제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $4^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

$2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$

2. 함수 $f(x) = 2x^2 + x + 2$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 4x+1 \quad f'(1) = 5$

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2, \quad 2a_2 + a_7 = 30$$

일 때, a_{10}의 값은? [3점]

① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

$2(2+d) + (2+6d) = 30$

$\Rightarrow 8d = 24 \quad \therefore d = 3$

$a_{10} = 2 + 3 \times 9 = 29$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & (x < 2) \\ 3x & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$4a - 2 = 6 \quad \therefore a = 2$

5. 함수 $f(x)=(x+1)(2x^2-5x+1)$에 대하여 $f'(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$f'(x)=(2x^2-5x+1)+(x+1)(4x-5)$

$f'(2)=(8-10+1)+3(8-5)=(-1)+9=8$

6. 두 양수 a, b가

$$\log_3 a^2=4,\quad \log_9 ab=\frac{5}{2}$$

를 만족시킬 때, $\frac{b}{a}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$2\log_3 a=4 \Rightarrow a=9$

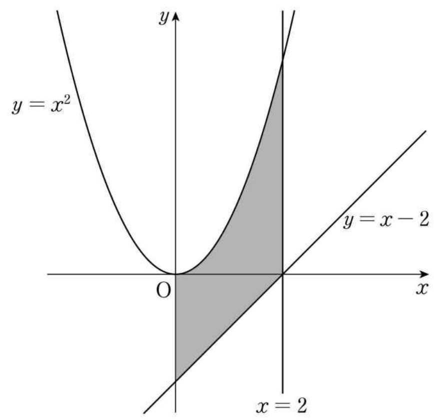
$\log_9 ab=\frac{1}{2}\log_3 ab=\frac{5}{2}$

$\Rightarrow \log_3 ab=5 \Rightarrow b=3^3$

$\therefore \frac{b}{a}=3$

7. 곡선 $y=x^2$과 y축 및 두 직선 $y=x-2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5



$\int_0^2 x^2-(x-2)\,dx=\int_0^2 x^2-x+2\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2=$

$\frac{8}{3}-2+4=2+\frac{8}{3}=\frac{14}{3}$

8. $\cos\theta = 4\sin\theta$ 이고 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)<0$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{4\sqrt{17}}{17}$ ② $-\frac{\sqrt{17}}{17}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{17}}{17}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{17}}{17}$

$a\cos\theta = b\sin\theta$, $\cos\theta<0 \Rightarrow$ 제1,3,4분면

$\Rightarrow |\cos\theta| = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\Rightarrow \cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{17}}$

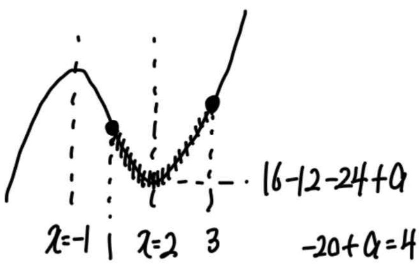
$(a=1, b=4)$

9. 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 함수 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+a$ 가 최댓값 M, 최솟값 4를 가질 때, M 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [4점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

$f'(x) = 6x^2-6x-12$

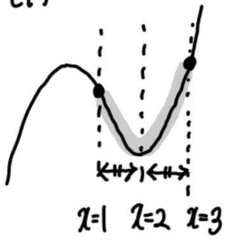
$= 6(x-2)(x+1)$



$-20+a=4$

$a=24$.

cf)



$f(3) = 54-27-36+24 = 78-63 = 15$

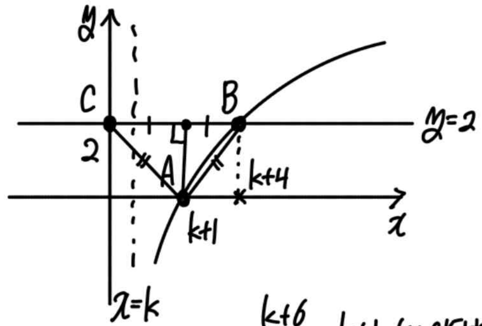
$f(1) = -13+24 = 11$ $\therefore f(3) > f(1)$

$\therefore M=15$

극소로부터 등간격에 있는 값들 중 증가구간에 있는 값이 감소구간에 있는 값보다 높이 있음!.

10. 양수 k 에 대하여 곡선 $y=\log_2(x-k)$ 가 x 축과 만나는 점을 A라 하자. 직선 $y=2$ 가 곡선 $y=\log_2(x-k)$ 와 만나는 점을 B, y 축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=\overline{AC}$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12



$\frac{k+6}{2} = k+1$ (∵ 이등변 삼각형 성질)

$2k+2 = k+6$ $\therefore k=4$.

$\overline{BC}=8$, 높이$=2$

$\triangle ABC$의 넓이 $= 8\times2\times\frac{1}{2} = 8$.

11. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t\,(t \ge 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-24t+36$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

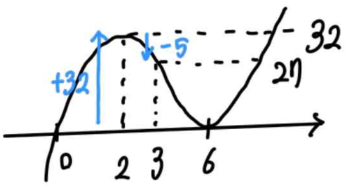
< 보 기 >

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 25이다.
ㄴ. 출발한 후 점 P의 운동 방향은 두 번 바뀐다.
ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는 37이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$x(t)=t^3-12t^2+36t$
$=t(t-6)^2$

ㄱ. $x(1)=25$ (o)
ㄴ. $v(t)=3(t^2-8t+12)=3(t-2)(t-6)$
$t=2$ and 6 (o)
ㄷ.



이동거리: $|32|+|-5|=37$. (o)

12. $a_1=3$, $a_2=10$인 수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 등비수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k+1}=n^2+n$$

을 만족시킨다. 다음은 $\sum_{n=1}^{5}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하는 과정이다.

$n=1$일 때, $\frac{a_1}{b_1+1}=2$에서 $b_1=\frac{1}{2}$이다.

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{a_n}{b_n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k+1}$이므로

$\frac{a_n}{b_n+1}=\boxed{\text{(가)}}\times n$ …… ㉠ 2 $(\because (n^2+n)-(n^2-2n+1+n-1)=2n)$

이다.

$n=1$일 때도 ㉠이 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{a_n}{n}=\boxed{\text{(가)}}\times(b_n+1)$ …… ㉡ 2 $n=2$ $\frac{a_2}{2}=2\times(b_2+1)$

이다. $\Rightarrow b_2=\frac{3}{2}$ $(\because a_2=10)$

그러므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비는 $\boxed{\text{(나)}}$이다. 3

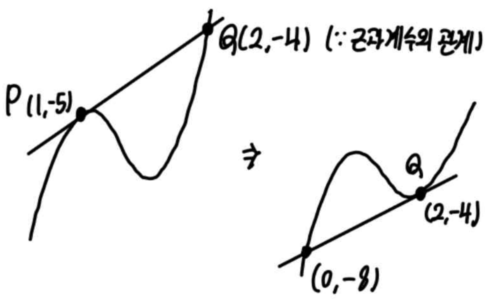
따라서 ㉡에 의하여 $\sum_{n=1}^{5}\frac{a_n}{n}=\boxed{\text{(다)}}$이다. 131 $2\sum_{n=1}^{5}(b_n+1)=2\left(\frac{\frac{1}{2}(3^5-1)}{3-1}+5\right)$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점] $=\frac{242}{2}+10=131$

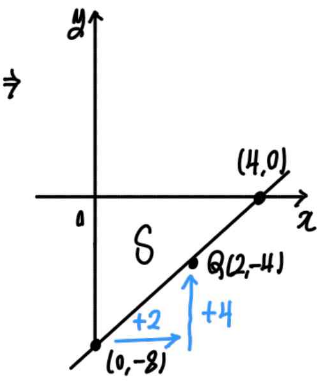
① 136 ② 137 ③ 138 ④ 139 ⑤ 140

13. 함수 $f(x)=x^3-4x^2+6x-8$에 대하여
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ -5)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16



→



$S=4\times8\times\frac{1}{2}=16.$

14. 두 상수 $a\,(a\neq0)$, b에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}3\sin x & (0\le x<\pi)\\ a\cos x+b & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

가 있다. $0\le t\le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되도록 하는 서로 다른 모든 실수 t의 개수가 4일 때, a^2+b^2의 값은? [4점]

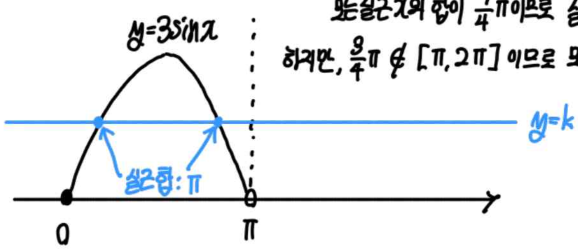
① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ 7 ④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

$f(t)=k$라 하자. $f(x)=k$의 모든 실근의 합: $\frac{7}{4}\pi$
인 t가 4개이다.

KEY POINT: $[0,\pi)$에서 $3\sin x$는 상수함수와 교점 2개 이상 가질 수 있음.
$[\pi,2\pi]$에서 $a\cos x+b$는 단조증가 or 감소이므로 상수함수와 교점 1개 이상 가질 수 없음.

∴ $f(t)=k_1$, $f(t)=k_2$의 교점의 개수를 각각 m,n이라 할 때,
순서쌍 (m,n)은 $(3,1)$ $(2,2)$ $(1,3)$ 뿐이다!

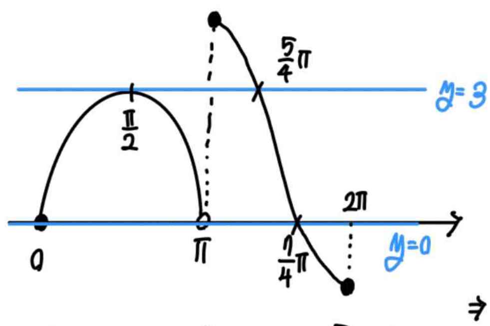
$f(t)=k$의 교점의 개수가 3개이려면 $[0,\pi)$에서 2개의 교점을 가져야함.



모든실근 x의 합이 $\frac{7}{4}\pi$이므로 실근이 $\frac{3}{4}\pi$ 하자면, $\frac{3}{4}\pi\notin[\pi,2\pi]$이므로 모순!

∴ $(2,2)$일 때가 답 Case!

$[0,\pi)$에서 1개 & $[\pi,2\pi]$에서 1개.
이고 $f(x)=f(t)$를 만족시키는 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$임을 고려하면,



$(\frac{5}{4}\pi,3)$ and $(\frac{7}{4}\pi,0)$ → $-\frac{\sqrt{2}}{2}a+b=3$
$\frac{\sqrt{2}}{2}a+b=0$

→ $a=-\frac{3}{\sqrt{2}}$, $b=\frac{3}{2}$

∴ $a^2+b^2=\frac{27}{4}$

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} -xf(x)-ax^2 & (x \le 0) \\ \frac{1}{4}f(x)-bx^2 & (x>0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

(가) 집합 $\{x \mid g(x)=-27\}$의 원소의 개수는 2이다.
(나) $\{x \mid g(x)=-27\} \subset \{x \mid g'(x)=0\}$

① $\frac{85}{4}$ ② $\frac{87}{4}$ ③ $\frac{89}{4}$ ④ $\frac{91}{4}$ ⑤ $\frac{93}{4}$

$g(0)=0=\frac{1}{4}f(0)$ $\therefore f(0)=0$

$g'(x)=\begin{cases} -f(x)-xf'(x)-2ax & (x\le 0) \\ \frac{1}{4}f'(x)-2bx & (x>0) \end{cases}$

$g'(0)=0=\frac{1}{4}f'(0)$ $\therefore f'(0)=0$

$\Rightarrow f(x)=x^2(x-c)$

$g(x)=\begin{cases} x^2(-x^2+cx-a) & (x\le 0) \\ x^2(\frac{1}{4}x-\frac{c}{4}-b) & (x>0) \end{cases}$ … (♥)

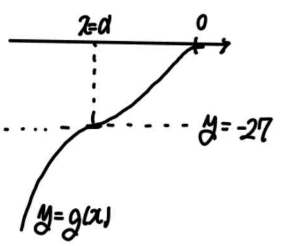
$h(x)=g(x)+27$ 이라하자. $\lim_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$ 이고 $h(0)=27$이므로

$x=d$에서 $h(x)$가 부호가 바뀌는 점 존재. $\Rightarrow g(d)=-27$

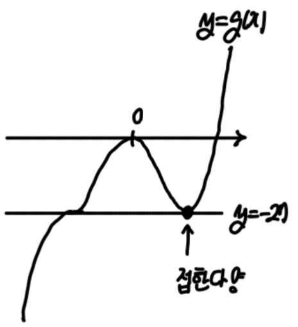
(나)에 의해서 $g(x)=-27$ 이면 $g'(x)=0$ 이므로 $g'(d)=0$.

$h(x)$의 부호변화와 $g'(d)=0$을 모두 만족시키기 위해

$x<0$ 에서 $g(x)$는 다음과 같고 실근을 1개 갖는다.



$\Rightarrow$ $x>0$ 에서 $g(x)=-27$ 실근 1개!!



$g(x)=\begin{cases} -(x+3)^3(x-1)-27 & (x\le 0) \\ \frac{1}{4}x^2(x-9) & (x>0) \end{cases}$ ($\because$ 비율관계)

by (♥)

$=x^2(\frac{1}{4}x-\frac{9}{4})$ $\therefore \frac{4b+c}{4}=\frac{9}{4}$ ($\because$ 계수비교)

$g(-1)=-11=-a-c-1$ $a+c=10$

$g(-2)=-24=4(-4-2c-a)$ $-4-2c-a=-6$

$\Rightarrow a+2c=2$

($\because$ 수치대입) $\therefore a=18, b=\frac{17}{4}, c=-8$

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_n^2-3n$$

을 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

$a_2=a_1^2-3=(3)^2-3=6$

$a_3=(a_2)^2-6=36-6=30$

$\therefore 30$

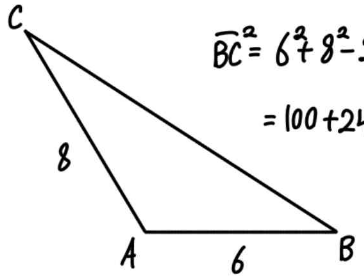
17. 함수 $f(x)=4x^3-3x^2+2$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(1)=5$일 때, $F(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\int_1^2 f(x)\,dx=[x^4-x^3+2x]_1^2$

$=12-2=F(2)-F(1)$

$\therefore F(2)-5=10 \Rightarrow F(2)=15.$

18. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$이고 $\cos A=-\frac{1}{4}$일 때, $\overline{BC}^2$의 값을 구하시오. [3점]



$\overline{BC}^2 = 6^2+8^2-2\times8\times6\times(-\frac{1}{4})$

$=100+24=124$

$\therefore 124$

19. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+ax+b$는 $x=1$에서 극대이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 5일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

$f'(x)=3x^2-12x+a$

$f'(1)=-9+a=0 \quad \therefore a=9$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f(3)=27-54+27+b=5$

$\therefore b=5.$

$\therefore a+b=14$

20. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\begin{cases} n & (n\text{이 5의 배수가 아닌 경우}) \\ -4n+10 & (n\text{이 5의 배수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $20 \le \sum_{k=1}^{m} a_k < 30$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

a_{5p-4} a_{5p-3} a_{5p-2} a_{5p-1} a_{5p} (p는 자연수)

$5p-4$ $5p-3$ $5p-2$ $5p-1$ $10-20p$

이고 $\sum_{n=1}^{5p} a_n=0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{5p-4} a_n=5p-4$, $\sum_{n=1}^{5p-3} a_n=10p-7$,

$\sum_{n=1}^{5p-2} a_n=15p-9$, $\sum_{n=1}^{5p-1} a_n=20p-10$

$20<5p-4<30 \Rightarrow p=5,6 \quad m=21,26$

$20<10p-7<30 \Rightarrow p=3 \quad m=12$

$20<15p-9<30 \Rightarrow p=2 \quad m=8$

$20<20p-10<30$ p존재x.

m의 합 : 67

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

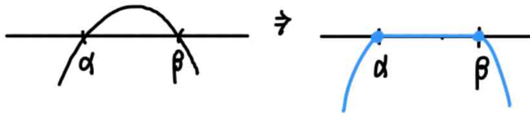
$$g(x)=\int_0^x (f(t)-|f(t)|)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $x \ge k$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=0$을 만족시키는 실수 k의 최솟값이 2이다.
> (나) $g(2)=-8$

$$g'(x)=f(x)-|f(x)|=\begin{cases}0 & (f(x)\ge 0)\\ 2f(x) & (f(x)<0)\end{cases} \Rightarrow g'(x)\le 0$$

$f(\alpha)=f(\beta)=0$ 이고 다음과 같은 상황일때,



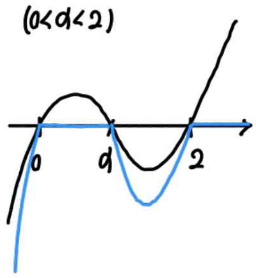
이다.

(가)에 의해 $x\ge k$ 에서 $g'(x)=0$ 인 k의 최소가 2이다.

$\Rightarrow$ $x\ge k$ 에서 $f(x)\ge 0$ 이고 그러한 k의 최소가 2이므로 $f(2)=0$ 이고 $x\ge 2$ 인 모든 실수 x에 대해 $f(x)\ge 0$.

and $x<2$ 에서는 $f(x)<0$ 인 구간 존재. $g(2)=\int_0^2 f(t)-|f(t)|\,dt=8$

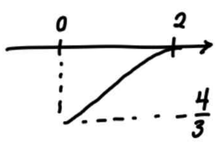
$(0<\alpha<2)$



$$\int_\alpha^2 x(x-\alpha)(x-2)\,dx$$

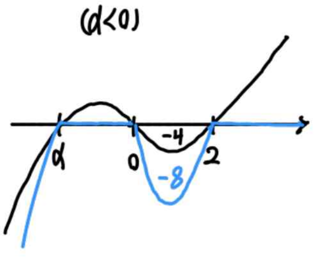
$$=\int_\alpha^2 (x-\alpha)(x-2)\left(x-\frac{\alpha+2}{2}\right)+\frac{\alpha+2}{2}(x-\alpha)(x-2)\,dx$$

$$=\frac{\alpha+2}{2}\cdot\frac{(\alpha-2)^3}{6}=\frac{1}{12}(\alpha+2)(\alpha-2)^3$$



$\Rightarrow -\frac{8}{3}<g(2)<0$

$(\alpha<0)$



$$\int_0^2 (x-\alpha)x(x-2)\,dx$$

$$\int_0^2 x^2(x-2)-\alpha x(x-2)\,dx$$

$$=\frac{-(2-0)^4}{12}+\alpha\cdot\frac{2^3}{6}=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\alpha=-4$$

$\therefore \alpha=-2$

$f(x)=x(x^2-4)$, $f(4)=48$ $\therefore 48$

22. 자연수 k에 대하여 두 함수

$$f(x)=2^x,\ g(x)=2\times 4^x+\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

이 있다. 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B 사이의 거리가 $\frac{1}{5}$이 되도록 하는 실수 t의 개수가 2이고 이 두 실수의 합을 p라 할 때, $k\times\left(\frac{1}{2}\right)^p$의 값을 구하시오. [4점]

자연수 k에 대하여

거리: $|2^{2x+1}-2^x+2^{-k}|=\frac{1}{5}$ 의 실근이 2개

$2^x=X$ 로 치환하면 $(X>0)$

$2X^2-X+2^{-k}+\frac{1}{5}=0$ (1) 이거나 $2X^2-X+2^{-k}-\frac{1}{5}=0$ (2)

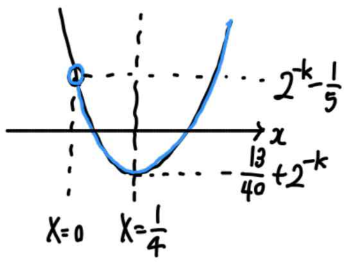
의 실근의 개수가 2이다.

(1) 에서 판별식을 사용하면

$D=1-8(2^{-k}+\frac{1}{5})=-\frac{3}{5}-2^{-k+3}<0$

실근이 존재하지 않음.

$\Rightarrow$ (2) 에서 실근이 2개 이고 $y=2X^2-X+2^{-k}-\frac{1}{5}$ 과 $y=0$ 의 교점을 관찰하면, x축의 위치가



$(2^{-k}-\frac{1}{5})(2^{-k}-\frac{13}{40})<0$

$\frac{1}{5}<2^{-k}<\frac{13}{40}$

$\therefore k=2$

$\downarrow$

$2\cdot 2^{2x}-2^x+2^{-2}=\frac{1}{5}$ 의 두 실근의 합

$2^{\alpha+\beta}=\frac{1}{40} \Rightarrow \alpha+\beta=-\log_2 40$

$\therefore 2\times 40=80.$

* 확인 사항
  - ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
  - ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.