14 26년 3월 모의고사

INstruction

$0 \le x < \pi$ 에서의 개형은 확정되어 있다는 점에 주목하자. 개형을 관찰하면 $0 < f(t) < 3$ 인 부분은 관심을 가질 필요가 없다는 것을 발견할 수 있었을 것이다. $\pi \le x \le 2\pi$ 인 부분에서 발생하는 실근을 더해준다는 느낌으로 접근하면 보다 수월했을 것이다.

CheckpoINt

정답: ②

해설

step1 x 에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 서로 다른 실근의 합이 $\frac{7}{4}\pi$ 인 상황 찾기

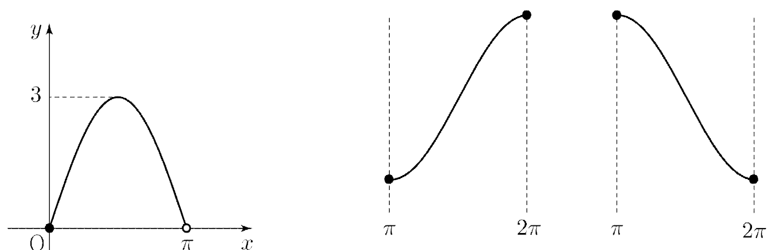
주어진 함수 $f(x)$ 의 식으로부터,

$0 \le x < \pi$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 그래프를 알 수 있고,

$\pi \le x \le 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 가 증가하거나 혹은 감소한다

는 사실을 알 수 있다.

a 가 양수인 경우 $\pi \le x \le 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가하고,
a 가 음수인 경우 $\pi \le x \le 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소한다.
즉, $\pi \le x \le 2\pi$ 에서
방정식 $f(x)=f(t)$ 의 실근은 존재하지 않거나, 오직 1 개 뿐이다.



$a>0$ 인 경우 $\quad$ $a<0$ 인 경우

$0 \le x < \pi$ 에서 $f(x)$ $\quad$ $\pi \le x \le 2\pi$ 에서 $f(x)$

$f(t)$ 의 값에 따라 각 구간에서 ($0 \le x < \pi$, $\pi \le x \le 2\pi$)

x 에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 서로 다른 모든 실근의 합이 $\frac{7}{4}\pi$ 가 되는 상황을 찾아보자.

x 에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$ 에서,
$f(t)$ 의 값은 상수이다.

1) $f(t)=3$ 인 경우

$0 \le x < \pi$ 에서 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 서로 다른 모든 실근의 합은 $\frac{\pi}{2}$ 이므로,

$\pi \le x \le 2\pi$ 에서 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 실근이 $\frac{5}{4}\pi$ 이어야 한다.

2) $0 < f(t) < 3$ 인 경우

$0 \le x < \pi$ 에서 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 서로 다른 모든 실근의 합은 π 이므로,

$\pi \le x \le 2\pi$ 에서 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 실근이 $\frac{3}{4}\pi$ 이어야 하는데,

이는 불가능하다.

3) $f(t) \le 0$ 이거나 $f(t) > 3$ 인 경우

$0 \le x < \pi$ 에서 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 서로 다른 모든 실근의 합은 0 이므로,

$\pi \le x \le 2\pi$ 에서 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 실근이 $\frac{7}{4}\pi$ 이어야 한다.

이는 $0 \le x < \pi$ 에서 방정식의 실근이
$x=0$ 의 오직 1 개인 경우와,
실근이 존재하지 않는 경우를
모두 포함하고 있다.

step2 조건을 만족하는 t 의 개수가 4 개인 상황 찾기

방정식 $f(x)=f(t)$ 를 만족시키는 모든 x 의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$ 가 되도록 하는 t 의 개수가 4 개인 상황을 찾아보자.

1) $f(t)=3$ 인 경우

$\pi \le x \le 2\pi$ 에서 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 실근 중 $x=\frac{5}{4}\pi$ 가 존재한다면,

방정식 $f(x)=f(t)$ 를 만족시키는 모든 x 의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$ 가 되도록 하는 t 는

$t=\frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{4}\pi$ 의 2 개다.

3) $f(t)\le 0$ 이거나 $f(t)>3$ 인 경우

$\pi \le x \le 2\pi$ 에서 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 실근 중 $\frac{7}{4}\pi$ 가 존재한다면,

방정식 $f(x)=f(t)$ 를 만족시키는 모든 x 의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$ 가 되도록 하는 t 는

$t=0$, $\frac{7}{4}\pi$ 의 2 개 또는 $t=\frac{7}{4}\pi$ 의 1 개다.

따라서 방정식 $f(x)=f(t)$ 를 만족시키는 모든 x 의 값의 합이 $\frac{7}{4}\pi$ 가 되도록 하는 t 의 개수가 4 개이려면,

1)의 경우 가능한 t 의 값이 2 개 + 3)의 경우 가능한 t 의 값이 2 개

이어야 하므로

$$f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=3 \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}a+b=3$$

이고,

$$f(0)=f\left(\frac{7}{4}\pi\right) \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}a+b=0$$

이어야 하므로

$$a=-\frac{3\sqrt{2}}{2}\ ,\ b=\frac{3}{2}$$

이다.

$$\therefore\ a^2+b^2=\frac{27}{4}$$

CheckpoINt

앞서 2)의 경우에는 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 서로 다른 실근의 합이 $\frac{7}{4}\pi$ 인 경우가 발생할 수 없다는 점을 확인하였으므로, 1)과 3)의 경우만 살펴보자.

$f(t)=0$ 이면 $t=0$, $\frac{7}{4}\pi$ 의 2 개이고,
$f(t)<0$ 이거나 $f(t)>3$ 이면
$t=\frac{7}{4}\pi$ 의 1 개다.

1)을 만족하는 t 의 값이 2 개이려면
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=3$ 이어야 한다.

3)을 만족하는 t 의 값이 2 개이려면
$f(0)=f\left(\frac{7}{4}\pi\right)$ 이어야 한다.

IN'sight

관련 문항; 27 지인선 n제 시즌1 수1 31번
되는 것 하나 찾겠다는 마인드도 중요하다.
평가자가 우리에게 요구하는 것은 문항이 오류가 없는지 검토하는 것이 아니고, 풀이를 자세히 서술하라는 것도 아니다.
우리는 가능한 개형 하나만 찾고 바로 다음 문제를 풀러 도망가면 될 뿐이다.

15 26년 3월 모의고사

INstruction

문자 a, b 자체에 너무 휘둘리지 말자. $x=0$ 에서의 미분가능성으로 $f(x)$ 에 대한 정보를 구한 후, 함수 $g(x)$ 의 전반적인 개형에 대해 고민해보자.
수식에 너무 치우쳐서 문자 계산만 많았던 것은 아닌지도 고민해보자.

정답: ③

해설

step1 함수 $g(x)$ 의 미분가능성을 이용해 $f(x)$ 의 식 세우기

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0+} g(x) = g(0) \ \rightarrow\ \frac{1}{4}f(0)=0$$

$$\rightarrow\ f(0)=0$$

이고, $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x} \ \rightarrow\ \lim_{x\to 0-}\frac{-xf(x)-ax^2}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{4}f(x)-bx^2}{x}$$

$$\rightarrow\ -f(0)=\frac{1}{4}f'(0)$$

$$\rightarrow\ f'(0)=0$$

이다.

$\therefore\ f(0)=f'(0)=0\ ,\ g(0)=g'(0)=0$

step2 $x\le 0$ 에서 조건 (가), (나) 해석하기

$p(x)=-xf(x)-ax^2$ 이라 하면, $x\le 0$ 에서 $g(x)=p(x)$ 이다.

이때 함수 $p(x)$ 는

최고차항의 계수가 음수이고, $p(0)=p'(0)=0$ 인 사차함수

이므로

$\alpha<0$ 이고 $p(\alpha)=-27$ 인 α 의 값이 무조건 존재

하는데, 조건 (나)에 의해

$p'(\alpha)=0$

이다.

또한 만약 $\alpha\ne\beta$ 이고 $\beta<0$ 이며 $p(\beta)=-27$ 인 β 의 값이 존재한다면,

조건 (나)에 의해 $p'(\beta)=0$ 이어야 하므로

$p(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2-27$

이라 할 수 있는데, 이때

$p(0)=p'(0)=0$ 을 만족하는 것은 불가능

하므로,

$x<0$ 에서 $p(x)=-27$ 을 만족하는 x 의 값은 오직 α 뿐이어야 한다.

CheckpoINt

물론 $g'(x)$ 를 구한 학생들도 있었겠지만, 이 문제에서는 미분계수의 정의를 쓰는 편이 계산이 더 적게 나올 것이다.

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이므로 $p(x)$ 의 최고차항의 계수는 -1 이다.

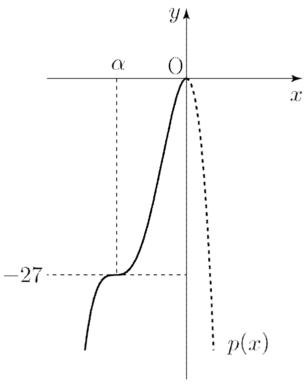
사잇값정리를 생각해보자.

$p(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2-27$ 인 경우 $p'(x)=0$ 의 서로 다른 실근은

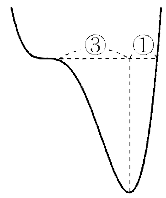
$x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 이므로

이들은 모두 음수이고,
$p'(0)=0$ 을 만족할 수 없다.

CheckpoINt



삼중근을 가지는 사차함수의 비율관계를 이용해 함수 $p(x)$ 의 식을 세워보자.



따라서

$x=\alpha$ 에서 함수 $p(x)$ 가 $y=-27$ 에 접하면서 통과해야 하므로,

$$p(x)=-(x-\alpha)^3\left(x+\frac{1}{3}\alpha\right)-27$$

이라 하면, $p(0)=0$ 이어야 하므로

$$\alpha=-3$$

이다.

즉,

$$p(x)=-(x+3)^3(x-1)-27$$

$p(x)=-xf(x)-ax^2$ 이다.

으로부터

$$-xf(x)-ax^2=-(x+3)^3(x-1)-27 \rightarrow f(x)=x^3+8x^2+18x-ax$$

이다.

step3 $x>0$ 에서 조건 (가), (나) 해석하기

$q(x)=\frac{1}{4}f(x)-bx^2$ 이라 하면, $x>0$ 에서 $g(x)=q(x)$ 이다.

이때 함수 $q(x)$ 는

최고차항의 계수가 양수이고, $q(0)=q'(0)=0$ 인 삼차함수

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 이므로

$q(x)$ 의 최고차항의 계수는 $\frac{1}{4}$ 이다.

인데, 조건 (가)에 의해

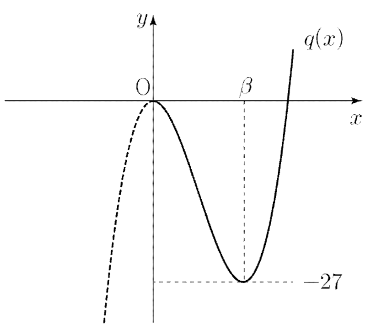
$\beta>0$ 이고 $q(\beta)=-27$ 인 β 의 값이 무조건 존재하고,

$x>0$ 에서 $q(\beta)=-27$ 을 만족하는 x 의 값은 오직 β 뿐이고,

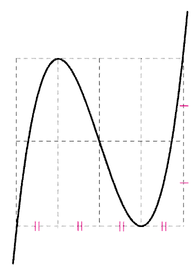
조건 (나)에 의해

$$q'(\beta)=0$$

이다.



삼차함수의 비율관계를 이용해 함수 $q(x)$ 의 식을 세워보자.



따라서

$$q(x)=\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\beta\right)(x-\beta)^2-27$$

이라 하면, $q(0)=0$ 이어야 하므로

$\beta=6$

이다.

즉,

$q(x)=\frac{1}{4}(x+3)(x-6)^2-27$

으로부터

$\frac{1}{4}f(x)-bx^2=\frac{1}{4}(x+3)(x-6)^2-27 \rightarrow f(x)=x^3-9x^2+4bx^2$

이다.

그러므로 $f(x)$의 식을 작성해보면

$f(x)=x^3+8x^2+18x-ax=x^3-9x^2+4bx^2$

으로부터

$a=18$, $b=\frac{17}{4}$

이므로

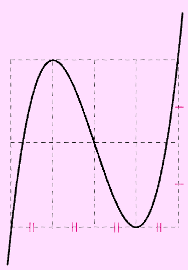
$a+b=\frac{89}{4}$

이다.

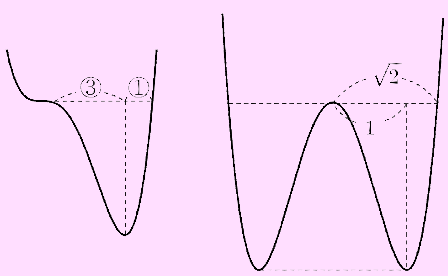
IN'sight

관련 문항; 27 지인선 n제 시즌1 수2 57번

1) 삼차함수의 비율관계



2) 사차함수의 비율관계



21 26년 3월 모의고사

INstruction

발문을 읽어가면서, 삼차함수를 결정하기 위한 조건들의 개수를 고민했어야 했다. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$에서 2가지, 조건 (가)에서 1가지, 조건 (나)에서 1가지임을 파악해서 흐름을 잡아보는 것도 좋은 습관이다.

정답: 48

해설

step1 조건 (가), (나)를 통해 함수 $f(x)$의 식 세우기

주어진 함수 $g(x)$의 식으로부터

i) $g'(x)=f(x)-|f(x)|$ $\rightarrow$ $f(x)\geq 0$이면 $g'(x)=0$

$f(x)<0$이면 $g'(x)=2f(x)$

ii) $g(0)=0$

이다.

이때, 조건 (가)에 의해

$x\geq k$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=0$을 만족시키는 실수 k의 최솟값이 2이므로

$x\geq 2$에서 $f(x)\geq 0$

$x<2$인 2에 충분히 가까운 어떤 x에 대해 $f(x)<0$

$\rightarrow f(2)=0$

임을 알 수 있다.

즉, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 $f(2)=0$이므로

$f(x)=x(x-2)(x-c)$

라 할 수 있다. (단, $c<2$)

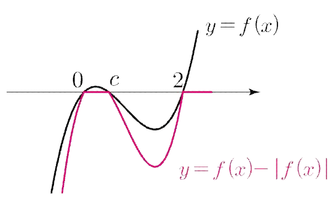
또한 조건 (나)에 의해 $g(2)=-8$이고, $g(0)=0$이므로

$$\int_0^2 g'(x)dx=-8$$

이다.

step2 함수 $f(x)$ 확정하기

1) $0<c<2$인 경우



$$\int_0^2 g'(x)dx=\int_c^2 2f(x)dx=-8 \Leftrightarrow \int_c^2 f(x)dx=-4$$

이어야 한다.

이때,

$$\int_c^2 f(x)dx=\int_2^c x(x-2)(x-c)dx$$

CheckpoINt

만약 함수 $f(x)$가
$x=2$에서 극댓값을 가진다면
실수 k의 최솟값이 2보다 커지게 되고,
$x=2$에서 극솟값을 가진다면
실수 k의 최솟값이 2보다 작아지게 된다.

$c\geq 2$이면 $x\geq 2$에서 $f(x)\geq 0$을
만족하지 않는다.

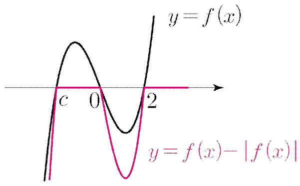
$$= \int_c^2 (x-2)(x-c)\left(x-1-\frac{c}{2}\right)dx + \int_c^2 (x-2)(x-c)\left(1+\frac{c}{2}\right)dx$$

$$= 0 + \left(-\frac{1}{6}\right) \times \left(1+\frac{c}{2}\right) \times (2-c)^3$$

$$= -4$$

이어야 하는데, 이를 만족하는 $0 < c < 2$ 인 c 의 값은 존재하지 않는다.

2) $c \le 0$ 인 경우



$$\int_0^2 g'(x)dx = \int_0^2 2f(x)dx = -8 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = -4$$

이어야 한다.

이때,

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^c x(x-2)(x-c)dx$$

$$= \int_0^2 x(x-2)(x-1)dx + \int_0^2 x(x-2)(1-c)dx$$

$$= 0 + \left(-\frac{1}{6}\right) \times (1-c) \times 2^3$$

$$= -4$$

이어야 하는데, 이를 만족하는 $c \le 0$ 인 c 의 값은

$c = -2$

이다.

$\therefore$ $f(x) = x(x-2)(x+2)$ $\rightarrow$ $f(4) = 48$

CheckpoINt

함수 $y = -\frac{1}{6}\left(1+\frac{x}{2}\right)(2-x)^3$ 은 $x = -1$ 에서 최솟값 $-\frac{9}{4}$ 를 가지므로 왼쪽 식을 만족하는 c 의 값은 존재하지 않는다.

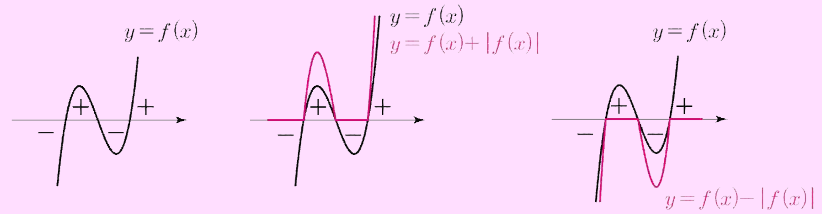
$-\frac{1}{6} \times (1-c) \times 2^3 = -4$

$\Leftrightarrow 1-c=3 \Leftrightarrow c=-2$

IN'sight

관련 문항; 27 지인선 n제 시즌1 수2 90번

1) 함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 함수 $y=f(x)+|f(x)|$와 $y=f(x)-|f(x)|$의 그래프를 그려보자.



2) 해설에서 사용한 적분 계산 트릭을 정리하자.

$f(x)=p(x-a)(x-b)(x-c)$에서 $\int_a^b f(x)dx$를 계산해보자.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b p(x-a)(x-b)(x-c)dx=\int_a^b p(x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}-c\right)dx$$

$$=\int_a^b p(x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx+\int_a^b p(x-a)(x-b)\left(\frac{a+b}{2}-c\right)dx=0-\frac{1}{6}\times p\left(\frac{a+b}{2}-c\right)\times(b-a)^3$$

이다.

이때,

1) $x-c=x-\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}-c$로 분해

2) $\int_a^b p(x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$는 피적분함수가 $\left(\frac{a+b}{2},0\right)$에 대해 대칭이고,

적분구간도 $x=\frac{a+b}{2}$에 대해 대칭이므로, 적분값이 0

3) $\int_a^b p(x-a)(x-b)\left(\frac{a+b}{2}-c\right)dx$은 이차함수 넓이공식으로 계산

(단, 넓이공식이므로 실제 적분값과 부호가 다를 수 있다. 부호 조정해주자.)

의 과정을 거친다.

암기하기보단 자연스럽게 쓸 수 있도록 연습하자.

22 26년 3월 모의고사

INstruction

지수로그 그래프 문제라기보다는 방정식 문제이다. 길이가 $\frac{1}{5}$ 라는 것을 해석할 때, 절댓값을 붙이는 것을 잊지 말자.

정답: 80

해설

주어진 조건에 의해

$$A(t, 2^t)\ ,\ B\left(t, 2\times 4^t + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

이므로, 두 점 A, B 사이의 거리가 $\frac{1}{5}$ 가 되도록 하는 t 의 값은

$$\left|2^t - \left(2\times 4^t + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\right| = \frac{1}{5}$$

을 만족하는 t 의 값과 같고, 이때 $2^t = X$로 치환하면

$$\left|X - \left(2\times X^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\right| = \frac{1}{5}$$

을 만족하는 양의 실근 X의 개수가 2 개다.

위 방정식의 절댓값을 풀어보면,

i) $2\times X^2 - X + \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{5} = 0$

ii) $2\times X^2 - X + \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{5} = 0$

인데, i)의 경우 판별식을 써보면

$$D = (-1)^2 - 4\times 2\times\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{5}\right) < 0$$

이므로 방정식을 만족하는 실수 t가 존재하지 않는다.

따라서

방정식 $2\times X^2 - X + \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{5} = 0$을 만족하는 양의 실수 X의 값이 2 개 존재하므로

판별식을 써보면

$$D = (-1)^1 - 4\times 2\times\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{5}\right) > 0 \ \rightarrow\ \left(\frac{1}{2}\right)^k < \frac{13}{40}$$

이고, 두 실근 X의 값의 곱이 양수여야 하므로

$$\frac{1}{2}\times\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{5}\right) > 0 \ \rightarrow\ \left(\frac{1}{2}\right)^k > \frac{1}{5}$$

에서 가능한 자연수 k의 값은

$k = 2$

이다.

따라서

CheckpoINt

치환을 하게 될 경우 항상 범위를 신경쓰자.

방정식 $2\times 4^t-2^t+\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{1}{5}=0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β

라 하면 (단, $\alpha<\beta$)

방정식 $2\times X^2-X+\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{1}{5}=0$ 의 서로 다른 두 실근은 2^α, 2^β

이므로

근과 계수의 관계에 의해

$$2^\alpha\times 2^\beta=\frac{1}{2}\times\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{1}{5}\right)\rightarrow 2^{\alpha+\beta}=\frac{1}{40}$$

$$\rightarrow 2^p=\frac{1}{40}$$

이다.

$\therefore\ k\times\left(\frac{1}{2}\right)^p=80$

CheckpoINt

$k=2$ 를 이용해 정리하자.
주어진 조건에서 $\alpha+\beta=p$ 이다.

근과 계수의 관계에 의해

$2^\alpha+2^\beta=\frac{1}{2}$ 이라는 정보도 알 수 있지만,

구하는 값에 영향을 미치지 않는 정보이다.

IN'sight

관련 문항; 27 지인선 n제 시즌1 수1 21번

지수와 로그는 '보이지 않는 부등식'을 포함한다.

예를 들어 2^x 라는 식을 t 로 치환한다면, 실수 t 는 항상 양수이다.

마찬가지로 $\log_2(x-3)$ 이라는 식이 정의되려면 $x>3$ 이라는 조건이 따라온다.

'보이지 않는 부등식'만 잘 찾아낸다면, 고1 수학의 이차방정식, 이차함수의 최대최소 단원급의 문제가 되니 무서워할 필요가 없다.