## 보충&심화

지수를 공부하면서 헷갈릴 수 있는 부분들을 집중적으로 정리했다. 천천히 읽어보며 이해하자.
여기서 설명하는 $\sqrt[n]{a}$는 모두 $a$는 실수, $n$은 2이상의 자연수인 경우다.

### ① $(a^b)^c \neq a^{b^c}$

$(a^b)^c$는 밑 $a^b$에 $c$제곱이 된 것으로, $(a^b)^c = a^{bc}$다. 반면 $a^{b^c}$는 밑 $a$에 $b^c$제곱을 한 것이다.

예를 들어 $(2^3)^4$은 $2^{12}$고, $2^{3^4}$은 $2^{81}$이다. 개념을 헷갈리지 말고 쓸 때도 알아볼 수 있게 표시하도록 하자.

### ② $x^n = a$ vs $\sqrt[n]{a}$ ($a$의 $n$제곱근 vs $n$제곱근 $a$)

| $x^n = a$의 근 | |
|---|---|
| 실수근 | 허수근 |

$x^n = a$는 $n$제곱해서 $a$가 되는 수 $x$를 의미하며 $x$를 $a$의 $n$제곱근이라 읽는다. (거듭제곱근의 정의)
이 때, $x$는 실근과 허근이 있는데 실근일 때 $x$는 $\sqrt[n]{a}$ 또는 $-\sqrt[n]{a}$고 각각 $n$제곱근 $a$ 또는 마이너스 $n$제곱근 $a$라 읽는다.
정리하면 $\sqrt[n]{a}$는 $x^n = a$에 포함되는 개념이다.

참고로 본문에서 '$a, a^2, a^3$, $\cdots$ $a^n$ $\cdots$을 통틀어 $a$의 거듭제곱이라 한다'고 소개한 반면 거듭제곱근을 소개할 때는 '$\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}$...을 통틀어 거듭제곱근이라 한다'고 하지 않고, '제곱근, 세제곱근.. 을 통틀어 거듭제곱근이라 한다'고 한 것이다.

### ③ $(\sqrt[n]{a})^n$ vs $\sqrt[n]{a^n}$

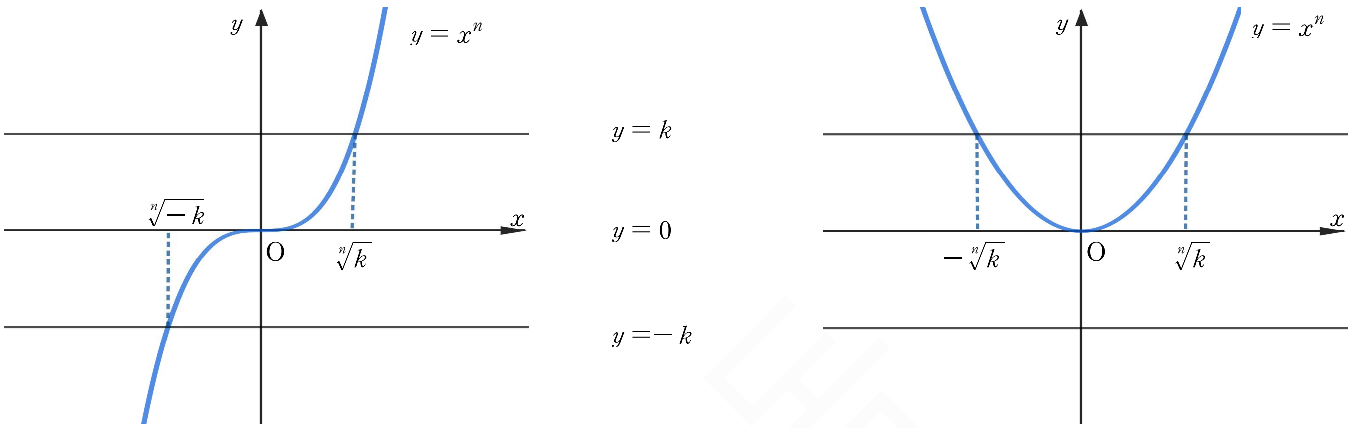
$\sqrt[n]{a}$은 $n$제곱하면 $a$가 된다는 뜻이다. 따라서 $(\sqrt[n]{a})^n = a$.
$\sqrt[n]{a^n}$은 $a$를 $n$제곱한 뒤, $\sqrt[n]{\ }$을 씌운 것인데 보통은 $a$지만 $a$가 음수고 $n$이 짝수인 경우만 $-a$가 된다.

예 $\sqrt[n]{a^n}$에서 $a = -2$, $n = 4$인 경우 $\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$로 부호가 바껴서 $-a = 2$가 나온다.
음수를 짝수 번 곱하면 양수로 바뀌기 때문에 이 경우만 다르고 그 외는 부호가 바뀌지 않아 $a$ 그대로 나온다

결과를 정리하면 $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & (n = \text{홀수}) \\ |a| & (n = \text{짝수}) \end{cases}$

④ $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$ ($n$은 3이상의 홀수)

$\sqrt[n]{\text{음수}}$인 경우 $n$이 홀수일 때와 2일 때만 다루며 $\sqrt[6]{-2}$같이 $n$이 4이상 짝수는 고등과정에서 다루지 않는다.
홀수인 경우 $\sqrt[n]{\text{음수}}$는 실수고, 2인 경우 실수는 아니지만 특별히 $\sqrt{-4}=\sqrt{4}\,i=2i$ 허수라 배웠다.




$n$이 짝수일 때 $y=x^n$ 그래프는 음수 $y=-k$와 교점이 없기에 실근이 존재하지 않는다. (여기서 $k$는 양수)
$n$이 홀수일 때 $y=x^n$ 그래프는 음수 $y=-k$와 교점을 가지며 실근이 존재한다. 또한 원점 대칭인 그래프이므로 $y$값이 반대면 그에 해당하는 $x$값도 반대라 $\sqrt[n]{-k}=-\sqrt[n]{k}$다.

정리하면 $n$이 3이상의 홀수면 $\sqrt[n]{\text{음수}}$는 실수이며 $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$가 성립한다. ($a$부호 상관없이 성립함)

예 $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}$이고 $\sqrt{-4}\neq-\sqrt{4}$다.

## ⑤ 지수가 확장되는 조건

| | 지수 | 밑 |
|---|---|---|
| $N$ | 자연수 | $a$ 실수 |
| $Q$ | 정수 | $a \neq 0$ |
| $R$ | 유리수 | $a > 0$ |
| $Z$ | 실수 | $a > 0$ |

지수법칙 본문을 잘 살펴보면 지수의 범위가 확장할 때 밑의 범위는 축소된다
밑과 지수의 범위가 알맞아야 쓸 수 있다. 정리하면 오른쪽 표와 같다.
이렇게 되는 이유는 오류를 막기 위해서다.

오류를 막기 위해서라고만 알고 표의 조건에 맞게만 잘 써도 된다.
특히 지수가 유리수일 때 밑이 음수면 안된다는 것을 기억하자.
아래를 오류인 이유를 설명한 것인데 몰라도 된다.

지수가 정수일 때 밑이 $0$이 아닌 이유는 $a^m \div a^n$을 $a^m \div a^n = a^{m-n}$인데 밑이 $0$이면 $0^0$, $0^{-4}$과 같은 수가 나오기 때문이다.
$0$을 $0$번 곱한다, $-4$번 곱한다는 개념은 일반적으로는 정의하지 않는다.

지수가 유리수면 밑이 음수도 안된다. $\sqrt[3]{-8}$은 $-2$인데, 유리수 지수라면 $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$도 가능해 오류가 발생하기 때문이다.
지수가 무리수여도 밑이 음수면 안된다. $2^{\sqrt{2}}$같은 경우 $2^{1.414\cdots}$으로 $2^{1.4} = 4.65536\ldots$ $2^{1.41} = 4.706965\ldots$ 으로 한없이 일정한 값에 가까워짐이 알려져 있는데 $(-2)^{\sqrt{2}}$같이 음수라면 그렇지 않기 때문이다.

예 $\{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}} = (-3)^1 = -3$과 $\{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$ 중 틀린 것이 있다면 이유를 설명하시오.

전자는 $-3$을 밑으로 보고 지수끼리 곱한 계산으로, 유리수 지수는 밑이 양수여야 지수법칙을 쓸 수 있어 틀린 풀이다.
따라서 후자같이 밑을 먼저 양수 $9$로 바꾼 뒤 유리수 지수를 이용한 지수법칙을 쓰는 것이 맞다.
이 예는 앞서 본 $\sqrt[n]{a^n}$과 같은 상황이다. $a < 0$고 $n$이 짝수면 $-a$가 된다.

정리하면 다음과 같다

① $(a^b)^c$와 $a^{b^c}$ 구분.
② $\sqrt[n]{a}$는 $x^n = a$의 근 중 하나다.
③ $(\sqrt[n]{a})^n = a$고 $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & (n = \text{홀수}) \\ |a| & (n = \text{짝수}) \end{cases}$ 다.
④ $n$은 홀수면 $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ 다.
⑤ 지수와 밑의 범위를 확인하자, 특히 지수가 유리수인데 밑이 음수면 안 된다.