제 2 교시

수학 영역

5 지 선 다 형

1. $4^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

$\frac{4}{3}-\frac{1}{3}$

2. 함수 $f(x)=2x^2+x+2$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

4 1

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=2, \quad 2a_2+a_7=30$$

일 때, a_{10}의 값은? [3점]

2 6

① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

$3a_1+8d=30, d=3$

6

24

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2 & (x<2) \\ 3x & (x\geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$4a=8$

5. 함수 $f(x)=(x+1)(2x^2-5x+1)$ 에 대하여 $f'(2)$ 의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$(2x^2-5x+1)+(x+1)(4x-5)$

$8-10+1$

$-1+3\cdot3$

6. 두 양수 a, b 가

$$\log_3 a^2=4,\quad \log_9 ab=\frac{5}{2}$$

를 만족시킬 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$a=9$

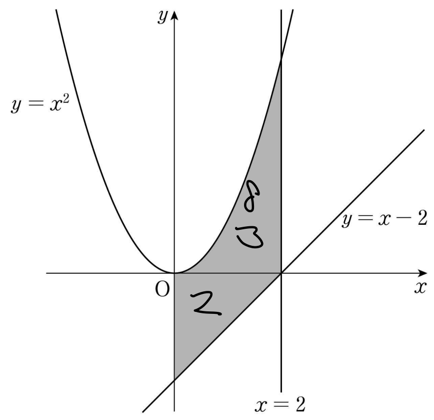
$9^{\frac{5}{2}}=ab$

$3^5=3^2b$

$b=3^3$

7. 곡선 $y=x^2$ 과 y 축 및 두 직선 $y=x-2$, $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5



cos<0

8. $\cos\theta = 4\sin\theta$ 이고 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) < 0$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$ ② $-\dfrac{\sqrt{17}}{17}$ ③ 0

④ $\dfrac{\sqrt{17}}{17}$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$

9. 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 함수 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + a$ 가 최댓값 M, 최솟값 4를 가질 때, M의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

(x+1)(x-2)

-1 2

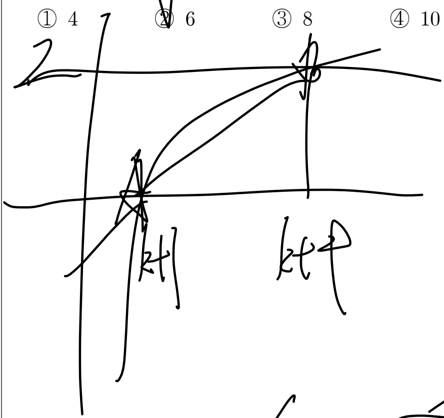
16-12-24+a=4, a=24

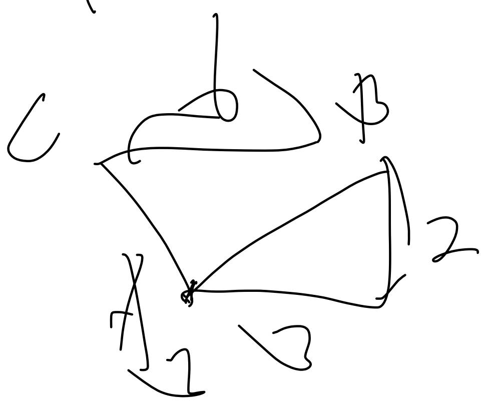
54-27-36+24 15

27 0

10. 양수 k에 대하여 곡선 $y = \log_2(x-k)$ 가 x축과 만나는 점을 A라 하자. 직선 $y=2$가 곡선 $y = \log_2(x-k)$ 와 만나는 점을 B, y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB} = \overline{AC}$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12





k=2

11. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 $t\,(t \geq 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-24t+36$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 25이다.
ㄴ. 출발한 후 점 P의 운동 방향은 두 번 바뀐다.
ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는 37이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$x(t)=t^3-12t^2+36t+0$
$x(1)=1-12+36=25$

$t^2-8t+12$
$(t-6)(t-2)$

$x(2)=8-48+72=32$
$x(3)=27-108+108=27$

$32+5$

12. $a_1=3,\ a_2=10$인 수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 등비수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k+1}=n^2+n \quad n(n+1)$$

을 만족시킨다. 다음은 $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하는 과정이다.

> $n=1$일 때, $\dfrac{a_1}{b_1+1}=2$에서 $b_1=\dfrac{1}{2}$이다.
>
> 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여
>
> $\dfrac{a_n}{b_n+1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_k+1}$이므로
>
> $\dfrac{a_n}{b_n+1}=\boxed{(가)}\ 2 \times n$ ⋯⋯ ㉠
>
> 이다. $n(n+1)-(n-1)n=2n$
>
> $n=1$일 때도 ㉠이 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여
>
> $\dfrac{a_n}{n}=\boxed{(가)}\ 2 \times(b_n+1)$ ⋯⋯ ㉡
>
> 이다.
>
> 그러므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비는 3 $\boxed{(나)}$이다.
>
> 따라서 ㉡에 의하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\frac{a_n}{n}=\boxed{(다)}$이다.

$2b_n+2$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 $p,\ q,\ r$이라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 136 ② 137 ③ 138 ④ 139 ⑤ 140

$\frac{a_1}{1}=2(b_1+1),\ b_1=\frac{1}{2}$

$\frac{a_2}{2}=2(b_2+1),\ b_2=\frac{3}{2}$

$\cancel{2}\,\frac{\frac{1}{2}(3^5-1)}{3-1}+10$

$\frac{242}{2}+10=131$

13. 함수 $f(x)=x^3-4x^2+6x-8$에 대하여
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ -5)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

$y=(x-1)-5 \quad x-6$

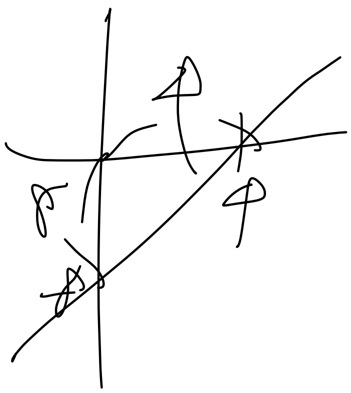
$x^3-4x^2+6x-8=x-6$

$x^3-4x^2+5x-2=0$

$(x-1)(x^2-3x+2)$

$(x-1)^2(x-2) \quad Q(2,-4)$

$y=2(x-2)-4=2x-8$

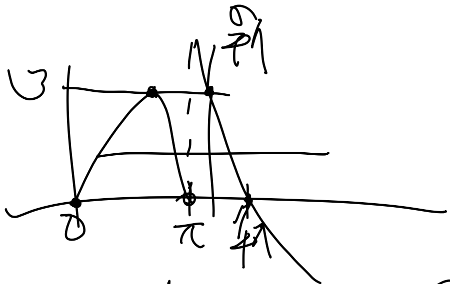


14. 두 상수 $a\,(a\neq 0)$, b에 대하여 닫힌구간 $[0,\,2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}3\sin x & (0\le x<\pi)\\ a\cos x+b & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

가 있다. $0\le t\le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$를 만족시키는 모든 x의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$가 되도록 하는 서로 다른 모든 실수 t의 개수가 4일 때, a^2+b^2의 값은? [4점]

① $\frac{13}{2}$　② $\frac{27}{4}$　③ 7　④ $\frac{29}{4}$　⑤ $\frac{15}{2}$



$0=a\cdot -\frac{1}{\sqrt{2}}+b$, $a=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$3=\frac{a}{\sqrt{2}}+b$　$b=-\frac{3}{2}$

$\frac{9}{2}+\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} -xf(x)-ax^2 & (x\le 0) \\ \frac{1}{4}f(x)-bx^2 & (x>0) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

(가) 집합 $\{x \mid g(x)=-27\}$의 원소의 개수는 2이다.
(나) $\{x \mid g(x)=-27\} \subset \{x \mid g'(x)=0\}$

① $\frac{85}{4}$ ② $\frac{87}{4}$ ③ $\frac{89}{4}$ ④ $\frac{91}{4}$ ⑤ $\frac{93}{4}$

단답형

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_n^2-3n$$

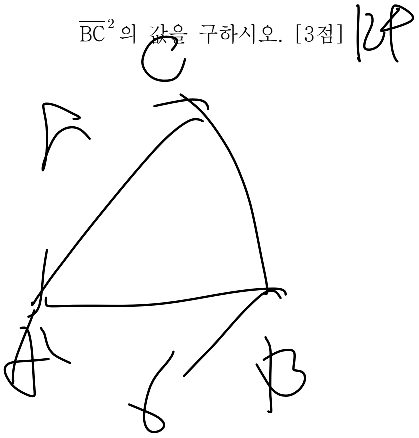
을 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점] 30

$a_2=9-3=6$

$a_3=36-6$

17. 함수 $f(x)=4x^3-3x^2+2$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(1)=5$일 때, $F(2)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=8$이고 $\cos A=-\frac{1}{4}$일 때, $\overline{BC}^2$의 값을 구하시오. [3점] 124



$\overline{BC}^2=36+64+2\cdot 8\cdot 6\cdot \frac{1}{4}$

$100+24$

19. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+ax+b$는 $x=1$에서 극대이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 5일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점] 14

$f'(1)=3-12+a$, $a=9$

x^2-4x+3

$f(3)=27-54+27+b=0$

20. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\begin{cases} n & (n\text{이 5의 배수가 아닌 경우}) \\ -4n+10 & (n\text{이 5의 배수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $20 \le \sum_{k=1}^{m} a_k < 30$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점] 67

$a_1=1$

$a_2=2$ 3

$a_3=3$ 6

$a_4=4$ 10

$a_5=-10$ 0

$a_6=6$ 6

$a_7=7$ 13

$a_8=8$ 21

$a_9=9$ 30

$a_{10}=-30$ 0

$a_{11}=11$ 11

$a_{12}=12$ 23

$a_{15}=-50$ 0

$a_{16}=16$ 16

a_{20} 0

a_{21} 21

a_{25} 0

a_{26} 26

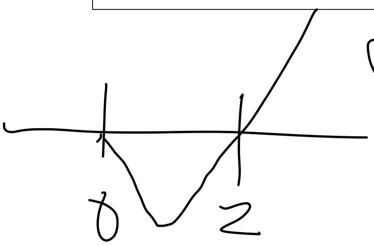
$8+12+21+26=67$

21. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x (f(t)-|f(t)|)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점] 48

> (가) $x \ge k$인 모든 실수 x에 대하여
> $g'(x)=0$을 만족시키는 실수 k의 최솟값이 2이다.
> (나) $g(2)=-8$



$f(x)=x(x-2)(x-a)$

$=x^3-(a+2)x^2+2ax$

$-4=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2\Big|_0^2$

$-4=4-\frac{8}{3}(a+2)+4a$

$-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}a,\ a=-2$

$f(x)=x(x^2-4)$

$f(4)=4(12)=48$

22. 자연수 k에 대하여 두 함수

$$f(x)=2^x,\ g(x)=2\times 4^x+\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad 2^{2x+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

이 있다. 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B 사이의 거리가 $\frac{1}{5}$이 되도록 하는 실수 t의 개수가 2이고 이 두 실수의 합을 p라 할 때, $k\times\left(\frac{1}{2}\right)^p$의 값을 구하시오. [4점] 8

$A(\alpha, 2^\alpha)$ $B(\alpha, 2^{2\alpha+1}+(\frac{1}{2})^k)$

$|2\cdot 2^{2\alpha}-2^\alpha+(\frac{1}{2})^k|,\ 2^\alpha=w$

$|2w^2-w+(\frac{1}{2})^k|$

$D=1-4\cdot 2\times(\frac{1}{2})^k\ldots \to \frac{1}{8}>(\frac{1}{2})^k\ldots$

$k=2$

$2^\alpha+2^\beta=\frac{1}{2}$

$2^\alpha\cdot 2^\beta=\frac{1}{8},\ p=\alpha+\beta$

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(12n+1)}{4n^3-1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(3n+2)a_n=6,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=2$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{2}{n}\cdot 2n$

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sqrt{n+2}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, a_n$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$

26. 자연수 a에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5a^{2n} + (2a)^{n+1}}{a^{2n} + (2a)^n} = a+1$$

을 만족시키는 모든 자연수 a의 값의 합은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$a>1$ $5 = a+1$ $a=4$

$a=2$ $\frac{5\cdot 4^n + 4^{n+1}}{4^n + 4^n} = 3$ X

$a=1$ $\frac{2\cdot 2^n}{2^n} = 2$ O

$-1<2a<1$ $2=a+1$ X

$-2<2a<2$

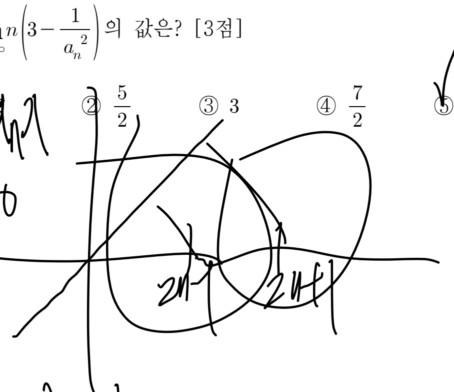
27. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> 좌표평면에서 원점을 지나고 기울기가 a_n인 직선이 점 $(2n-1, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 n인 원과 서로 다른 두 점에서 만나고 점 $(2n+1, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $n+1$인 원과 만나지 않는다.

$\lim_{n\to\infty} n\left(3-\frac{1}{a_n^2}\right)$의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

$a_n x - y = 0$



$$\frac{|(2n-1)a_n|}{\sqrt{1+a_n^2}} < n$$

$$\frac{|(2n+1)a_n|}{\sqrt{1+a_n^2}} > n+1$$

$$\frac{(4n^2-4n+1)a_n^2}{1+a_n^2} < n^2$$

$$\frac{(3n^2-4n+1)}{n^2} < \frac{1}{a_n^2} < \frac{3n^2+2n}{(n+1)^2}$$

$$\frac{(4n^2+4n+1)a_n^2}{1+a_n^2} > n^2+2n+1 \rightarrow \frac{3n^2+2n}{n^2+2n+1} > \frac{1}{a_n^2}$$

$$\frac{-4n}{n^2} < 3 + \frac{1}{a_n^2} < \frac{2n}{\ }$$

28. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+5$가 있다.

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x = \frac{3}{2}x(x-2)$

두 자연수 p, q에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}px^2+\frac{1}{2}qx+5 & (x<0)\\ 5 & (x\geq 0)\end{cases}$$

이라 하자.

실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(f(x))^{2n+1}+5^{2n}\times g(x)}{(f(x))^{2n}+5^{2n}}$$

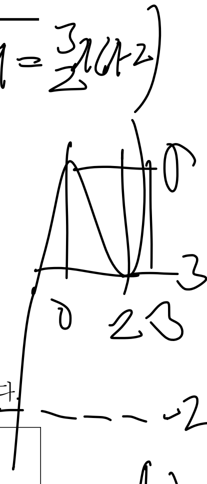
에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수가 7이다.

> 자연수 n에 대하여 직선 $y=\left(k-\frac{1}{2^n}\right)x+5$가 함수 $y=h(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n=4$이다.

$7+24+13$

$p+q+h(4)$의 값은? [4점]

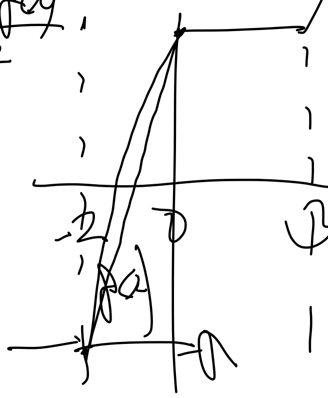
① 38 ② 41 ③ 44 ④ 47 ⑤ 50



$|f(x)|=5 \quad h(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}$

$|f(x)|<5 \quad h(x)=g(x)$

$|f(x)|>5 \quad h(x)=f(x)$



$0 < k-\frac{1}{2^n} \leq \frac{q}{2}$

$q = 24$ or 26

$2p-q+10=0 \rightarrow p=\frac{q-10}{2}=7$

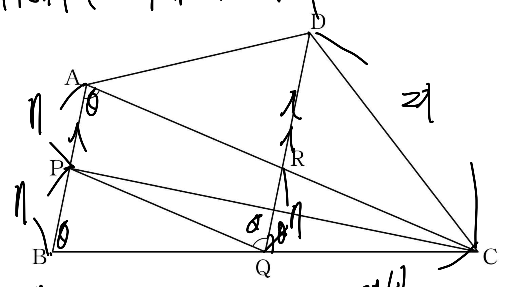
$h(4)=f(4)=32-24+5=13$

단답형

29. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}=4n+2$인 사각형 ABCD가 있다. 선분 AB의 중점을 P, 선분 BC의 중점을 Q라 하고, 선분 DQ가 선분 AC와 만나는 점을 R이라 하자.

$$\angle\mathrm{CAB}=\angle\mathrm{PQR},\quad \overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{15n^2+16n+4},\quad \overline{\mathrm{DR}}:\overline{\mathrm{DC}}=1:2$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\overline{\mathrm{DR}}-\frac{4}{3}n\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$\cos\theta=\frac{n}{4n+2}$

30. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. (단, k는 20 이하의 자연수이다.) [4점]

두 정수 a, b에 대하여

$\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n$의 값과 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n$의 값이 모두 존재하며

$\lim_{n\to\infty}|a|(a+b)^n=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2a+2b-20}{k}\right|^n$이 되도록 하는 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 19이다.

$18+19+20=57$

* 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.