le 20t-10<30$에서 $\dfrac{3}{2}\le t<2$이므로 조건을 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 모든 자연수 m의 값의 합은

$21+26+12+8=67$

21) [정답] 48

[해설]

$g(x)=\displaystyle\int_0^x (f(t)-|f(t)|)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)-|f(x)|$이므로

$$g'(x)=\begin{cases} 2f(x) & (f(x)<0) \\ 0 & (f(x)\ge 0) \end{cases}$$

조건 (가)에서 $x\ge 2$인 모든 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이고 충분히 작은 양수 h에 대하여 열린구간 $(2-h, 2)$에서 $f(x)<0$이다.

삼차함수 $f(x)$의 부호가 $x=2$의 좌우에서 음에서 양으로 바

꿔어야 하므로 $f(2)=0$이다.
$f(x)$는 최고차항이 1인 삼차함수이고
$f(0)=0$, $f(2)=0$이며 $x\geq 2$에서 $f(x)\geq 0$이므로
$f(x)=x(x-2)(x-a)$를 만족시키는 실수 a $(a<2)$가 존재한다.
(i) $0<a<2$인 경우
$0<x\leq a$인 모든 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고 $a<x<2$인 모든 x에 대하여 $f(x)<0$이므로

$$g(2)=\int_0^2 (f(t)-|f(t)|)dt$$
$$=\int_0^a 0\,dt+\int_a^2 2f(t)dt$$
$$=\int_a^2 2t(t-2)(t-a)dt$$
$$=\int_a^2 \{2t^3-(2a+4)t^2+4at\}dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^4-\frac{2a+4}{3}t^3+2at^2\right]_a^2$$
$$=\frac{1}{6}a^4-\frac{2}{3}a^3+\frac{8}{3}a-\frac{8}{3}$$

$h(x)=\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{8}{3}x-\frac{8}{3}$이라 하면

$h'(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3}=\frac{2}{3}(x+1)(x-2)^2$

$0<x<2$에서 $h'(x)>0$이고 $h(0)=-\frac{8}{3}$이므로

$0<a<2$인 모든 a에 대하여 $h(a)>-\frac{8}{3}$이다.

그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
(ii) $a\leq 0$인 경우
$0<x<2$인 모든 x에 대하여 $f(x)<0$이고
조건 (나)에서 $g(2)=-8$이므로

$$g(2)=\int_0^2 (f(t)-|f(t)|)dt=\int_0^2 2f(t)dt$$
$$=\int_0^2 2t(t-2)(t-a)dt$$
$$=\int_0^2 \{2t^3-(2a+4)t^2+4at\}dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^4-\frac{2a+4}{3}t^3+2at^2\right]_0^2$$
$$=\frac{8}{3}a-\frac{8}{3}=-8$$

에서 $a=-2$
(i), (ii)에 의하여 $f(x)=x(x-2)(x+2)$
따라서 $f(4)=4\times 2\times 6=48$

22) [정답] 80

[해설]
직선 $x=t$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 두 점 A, B 사이의 거리가 $\frac{1}{5}$이 되도록 하는 실수 t의 값을 a, b $(a\neq b)$라 하자.
$h(x)=g(x)-f(x)$라 하면
a, b는 방정식 $|h(x)|=\frac{1}{5}$의 근이다.

$$h(x)=2\times 4^x-2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$=2\times\left(2^x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{1}{8}>-\frac{1}{5}$$

이므로 a, b는 방정식 $h(x)=\frac{1}{5}$의 근이다.

$2\times 4^x-2^x+\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}=0$에서 $2^x=X$ $(X>0)$이라 하면
2^a, 2^b은 X에 대한 이차방정식
$2X^2-X+\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}=0$
의 근이다.
이차방정식 $2X^2-X+\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4\times 2\times\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}\right)=\frac{13}{5}-\frac{8}{2^k}>0$

$\frac{8}{2^k}<\frac{13}{5}$

$\frac{40}{13}<2^k$ …… ㉠

한편, $X>0$이므로 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$2^a\times 2^b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}\right)>0$, $\frac{1}{2^k}>\frac{1}{5}$

$2^k<5$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 구하는 자연수 k의 값은 2이다.

$$2^p=2^{a+b}=2^a\times 2^b$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{5}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{40}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^p=\frac{1}{2^p}=40$

따라서 $k\times\left(\frac{1}{2}\right)^p=2\times 40=80$

28) [정답] ③

[해설]
조건 (가)에서 $f(1)$, $f(2)$, $\cdots$, $f(9)$의 값을 정하는 경우의 수는
1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{9!}{4!3!2!}=1260$
조건 (나)를 만족시키지 못하는 경우는
$(f(x), f(x+1), f(x+2))$가 $(1, 1, 2)$ 또는 $(2, 2, 4)$인 $x\in X$가 존재하는 경우이다.

(ⅰ) $(1, 1, 2)$인 $x \in X$가 존재하는 경우

1, 1, 2를 하나의 문자 a로 보고

a, 1, 2, 4, 4, 4, 4를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{7!}{4!1!1!1!} = 210$

(ⅱ) $(2, 2, 4)$인 $x \in X$가 존재하는 경우

2, 2, 4를 하나의 문자 a로 보고

a, 1, 1, 1, 4, 4, 4를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{7!}{3!3!1!} = 140$

(ⅲ) $(1, 1, 2)$인 $x \in X$와 $(2, 2, 4)$인 $y \in X$가 존재하는 경우

1, 1, 2, 2, 4를 하나의 문자 a로 보고 a, 1, 4, 4, 4를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!1!1!} = 20$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 조건을 만족시키지 못하는 경우의 수는 $210 + 140 - 20 = 330$

따라서 구하는 경우의 수는 $1260 - 330 = 930$

29) [정답] 864

[해설]

흰색 접시를 배열하는 원순열의 수는

$(5-1)! = 24$

조건 (가)에서 각각의 흰색 접시 사이에 검은색 접시가 한 개씩 있다.

조건 (나)에서 8, 10이 적힌 검은색 접시는 9가 적힌 흰색 접시와 이웃하지 않으므로, 8, 10이 적힌 두 검은색 접시를 놓는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

남은 세 자리에 2, 4, 6이 적힌 검은색 접시를 놓는 경우의 수는 ${}_3P_3 = 6$

따라서 구하는 경우의 수는 $24 \times 6 \times 6 = 864$

30) [정답] 100

[해설]

$a_n = 1$ 또는 $a_n = -1$이다. $\sum_{n=1}^{11} a_n = 3$이므로

$a_n = 1$인 n이 7개, $a_n = -1$인 n이 4개 존재한다.

▲□△□△□△□△□△□▲에서

6개의 □에 1이 적힌 카드를 한 장씩 놓고

△와 ▲에 -1이 적힌 카드를 놓는다고 하자.

△에 -1이 적힌 카드를 적어도 한 장 놓으면

$a_n = -1$인 자연수 n이 2개 나오고,

▲에 -1이 적힌 카드를 적어도 한 장 놓으면

$a_n = -1$인 자연수 n이 1개 나온다.

$a_n = -1$인 n이 4개 존재하려면

두 개의 △에 -1이 적힌 카드를 적어도 한 장씩 놓거나

한 개의 △와 두 개의 ▲에 -1이 적힌 카드를 적어도 한 장씩 놓아야 한다.

(ⅰ) 두 개의 △에 -1이 적힌 카드를 적어도 한 장씩 놓는 경우

두 개의 △를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$

두 개의 △에 카드를 놓는 경우의 수는 $x_1 + x_2 = 6$ $(x_1 \ge 1, x_2 \ge 1)$을 만족시키는 정수 x_1, x_2의 모든 순서쌍 (x_1, x_2)의 개수와 같다. $x_1' = x_1 - 1$, $x_2' = x_2 - 1$이라 하면 $x_1' + x_2' = 4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1', x_2'의 모든 순서쌍 (x_1', x_2')의 개수는

${}_2H_4 = {}_{2+4-1}C_4 = {}_5C_4 = 5$

구하는 경우의 수는 $10 \times 5 = 50$

(ⅱ) 한 개의 △와 두 개의 ▲에 -1이 적힌 카드를 적어도 한 장씩 놓는 경우

한 개의 △를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_1 = 5$

한 개의 △와 두 개의 ▲에 카드를 놓는 경우의 수는 $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ $(x_1 \ge 1, x_2 \ge 1, x_3 \ge 1)$을 만족시키는 정수 x_1, x_2, x_3의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수와 같다.

$x_1' = x_1 - 1$, $x_2' = x_2 - 1$, $x_3' = x_3 - 1$이라 하면 $x_1' + x_2' + x_3' = 3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1', x_2', x_3'의 모든 순서쌍 (x_1', x_2', x_3')의 개수는

${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = 10$

구하는 경우의 수는 $5 \times 10 = 50$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$50 + 50 = 100$

28) [정답] ③

[해설]

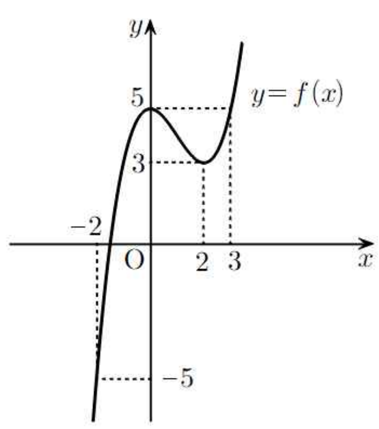
$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x = \frac{3}{2}x(x-2) = 0$에서 함수 $f(x)$는

$x = 0$에서 극댓값 5, $x = 2$에서 극솟값 3을 갖는다.

$f(x) = 5$에서 $x^2(x-3) = 0$, $x = 0$ 또는 $x = 3$이고

$f(x) = -5$에서 $(x+2)(x^2 - 5x + 10) = 0$, $x = -2$이므로

함수 $y = f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} g(x) = \lim_{x \to 0+} g(x) = g(0) = 5$이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$h(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{(f(x))^{2n+1} + 5^{2n} \times g(x)}{(f(x))^{2n} + 5^{2n}}$에서

(i) $|f(x)|>5$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{f(x)}\right)^{2n}=0$이므로

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)+g(x)\left(\dfrac{5}{f(x)}\right)^{2n}}{1+\left(\dfrac{5}{f(x)}\right)^{2n}}=f(x)$$

(ii) $|f(x)|=5$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{f(x)}\right)^{2n}=1$이므로

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)+g(x)\left(\dfrac{5}{f(x)}\right)^{2n}}{1+\left(\dfrac{5}{f(x)}\right)^{2n}}=\frac{f(x)+g(x)}{2}$$

(iii) $|f(x)|<5$인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{5}\right)^{2n}=0$이므로

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)\left(\dfrac{f(x)}{5}\right)^{2n}+g(x)}{\left(\dfrac{f(x)}{5}\right)^{2n}+1}=g(x)$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (|f(x)|>5) \\ \dfrac{f(x)+g(x)}{2} & (|f(x)|=5) \\ g(x) & (|f(x)|<5) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

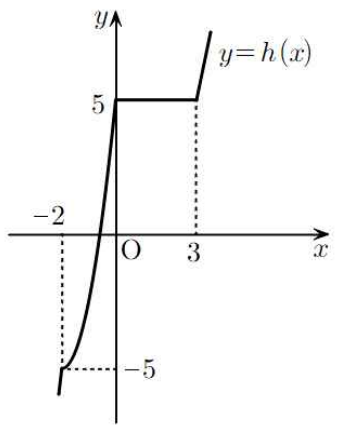
$h(-2)=\lim\limits_{x\to-2}h(x)$이다. $|f(-2)|=5$이므로

$h(-2)=\lim\limits_{x\to-2-}h(x)=\lim\limits_{x\to-2-}f(x)=f(-2)$

$h(-2)=\lim\limits_{x\to-2+}h(x)=\lim\limits_{x\to-2+}g(x)=g(-2)$

즉 $f(-2)=g(-2)$, $-5=2p-q+5$, $q=2p+10$

함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



직선 $y=\left(k-\dfrac{1}{2^n}\right)x+5$에서 모든 자연수 n에 대하여

$k-1<k-\dfrac{1}{2^n}<k$이다.

두 점 $(-2,\ -5)$, $(0,\ 5)$를 지나는 직선의 기울기가 5이고

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{h(x)-h(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0-}\left(\dfrac{p}{2}x+\dfrac{q}{2}\right)=\dfrac{q}{2}$ 이다.

$k\le5$일 때,

$\lim\limits_{x\to-2-}\dfrac{h(x)-h(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2-}\dfrac{1}{2}(x^2-5x+10)=12$

이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$

$5<k\le\dfrac{q}{2}$일 때,

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=4$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$이다.

$k>\dfrac{q}{2}$일 때,

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=3$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$가 되도록 하는 자연수 k의 개수가

7이므로 $5<k\le\dfrac{q}{2}$에서 $12\le\dfrac{q}{2}<13$, $24\le q<26$이다.

q가 자연수이므로 $q=24$ 또는 $q=25$이고,

$p=\dfrac{q-10}{2}$에서 p가 자연수이므로 $p=7$, $q=24$이다.

$h(4)=f(4)=32-24+5=13$이므로 $p+q+h(4)=44$

29) [정답] 11

[해설]

삼각형 ABC가 $\overline{AC}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이고 점 P가 선분 AB의 중점이므로 $\angle CPB=\dfrac{\pi}{2}$

직각삼각형 CPB에서 $\overline{BP}^2=\overline{BC}^2-\overline{CP}^2=n^2$이므로

$\overline{AP}=\overline{BP}=n$

두 점 P, Q가 각각 선분 AB, 선분 BC의 중점이므로

두 선분 PQ와 AC는 서로 평행하고 $\angle CAB=\angle QPB$

$\angle CAB=\angle PQR$이므로 $\angle QPB=\angle PQR$

엇각의 크기가 같으므로 두 선분 AB와 DQ는 서로 평행하고, $\angle ABC=\angle RQC$이다. 점 Q가 선분 BC의 중점이므로 점 R는 선분 AC의 중점이다.

삼각형 CRQ와 삼각형 CAB는 서로 닮음인 삼각형이고 닮음비가 $1:2$이므로 $\overline{RQ}=n$, $\overline{CQ}=2n+1$

$\overline{DR}=x$, $\overline{DC}=2x$ $(x>0)$이라 하자.

직각삼각형 CPB에서 $\cos(\angle PBC)=\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BC}}=\dfrac{n}{4n+2}$

$\angle PBC=\angle DQC$이므로 삼각형 CDQ에서 코사인법칙에

의해 $\overline{CD}^2=\overline{DQ}^2+\overline{CQ}^2-2\times\overline{DQ}\times\overline{CQ}\times\cos(\angle DQC)$

$(2x)^2=(x+n)^2+(2n+1)^2-2(x+n)(2n+1)\cos(\angle PBC)$

$3x^2-nx-4n^2-4n-1=0$

$x>0$이므로 $\overline{DR}=x=\dfrac{n+\sqrt{49n^2+48n+12}}{6}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{DR}-\frac{4}{3}n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\sqrt{49n^2+48n+12}-7n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{48n+12}{\sqrt{49n^2+48n+12}+7n}\right)$$

$=\frac{4}{7}$

따라서 $p=7$, $q=4$이므로 $p+q=11$

30) [정답] 57

[해설]

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n$의 값이 존재하므로

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n=0$ 또는 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n=1$

(i) $\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n=1$인 경우

$\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|=1$, $a+b=1$, $|a|=1$을 모두 만족시켜야 한다. $a+b=1$에서 $\frac{|2\times1-20|}{|k|}=1$, 즉 $k=18$

$k=18$일 때 $a+b=1$, $|a|=1$을 만족시키는 정수 (a, b)의 순서쌍은 $(-1, 2)$와 $(1, 0)$뿐이므로 정수 (a, b)의 모든 순서쌍의 개수는 2이다.

(ii) $\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n=0$인 경우

$\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=0$이므로 $a+b=0$ $(a\neq0)$ 또는 $a=0$

$\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|<1$에서 $|2a+2b-20|<k\le20$

$a+b=0$ $(a\neq0)$일 때, 부등식을 만족시키지 못한다.

$a=0$일 때, $|2b-20|<k$ 즉 $10-\frac{k}{2}<b<10+\frac{k}{2}$

k가 홀수인 경우, 부등식을 만족시키는 정수 b의 개수는 k이고

k가 짝수인 경우, 부등식을 만족시키는 정수 b의 개수는 $k-1$이다.

$k=18$, $k=19$, $k=20$인 경우 조건을 만족시키는 정수 (a, b)의 모든 순서쌍의 개수는 각각 17, 19, 19이다.

$k\le17$인 경우 조건을 만족시키는 정수 (a, b)의 모든 순서쌍의 개수는 17 이하이다.

(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 자연수 k의 값은 18, 19, 20이므로 $18+19+20=57$