제 2 교시

수학 영역(미적분)

5 지 선 다 형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(12n+1)}{4n^3-1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{12+\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n^3}}=3$$

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(3n+2)a_n=6,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=2$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{n\to\infty}(3n+2)a_n \times \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{n}\right)a_nb_n=12$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{1}=3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_nb_n=4$$

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sqrt{n+2}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, a_n$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \quad (n \geq 2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \times (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$$

26. 자연수 a에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5a^{2n} + (2a)^{n+1}}{a^{2n} + (2a)^n} = a+1$$

을 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

i) $a^2 > 2a \Rightarrow a > 2$

$a+1 = 5 \quad \therefore a = 4.$

ii) $a^2 = 2a \Rightarrow a = 2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 4^n + 4 \cdot 4^n}{4^n + 4^n} = \frac{9}{2} \neq 3$$

iii) $a^2 < 2a \Rightarrow a = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5 + 2^{n+1}}{1 + 2^n} = 2$$

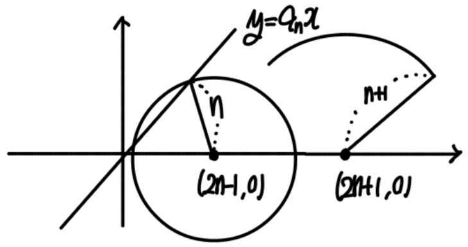
$\therefore 1 + 4 = 5$

27. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> 좌표평면에서 원점을 지나고 기울기가 a_n인 직선이 점 $(2n-1,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 n인 원과 서로 다른 두 점에서 만나고
> 점 $(2n+1,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $n+1$인 원과 만나지 않는다.

$\lim_{n\to\infty} n\left(3-\frac{1}{a_n^2}\right)$의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4



$$\frac{a_n(2n-1)}{\sqrt{a_n^2+1}} < n \quad \text{and} \quad \frac{a_n(2n+1)}{\sqrt{a_n^2+1}} > n+1$$

$$0 < \frac{n+1}{2n+1} < \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+1}} < \frac{n}{2n-1}$$

$$\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2 < \frac{a_n^2}{a_n^2+1} < \left(\frac{n}{2n-1}\right)^2$$

$$\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^2 < 1+\frac{1}{a_n^2} < \left(\frac{2n-1}{n}\right)^2$$

$$\left(2+\frac{-1}{n+1}\right)^2 < 1+\frac{1}{a_n^2} < \left(2-\frac{1}{n}\right)^2$$

$$4-\frac{4}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2} < 1+\frac{1}{a_n^2} < 4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}$$

$$-\frac{4}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2} < -3+\frac{1}{a_n^2} < -\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}$$

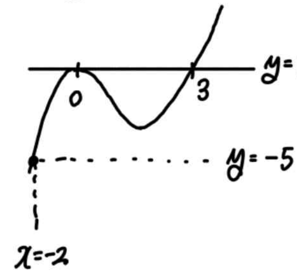
$$-\frac{4n}{n+1}+\frac{n}{(n+1)^2} < n\left(-3+\frac{1}{a_n^2}\right) < -4+\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{4n}{n+1}+\frac{n}{(n+1)^2}\right) = -4 \quad \lim_{n\to\infty}\left(-4+\frac{1}{n}\right) = -4$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n\left(-3+\frac{1}{a_n^2}\right) = -4$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(3-\frac{1}{a_n^2}\right) = 4$$

28. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+5$가 있다. $f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-3)+5$



두 자연수 p, q에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}px^2+\frac{1}{2}qx+5 & (x<0)\\ 5 & (x\geq 0)\end{cases}$$

이라 하자.

실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(f(x))^{2n+1}+5^{2n}\times g(x)}{(f(x))^{2n}+5^{2n}}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수가 7이다.

> 자연수 n에 대하여 직선 $y=\left(k-\frac{1}{2^n}\right)x+5$가 함수 $y=h(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n=4$이다. $\Rightarrow$ $h(x)=(k-\varepsilon)x+5$ (ε은 아주 작은 양수) 의 교점이 4개 $\Rightarrow$

$p+q+h(4)$의 값은? [4점]

① 38 ② 41 ③ 44 ④ 47 ⑤ 50

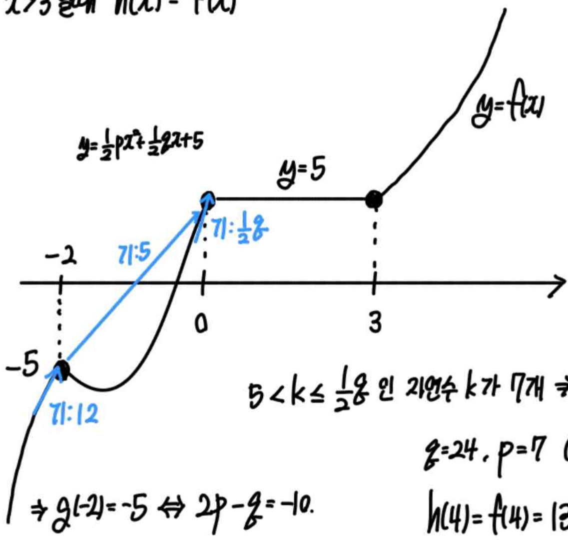
$x=0,3$일때 $f(x)=5$ $\lim_{n\to\infty}\frac{g(x)\times 5^{2n}+5^{2n+1}}{2\times 5^{2n}}=\frac{g(x)+5}{2}=h(x)$

$x=-2$일때 $f(x)=-5$ $h(x)=\frac{g(x)+5}{2}$

$x<-2$일때 $h(x)=f(x)$ $\Rightarrow$ $h(x)$는 연속.

$x\neq 0$, $-2<x<3$일때 $h(x)=g(x)$

$x>3$일때 $h(x)=f(x)$



$\Rightarrow g(-2)=-5 \Leftrightarrow 2p-q=-10.$

$5<k\leq\frac{1}{2}q$인 자연수 k가 7개 $\Rightarrow q=23,24$

$q=24$, $p=7$ ($\because$ p는 자연수)

$h(4)=f(4)=13$

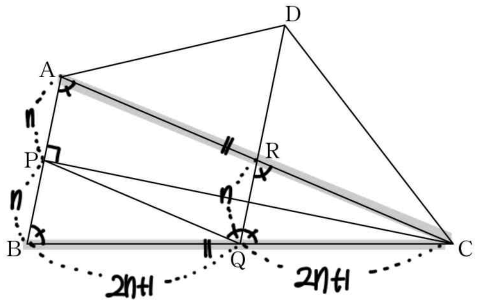
$\therefore p+q+h(4)=44$

단답형

29. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}=4n+2$인 사각형 ABCD가 있다. 선분 AB의 중점을 P, 선분 BC의 중점을 Q라 하고, 선분 DQ가 선분 AC와 만나는 점을 R이라 하자.

$\angle\mathrm{CAB}=\angle\mathrm{PQR},\quad \overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{15n^2+16n+4},\quad \overline{\mathrm{DR}}:\overline{\mathrm{DC}}=1:2$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\overline{\mathrm{DR}}-\frac{4}{3}n\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$\overline{AP}=\overline{PB}$ 이고 $\triangle ABC$가 이등변삼각형이므로 $\overline{AB}\perp\overline{PC}$

$\triangle PBC$는 직각삼각형

$\overline{PB}^2=(4n+2)^2-(\sqrt{15n^2+16n+4})^2=n^2$

$\therefore \overline{PB}=n$

$\angle PBC=\theta,\ \cos\theta=\frac{n}{4n+2}$

$\triangle ABC$와 $\triangle CRQ$는 $\overline{QC}:\overline{BC}=1:2$이고 $\angle CQR=\angle CBA$, $\angle CRQ=\angle CAB$ 이므로 $1:2$ 닮음이다. $\Rightarrow \overline{AB}:\overline{RQ}=2:1$

$\therefore \overline{RQ}=n$

$\overline{DR}=k$라 두면, $\overline{DC}=2k$ ($\because \overline{DR}:\overline{DC}=1:2$)

$\triangle DQC$에서 코사인법칙을 적용하면,

$$\frac{n}{4n+2}=\frac{5n^2+4n+2nk-3k^2+1}{2\times(2n+1)\times(n+k)}$$

k에 대한 내림차순으로 정리하면, $3k^2-nk-4n^2-4n-1=0$

k에 대하여 근의공식을 적용하면,

$$k=\frac{n+\sqrt{49n^2+48n+12}}{6}=\overline{DR}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\overline{DR}-\frac{4}{3}n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{49n^2+48n+12}-7n}{6}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{48n+12}{6(\sqrt{49n^2+48n+12}+7n)}=\frac{4}{7}$$

$\therefore p+q=11.$

30. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. (단, k는 20 이하의 자연수이다.) [4점]

> 두 정수 a, b에 대하여
>
> $\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n$의 값과 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n$의 값이 모두 존재하며
>
> $\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n$이 되도록 하는 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 19이다.

i) $a=0$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2b-20}{k}\right|^n=0 \Rightarrow \left|\frac{2b-20}{k}\right|<1$

$\Rightarrow |2b-20|<k$ 인 b의 개수

ii) $a\neq0$

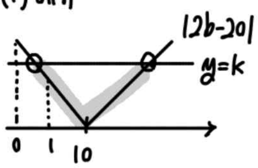
$a+b=0$ or 1

$a+b=0$ 이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{20}{k}\right)^n=0 \Rightarrow k>20$ (k는 20이하의 자연수) (x)

$a+b=1$ 이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{18}{k}\right)^n=|a| \Rightarrow k=18$ ($\because a\neq0$)

$\Rightarrow a=\pm1$

(i)에서



$k\neq18$일때, 색칠된 부분을 만족하는 정수 b의 개수가 19개.

$18<k\leq20 \quad \therefore k=19$ or 20

$k=18$일때, 색칠된 부분을 만족하는 정수 b의 개수가 17개

(ii)에서 $(1,0)$ $(-1,2)$ 순서쌍 2개이므로 $17+2=19$ (O)

$\therefore k=18,19,20 \Rightarrow 57.$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.