제 2 교시

수학 영역

해원수학 김성민T

5지선다형

1. $27^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2. $\log_3 18 - \log_3 2$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $12\cos\frac{4}{3}\pi$ 의 값은? [2점]

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

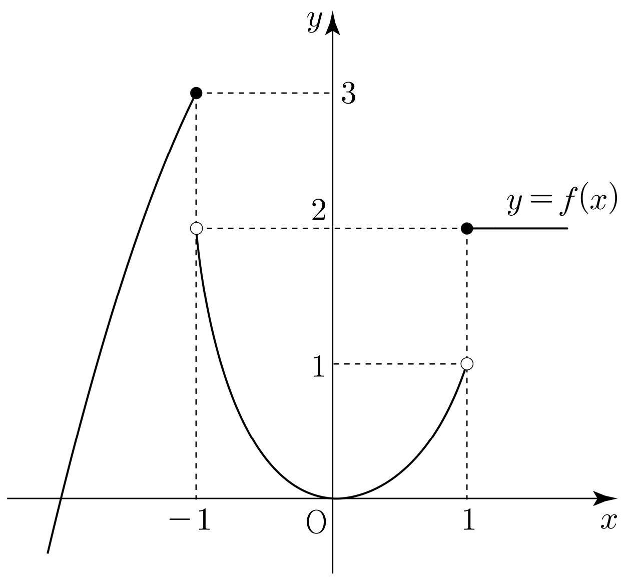
$12 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

4. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 6$, $a_6 = 3a_4$ 일 때, a_9 의 값은? [3점]

① 153 ② 156 ③ 159 ④ 162 ⑤ 165

$r^2 = 3$, $a_9 = a_3 \times r^6 = 6 \times 3^3 = 162$

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1+} f(x) + \lim_{x\to 1-} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2+1=3$

6. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\sum_{k=1}^{5} a_k = 30$일 때, a_2+a_4의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$\frac{5(a_1+a_5)}{2} = \frac{5(a_2+a_4)}{2} = 30$

$a_2+a_4=12$

7. 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이고 호의 길이가 π인 부채꼴의 넓이는? [3점]

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

$l = r\theta$

$\pi = r \times \frac{\pi}{6}$, $r=6$

$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}\times 6 \times \pi = 3\pi$

8. 함수 $y=\log_3(2x+1)$ 의 역함수의 그래프가 점 $(4,\ a)$ 를 지날 때, a 의 값은? [3점]

① 40 ② 42 ③ 44 ④ 46 ⑤ 48

$f^{-1}(4)=a$

$f(a)=4$

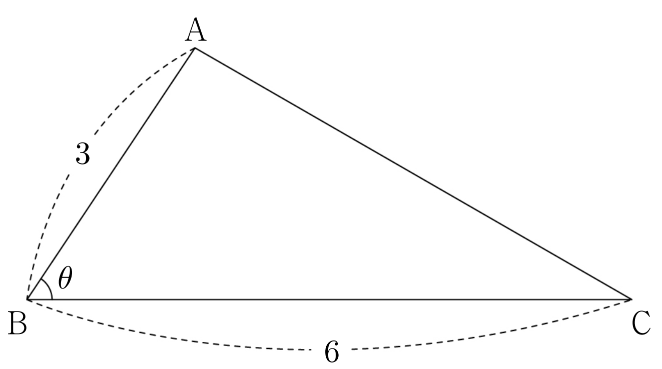
$\log_3(2a+1)=4$

$2a+1=3^4=81$

$a=40$

9. $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=6$ 인 삼각형 ABC 가 있다. $\angle ABC=\theta$ 에 대하여 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{14}}{9}$ 일 때, 선분 AC 의 길이는? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [3점]

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$



$\cos\theta=\frac{5}{9}$

$AC^2=36+9-2\cdot6\cdot3\cdot\frac{5}{9}$

$=45-20=25$

$\overline{AC}=5$

10. 첫째항이 1 이고 공차가 3 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{10}{31}$ ② $\frac{11}{31}$ ③ $\frac{12}{31}$ ④ $\frac{13}{31}$ ⑤ $\frac{14}{31}$

$a_n=3n-2$

$a_k=3k-2$

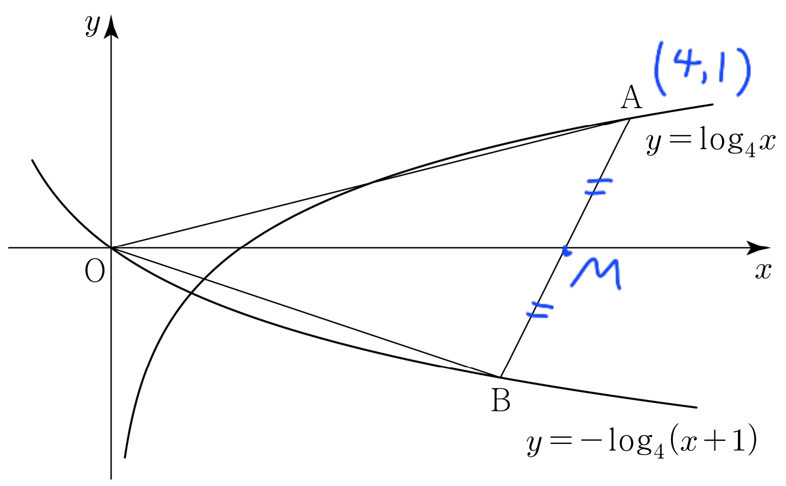
$a_{k+1}=3k+1$

$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$

$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{31}\right)=\frac{10}{31}$

11. 그림과 같이 곡선 $y=\log_4 x$ 위의 점 A 와 곡선 $y=-\log_4(x+1)$ 위의 점 B 가 있다. 점 A 의 y좌표가 1 이고, x축이 삼각형 OAB 의 넓이를 이등분할 때, 선분 OB 의 길이는? (단, O 는 원점이다.) [3점]



① $\sqrt{6}$　② $2\sqrt{2}$　③ $\sqrt{10}$　④ $2\sqrt{3}$　⑤ $\sqrt{14}$

△OAB 넓이 이등분 ⇒ $\overline{AM}=\overline{BM}$

B의 y좌표: -1

B$(3, -1)$

$\overline{OB}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

12. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\log_2\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\frac{S_{12}}{S_6}$의 값은? [3점]

① $\frac{17}{2}$　② 9　③ $\frac{19}{2}$　④ 10　⑤ $\frac{21}{2}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$a_{n+1}=\sqrt{2}a_n$

a_n: 등비수열, 공비: $\sqrt{2}$

$\frac{S_{12}}{S_6}=\frac{\frac{a(r^{12}-1)}{r-1}}{\frac{a(r^6-1)}{r-1}}=\frac{r^{12}-1}{r^6-1}=r^6+1$

$=(\sqrt{2})^6+1$

$=9$

13. 첫째항이 $\frac{1}{2}$ 인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = -\frac{1}{a_n - 1}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_m = 11$을 만족시키는 자연수 m의 값은? [3점]

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

$a_1 = \frac{1}{2}$

$a_2 = -\frac{1}{a_1 - 1} = 2$

$a_3 = -\frac{1}{a_2 - 1} = -1$ 3개 항 반복

$a_4 = -\frac{1}{a_3 - 1} = \frac{1}{2}$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$

$S_6 = 3$

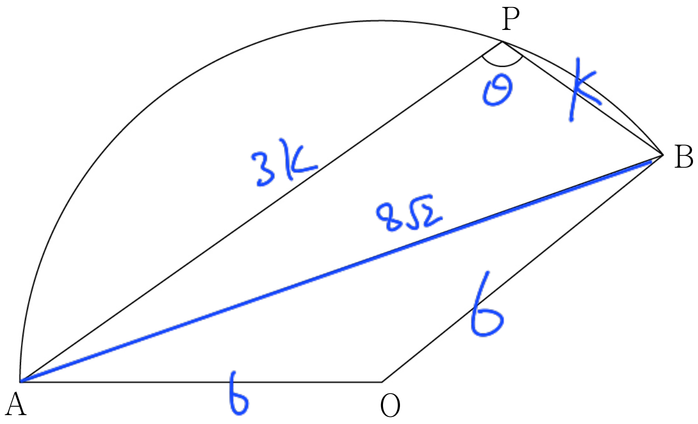
$\vdots$

$S_{3n} = \frac{3}{2}n$

$n=7 \rightarrow S_{21} = \frac{21}{2}$

$S_{22} = S_{21} + a_{22} = \frac{21}{2} + a_1 = 11$

14. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴 OAB가 있다. $\overline{AB} = 8\sqrt{2}$ 이고 부채꼴 OAB의 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 $\angle BPA > 90°$, $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$ 일 때, 선분 BP의 길이는? [4점]



① $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\frac{7\sqrt{6}}{6}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

$\frac{8\sqrt{2}}{\sin\theta} = 12$, $\sin\theta = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

$\rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{3}$ (둔각)

$\triangle APB$ 코사인법칙

$\Rightarrow 128 = 9k^2 + k^2 - 2 \cdot 3k \cdot k \cdot (-\frac{1}{3})$

$128 = 10k^2 + 2k^2$

$k^2 = \frac{32}{3}$, $k = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

15. 첫째항이 양수이고 공차가 2 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_k = 31$, $S_{k+10} = 640$ 을 만족시키는 자연수 k 에 대하여 S_k 의 값은? [4점]

① 200 ② 205 ③ 210 ④ 215 ⑤ 220

$S_{k+10} = S_k + \sum_{t=k+1}^{k+10} a_t$

$= S_k + \frac{10(a_{k+1} + a_{k+10})}{2}$, $a_k = 31$, $d = 2$

$= S_k + \frac{10\{(31+2)+(31+20)\}}{2}$

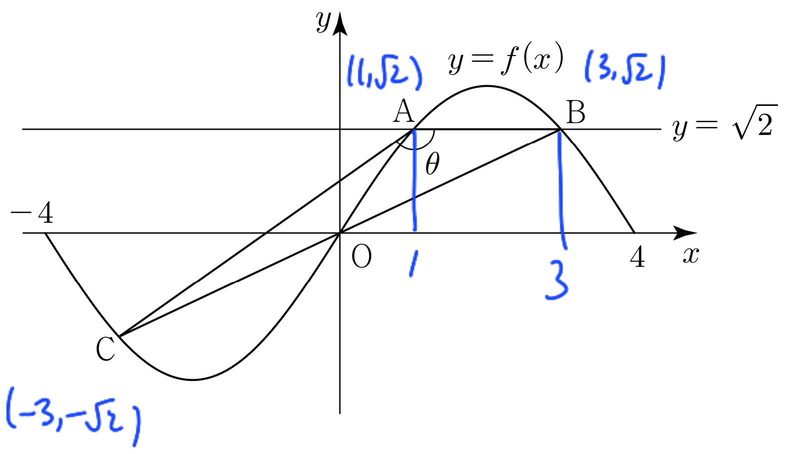
$640 = S_k + 420$

$\therefore S_k = 220$

16. 집합 $\{x \mid -4 \le x \le 4\}$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = 2\sin\frac{\pi x}{4}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = \sqrt{2}$ 와 만나는 서로 다른 두 점을 A , B 라 하고, 두 점 B , O 를 지나는 직선이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 만나는 점 중 B 와 O 가 아닌 점을 C 라 하자. $\angle BAC = \theta$ 라 할 때, $\sin\theta$ 의 값은? (단, 점 B 의 x 좌표는 점 A 의 x 좌표보다 크고, O 는 원점이다.) [4점]

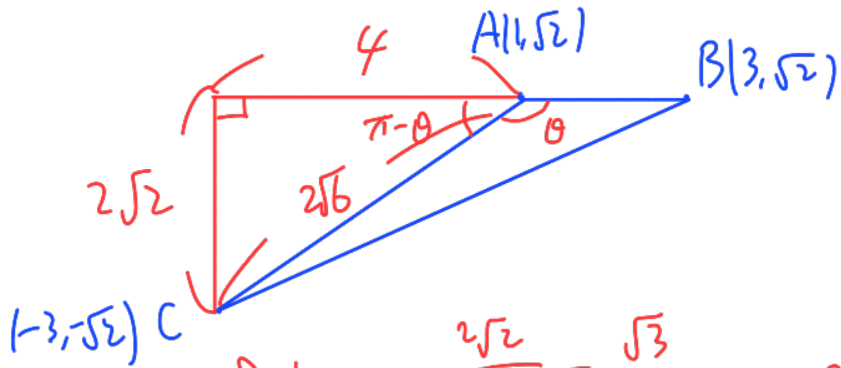


① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{7\sqrt{3}}{18}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

$2\sin\frac{\pi x}{4} = \sqrt{2}$, $\sin\frac{\pi x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{4}x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, $x = 1, 3$

$\Rightarrow A(1, \sqrt{2})$, $B(3, \sqrt{2})$, $C(-3, -\sqrt{2})$



$\sin(\pi - \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \sin\theta$

17. 실수 $a\,(a>1)$과 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 함수

$$y=3a^{x},\ y=3a^{x-1}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이를 l_n, 사다리꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+2}\mathrm{P}_{n+2}$의 넓이를 S_n이라 하자. 두 실수 L, S에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} l_k = L$, $\sum_{k=1}^{5} S_{4k-3}=S$일 때, 다음은 $\dfrac{S}{L}=\dfrac{2}{5}$를 만족시키는 a의 값을 구하는 과정이다.

두 점 P_n, Q_n의 좌표는 각각 $(n,\ 3a^n)$, $(n,\ 3a^{n-1})$

선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이 l_n은 　$3(a-1)\sum_{k=1}^{20} a^{k-1}$

$l_n = 3(a-1)\times a^{n-1}$이므로

$L=\sum_{k=1}^{20} l_k = 3\times(\boxed{(가)})$이다. 　$=3(a-1)\times\dfrac{a^{20}-1}{a-1}$

$a^{20}-1$

사다리꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+2}\mathrm{P}_{n+2}$의 넓이 S_n은 　$=3(a^{20}-1)$

$S_n = 3(a-1)\times(a^{n-1}+a^{n+1})$이므로

$S=\sum_{k=1}^{5} S_{4k-3}$ 　$= 3(a-1)\left\{\dfrac{(1+a^2)((a^4)^5-1)}{a^4-1}\right\}$

$=S_1+S_5+S_9+S_{13}+S_{17}$ 　$=\dfrac{3}{a+1}(a^{20}-1)$

$=\dfrac{3}{(\boxed{(나)})}\times(\boxed{(가)})$이다.

$a+1$ 　$a^{20}-1$

따라서

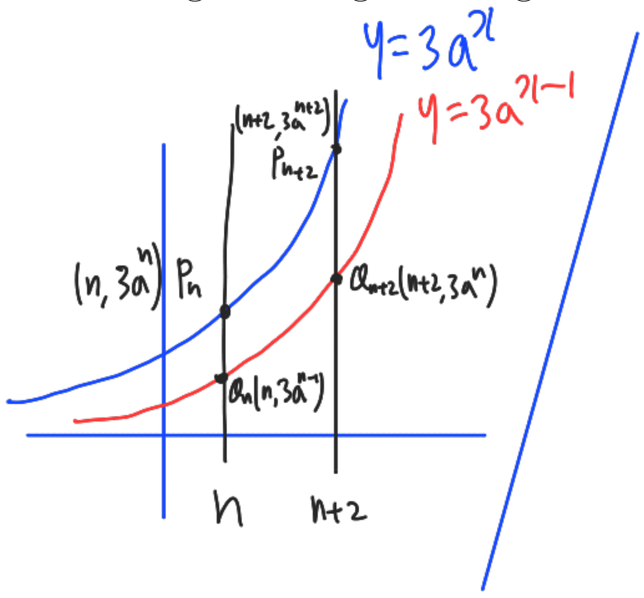
$$\frac{S}{L}=\frac{\dfrac{3}{(\boxed{(나)})}\times(\boxed{(가)})}{3\times(\boxed{(가)})}=\frac{1}{(\boxed{(나)})}=\frac{2}{5}$$

$a+1$ 　$a=\dfrac{3}{2}$

이므로 $a=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(a)$, $g(a)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $\dfrac{f(\sqrt{2})}{g(20p)}$의 값은? [4점]

① 24 　② 27 　③ 30 　④ 33 　⑤ 36



$g(20p)=g(30)=31$

$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^{20}=1023$

$\dfrac{1023}{31}=33$

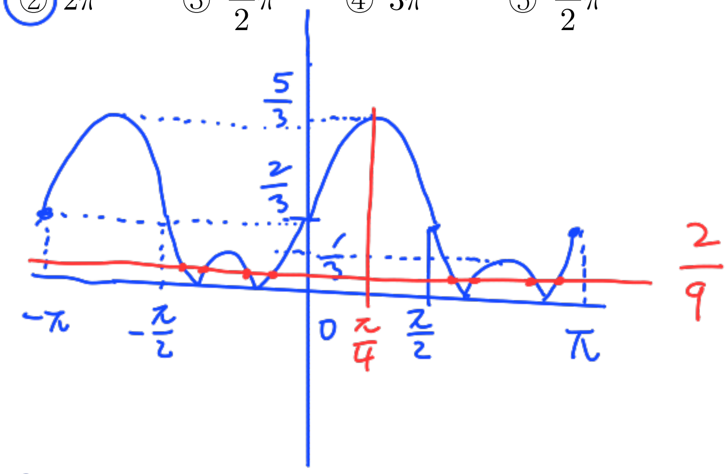
18. 집합 $\{x\mid -\pi\le x\le\pi\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\left|\sin 2x+\frac{2}{3}\right|$$

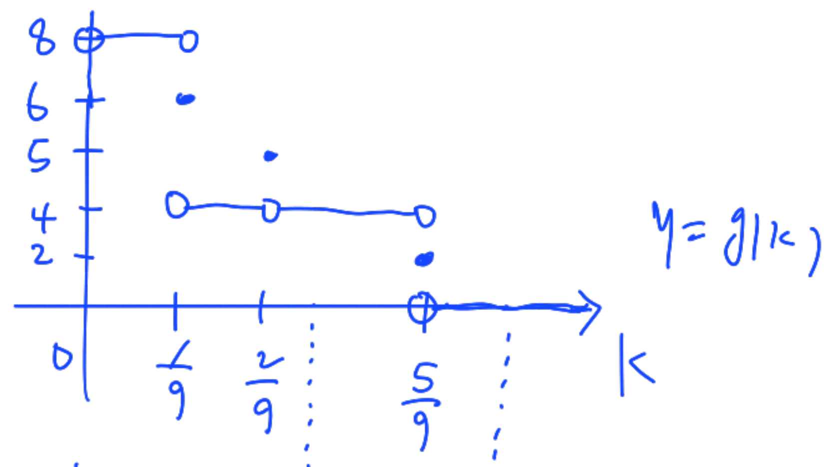
주기 π

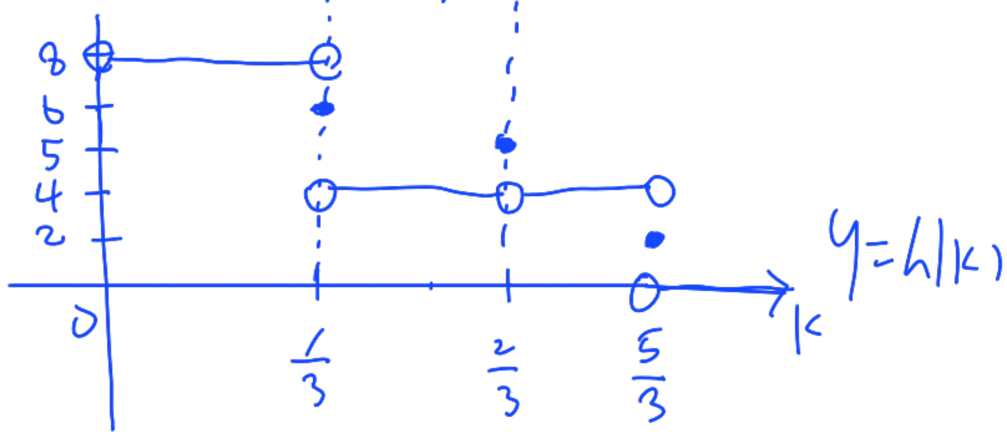
가 있다. 양수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 직선 $y=3k$, $y=k$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 각각 m, n이라 할 때, $|m-n|=3$을 만족시킨다. $-\pi\le x\le\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=k$의 모든 실근의 합은? [4점]

① $\dfrac{3}{2}\pi$ 　② 2π 　③ $\dfrac{5}{2}\pi$ 　④ 3π 　⑤ $\dfrac{7}{2}\pi$



$f(x)$ & $y=3k$ 교점 개수 $g(k)$
$f(x)$ & $y=k$ 교점 개수 $h(k)$ 　$k>0$



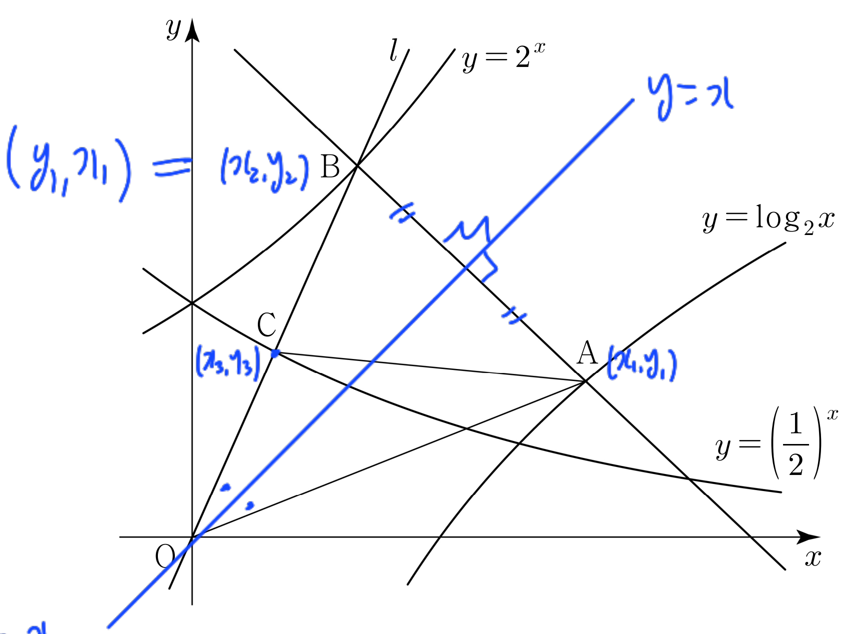


$|g(k)-h(k)|=3 \Rightarrow k=\dfrac{2}{9}$

$f(x)=\dfrac{2}{9}$ 교점 8개, $x=\dfrac{\pi}{4}$ 대칭

$\therefore \left(\dfrac{\pi}{4}\times 2\right)\times 4 = 2\pi$

19. 그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 한 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$라 하고, 두 점 B, O를 지나는 직선 l이 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 만나는 점을 $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$이라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 삼각형 OAC의 넓이의 2배일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1>1$이고, O는 원점이다.) [4점]



2^x & $\log_2 x$ 역함수
$B(x_2, y_2) = (y_1, x_1)$
$\triangle OMB \equiv \triangle OMA$
$\overline{OA} = \overline{OB}$

<보 기>

ㄱ. $\overline{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}$

ㄴ. $x_2+y_1=4x_3$

ㄷ. 직선 l의 기울기는 $3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$이다.

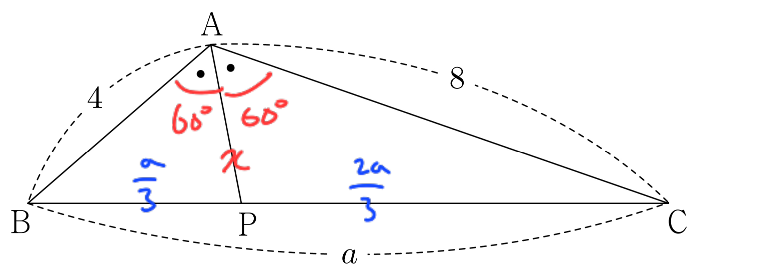
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\triangle OAB = 2\times\triangle OAC$ 이므로 $\overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{OA}$

ㄴ. $C(x_3, y_3) \Rightarrow B(2x_3, 2y_3) = (x_2, y_2) = (y_1, x_1)$
$x_2 = 2x_3,\ y_1 = 2x_3 \Rightarrow x_2 + y_1 = 4x_3$

ㄷ. $B(2x_3, 2y_3) \Rightarrow y = 2^x \Rightarrow 2^{2x_3} = 2y_3$
$C(x_3, y_3) \Rightarrow y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x_3} = y_3$
$2^{3x_3} = 2,$
$x_3 = \frac{1}{3},\ y_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$
$\therefore\ l$ 기울기 $= \frac{y_3}{x_3} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

20. 그림과 같이 양수 a에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{CA}}=8$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle\mathrm{BAC}$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 P라 하자. $a(\sin B+\sin C)=6\sqrt{3}$일 때, 선분 AP의 길이는? (단, $\angle\mathrm{BAC}>90°$) [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

$AB : AC = 1:2 = BP : PC$, $BP = \frac{a}{3}$, $CP = \frac{2a}{3}$
$\sin B = \frac{8}{2R}$, $\sin C = \frac{4}{2R}$
$a\left(\frac{12}{2R}\right) = 6\sqrt{3}$, $a = \sqrt{3}R$
$\frac{a}{\sin(\angle BAC)} = 2R = \frac{2}{\sqrt{3}}a$, $\sin(\angle BAC) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\angle BAC = 120°$
$\therefore \angle BAP = \angle CAP = 60°$
$\overline{AP} = x$
$\triangle ABC = \triangle ABP + \triangle CAP$
$\frac{1}{2}\times4\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\times4x\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\times8x\times\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\Rightarrow 32 = 4x + 8x = 12x$, $x = \frac{8}{3}$

21. 양수 a와 0이 아닌 실수 d에 대하여 첫째항이 모두 a이고, 공차가 각각 d, $-2d$인 두 등차수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|a_1|=|b_7|$
>
> (나) $S_n=\sum_{k=1}^{n}(|a_k|-|b_k|)$라 할 때,
> 모든 자연수 n에 대하여 $S_n \le 108$이고,
> $S_p=108$인 자연수 p가 존재한다.

$S_n \ge 0$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 m이라 할 때, a_m의 값은? [4점]

① 46 ② 50 ③ 54 ④ 58 ⑤ 62

$a>0$, $|a_1|=|b_7|$

$|a|=|a-12d|$ $\begin{cases} a=a-12d \rightarrow d=0\ (\times) \\ a=12d-a \rightarrow a=6d\ (\circ) \end{cases}$

$d>0$

$a_n=(n+5)d$

$b_n=(-2n+8)d$

a_n	$6d$	$7d$	$8d$	$9d$	$10d$	$11d$
b_n	$6d$	$4d$	$2d$	0	$-2d$	$-4d$
$\lvert b_n\rvert$	$6d$	$4d$	$2d$	0	$2d$	$4d$

$C_n=|a_n|-|b_n|$ 0 $3d$ $6d$ $9d$ $8d$ $7d$ $6d \cdots \underset{c_{12}}{d}, \underset{c_{13}}{0}, -d \cdots \underset{c_{22}}{-9d}$ $\underset{c_{23}}{-10d}$

$C_n=(13-n)d\ (n\ge4)$

S_n 최대 $\Rightarrow$ $n=12$, $n=13$, $S_{12}=S_{13}=54d=108$

$d=2$

$S_n\le108$, $S_p=108 \Rightarrow S_n$ 최댓값 : 108

$S_n \ge 0$ n 최대 $\Rightarrow n=22=m$

$a_{23}=27d=27\times2=54$

단 답 형

22. $\cos\theta=\frac{1}{3}$일 때, $9\sin^2\theta$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{8}$

$9(1-\cos^2\theta)$

$=9\left(1-\frac{1}{9}\right)=8$

23. 방정식 $4^x-15\times2^{x+1}-64=0$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{5}$

$2^x=t\ (t>0)$

$t^2-30t-64=0$

$(t+2)(t-32)=0$

$t=32=2^x$, $x=5$

24. $\log_5 2 = a$, $\log_2 7 = b$ 일 때, 25^{ab} 의 값을 구하시오. [3점]

$5^a = 2$, $2^b = 7$

$\boxed{49}$

$25^{ab} = 5^{2ab} = (5^a)^{2b} = 2^{2b} = (2^b)^2 = 7^2 = 49$

25. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2 = 20, \ \sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2 = 50$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{10}$

$\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k^2 + 2a_k + 1)$

$= 20 + 2\sum_{k=1}^{10} a_k + 10 = 50$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 10$

26. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1} = 8, \ \lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\frac{(x+1)f(x)}{g(x)}$ 의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{16}$

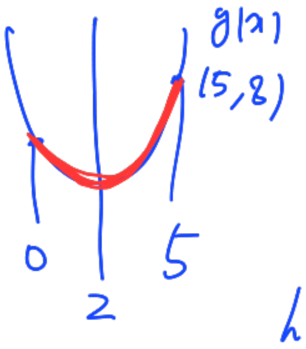
$\lim_{x\to1}\left(\frac{f(x)}{x-1} \times \frac{x^2-1}{g(x)}\right) = 8 \times 2 = 16$

27. 두 함수

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-a},\ g(x)=(x-1)(x-3)$$

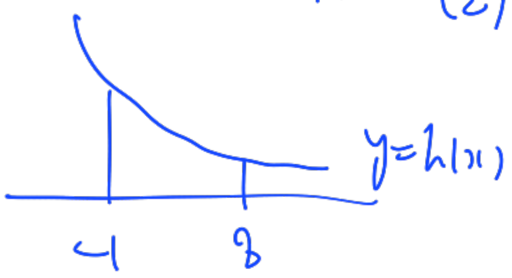
에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g)(x)$ 라 하자.
함수 $h(x)$ 가 $0 \le x \le 5$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4}$, 최댓값 M 을 갖는다. M 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [4점]

$\boxed{128}$



$x=2 \to t=-1$
$x=5 \to t=8$
$g(x)=t\ (-1 \le t \le 8)$

$h(x)=f(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^{t-a}\ (-1 \le t \le 8)$



$t=8 \to \left(\frac{1}{2}\right)^{8-a}=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\ \therefore a=6$

$t=-1 \to \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-a}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}=128=M$

28. 2 이상의 자연수 n 과 상수 k 에 대하여 $n^2-17n+19k$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 하자.
$\sum_{n=2}^{19} f(n)=19$ 를 만족시키는 자연수 k 의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{3}$

$x^n=n^2-17n+19k$

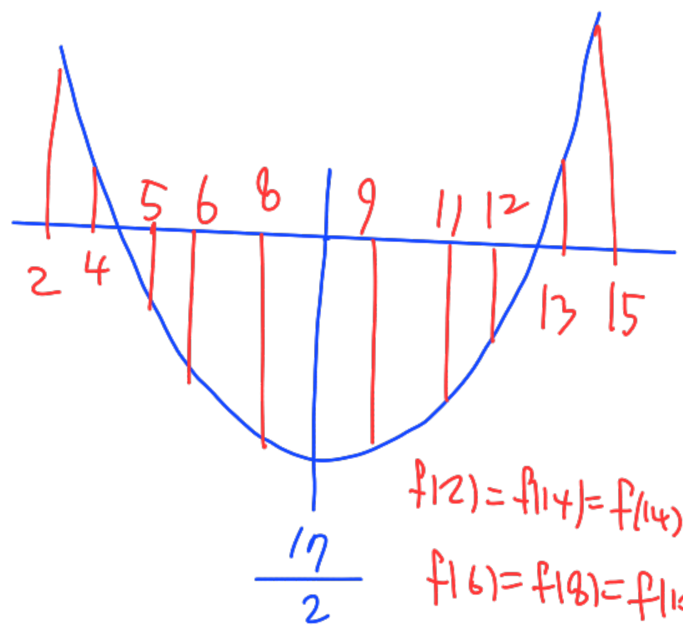
n: 홀수 $\Rightarrow f(n)=1$

n: 짝수 $\Rightarrow f(n)=2$ or 1 or 0

$\sum_{n=2}^{19} f(n)=\underbrace{\sum_{t=1}^{9} f(2t+1)}_{\Downarrow\ 9\text{ 이므로}}+\underbrace{\sum_{t=1}^{9} f(2t)}_{\Downarrow\ 10\text{이 되어야 함}}=19$

$f(2)+f(4)+f(6)+f(8)+f(10)$
$+f(12)+f(14)+f(16)+f(18)$

$n^2-17n+19k=\left(n-\frac{17}{2}\right)^2 \sim$



$f(2)=f(4)=f(14)=f(16)=f(18)=2$
$f(6)=f(8)=f(10)=f(12)=0$

$\therefore f(4)>0,\ f(5)<0$

$\begin{cases} 16-68+19k>0, & 19k>52 \\ 25-85+19k<0, & 19k<60 \end{cases}$

$\frac{52}{19}<k<\frac{60}{19}$
$\frac{52}{19}=2.xxx$, $\frac{60}{19}=3.xxx$

$k=3$

29. 양수 m과 0이 아닌 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+(a-1)x-a^2+2 & (x \le 2m) \\ -3x+4a & (x > 2m) \end{cases},$$

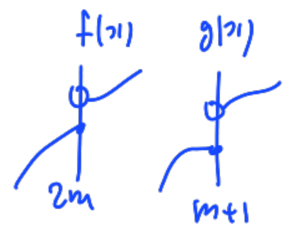
$$g(x)=\begin{cases} ax-a & (x \le m+1) \\ x-a+1 & (x > m+1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to\alpha-} f(x) \ne \lim_{x\to\alpha+} f(x)$, $\lim_{x\to\beta-} g(x) \ne \lim_{x\to\beta+} g(x)$ 인 실수 α, β가 존재한다.
>
> (나) 모든 실수 k에 대하여 $\lim_{x\to k} \frac{f(x)}{g(x)}$ 의 값이 존재한다.

$m+g(a^2)$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{4}$

$f(x)$는 $x=2m$ 제외 연속함수 $\Rightarrow \alpha=2m$
$g(x)$는 $x=m+1$ 제외 연속함수 $\Rightarrow \beta=m+1$) by (가)



모든 $k \to \lim_{x\to k} \frac{f(x)}{g(x)}$ 존재

if) $2m \ne m+1$

$\lim_{x\to 2m-} \frac{f(x)}{g(x)} \ne \lim_{x\to 2m+} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad \therefore 2m = m+1$, $m=1$

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ 존재

$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2+(a-1)x-a^2+2}{a(x-1)}$ 존재

$\Rightarrow \lim_{x\to 1-} (x^2+(a-1)x-a^2+2) = -a^2+a+2=0$

$a=-1$ or 2

i) $a=-1 \Rightarrow \lim_{x\to 2-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2-} \frac{(x-1)^2}{-(x-1)} = -1$

$\lim_{x\to 2+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2+} \frac{-3x-4}{x+2} = -\frac{5}{2}$) $\ne$ (×)

ii) $a=2 \Rightarrow \lim_{x\to 2-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2-} \frac{x^2+x-2}{2(x-1)} = 2$

$\lim_{x\to 2+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2+} \frac{-3x+8}{x-1} = 2$) $=$

$\therefore a=2$

$g(x)=\begin{cases} 2x-2 & (x\le 2) \\ x-1 & (x>2) \end{cases}$ $\quad g(a^2)=g(4)=3$

$\therefore m+g(a^2)=1+3=4$

30. $\frac{12}{5} < k \le 4$인 상수 k와 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) n이 짝수이면
> a_n은 $0 \le x \le 2$에서 직선 $y=-\frac{k}{2n}$와
> 곡선 $y=2\sin\left(n\pi x+\frac{\pi}{2}\right)+\left|k\sin^2(n\pi x)-(k-1)\right|$이
> 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.
>
> (나) n이 홀수이면
> a_n은 $0 \le x \le 2$에서 직선 $y=\frac{k+1}{n}$과
> 곡선 $y=2\sin\left(n\pi x+\frac{\pi}{2}\right)+\left|k\sin^2(n\pi x)-(k-1)\right|$이
> 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.

$0 < a_2 < 6$일 때, $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

30. $\frac{12}{5}<k\le 4$인 상수 k와 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) n이 짝수이면
> a_n은 $0\le x\le 2$에서 직선 $y=-\frac{k}{2n}$와
> 곡선 $y=2\sin\left(n\pi x+\frac{\pi}{2}\right)+|k\sin^2(n\pi x)-(k-1)|$이
> 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.
>
> (나) n이 홀수이면
> a_n은 $0\le x\le 2$에서 직선 $y=\frac{k+1}{n}$과
> 곡선 $y=2\sin\left(n\pi x+\frac{\pi}{2}\right)+|k\sin^2(n\pi x)-(k-1)|$이
> 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.

$0<a_2<6$일 때, $\sum_{n=1}^{5}a_n$의 값을 구하시오. [4점]

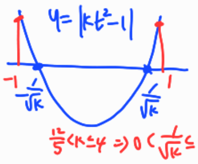
$\boxed{53}$

$2\sin\left(n\pi x+\frac{\pi}{2}\right)+|k\sin^2(n\pi x)-(k-1)|$

$=2\cos(n\pi x)+|k(1-\cos^2(n\pi x))-k+1|$

$=2\cos(n\pi x)+|1-k\cos^2(n\pi x)|$, $\cos(n\pi x)=t$ $(-1\le t\le 1)$

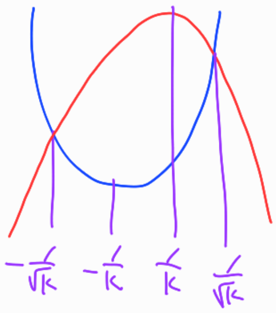
$=2t+|1-kt^2|=\underbrace{|kt^2-1|+2t}_{f(t)}$

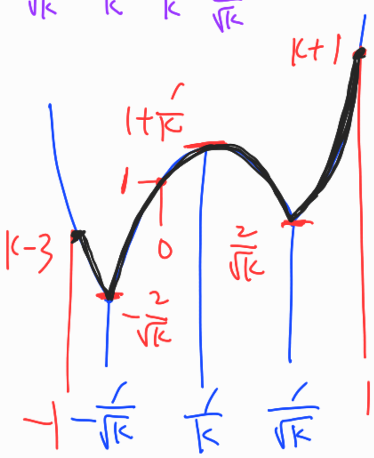


$$f(t)=\begin{cases} kt^2+2t-1 & \left(-1\le t<-\frac{1}{\sqrt{k}} \text{ or } \frac{1}{\sqrt{k}}<t\le 1\right) \\ -kt^2+2t+1 & \left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\le t\le \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\end{cases}$$

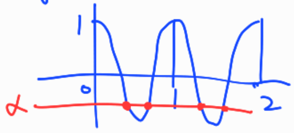
$$f(t)=\begin{cases} k\left(t+\frac{1}{k}\right)^2-1-\frac{1}{k} & \left(-1\le t<-\frac{1}{\sqrt{k}} \text{ or } \frac{1}{\sqrt{k}}<t\le 1\right) \\ -k\left(t-\frac{1}{k}\right)^2+1+\frac{1}{k} & \left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\le t\le \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\end{cases}$$

$\frac{12}{5}<k\le 4 \Rightarrow k>\sqrt{k}>0 \Rightarrow \frac{1}{k}<\frac{1}{\sqrt{k}}$, $-\frac{1}{k}>-\frac{1}{\sqrt{k}}$





$n=2 \Rightarrow y=\cos 2\pi x$



$y=-\frac{k}{4}$와 $y=f(t)$ 교점 t좌표: α

$\cos 2\pi x=\alpha$의 교점 개수: a_2

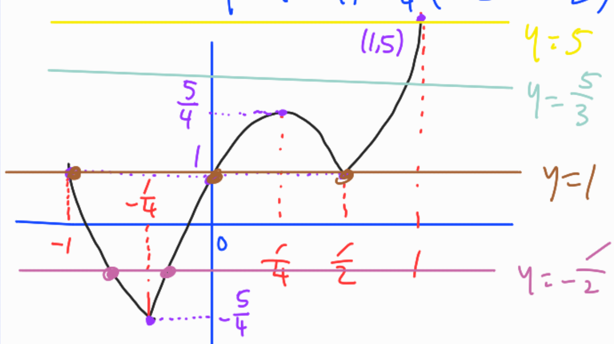
α가 2개 이상 $\Rightarrow a_2\ge 6$

$\therefore$ α는 1개 가능 $\Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{k}}=-\frac{k}{4}$, $k=4$

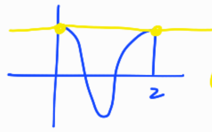
$\Rightarrow a_2=4$

$k=4$

$$\Rightarrow f(t)=\begin{cases} 4\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{5}{4} & \left(-1\le t<-\frac{1}{2} \text{ or } \frac{1}{2}<t\le 1\right) \\ -4\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{5}{4} & \left(-\frac{1}{2}\le t\le \frac{1}{2}\right)\end{cases}$$



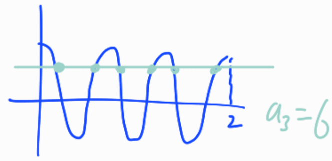
i) $n=1$ $y=\cos\pi x$, $y=5$



$a_1=2$

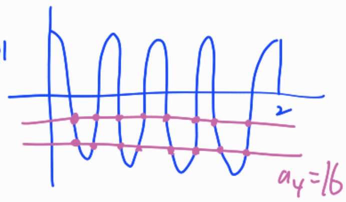
ii) $n=2 \rightarrow a_2=4$

iii) $n=3 \rightarrow y=\cos 3\pi x$, $y=\frac{5}{3}$



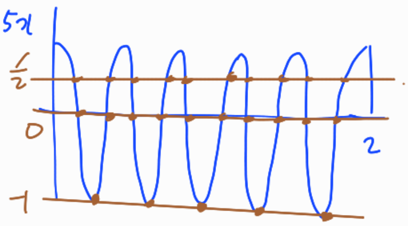
$a_3=6$

iv) $n=4 \rightarrow y=\cos 4\pi x$, $y=-\frac{1}{2}$



$a_4=16$

v) $n=5 \rightarrow y=\cos 5\pi x$, $y=1$



$a_5=25$

$\therefore \sum_{n=1}^{5}a_n=2+4+6+16+25$

$=53$