이해원

INTEGRITY

01

맛보기

시대인재 BOOKS

INTEGRATE

지은이

이해원, 인터그레이트 약력

2011 네이버 카페 『포만한 수학연구소』 개설
2012 《한권으로 완성하는 수학》 시리즈 첫 출시
2012 《이해원 모의고사》 시리즈 첫 출시
2014 독자 개발 문항의 외부 공급 개시 · 문항 콘텐츠 사업 본격화
2018 《이해원 N제》 시리즈 첫 출시
2021 『인터그레이트』 법인 설립
2021 《한권으로 시작하는 수학》 시리즈 첫 출시
2022 《한권으로 완성하는 기출》 시리즈 첫 출시
2025 《이해원 모의고사》 8년 연속 베스트셀러 1위
(yes24 중고등참고서 고등학교 파이널/모의고사 수학영역 2024~2025년 10월~11월, 2023년 11월, 2022년 10월~11월, 2018~2021년 11월 월별 베스트)

저서

한권으로 완성하는 수학 (수능 수학 전문 개념서)
한권으로 완성하는 기출 (평가원·수능·교육청 기출)
이해원 N제 (실전 문항으로만 구성된 고퀄리티 문제집)
이해원 모의고사 (수능 수학 대비 FINAL 모의고사)
한권으로 시작하는 수학 (내신 기본서 & 수능 기초서)

활동

네이버카페 pnmath.kr
인스타그램 @lhw_math
공식웹사이트 integrate.kr

인터그레이트

이해원 김문석 가철순 유영진 이수빈 김동환 한도현 손민성 정종균 최경서
김현기 임수민 김태우 김동현 김현규 서경주 정효주 남궁준 이남현 김규원
이 진 조지훈 송현진 진주영 박성민 신형철 외 N명

서문

수험생 여러분, 안녕하십니까. Integrity는 ‘진실성’, ‘순수함’, ‘성실함’이라는 의미를 담고 있습니다. 이 교재의 제목에는 수험생 여러분께 가장 순수하고 진실한 콘텐츠를, 가장 성실한 자세로 전달하겠다는 저희의 약속이 담겨 있습니다.

수학 시험의 출제 기조는 해마다, 아니 시험마다 변화하고 있습니다. 새로운 유형이 등장하고, 낯선 소재가 출제되며, 문제를 바라보는 관점 자체가 달라지기도 합니다. 이렇게 급변하는 흐름 속에서 수험생들은 끊임없이 질문합니다.

> **“지금 이 시점에 내가 집중해야 할 것은 무엇일까?”**
> **“최근 출제 경향을 어떻게 파악하고 대비해야 할까?”**

Integrity는 바로 이 질문에 대한 답입니다.

매월 치러지는 모의고사는 수능 환경에 대한 연습일 뿐 아니라, 동시에 출제 방향의 신호이자 여러분이 나아가야 할 방향을 가리키는 이정표가 됩니다. Integrity는 매 시즌 실시되는 평가원 모의고사와 교육청 학력평가를 철저히 분석하고, 그 속에 담긴 출제 의도와 핵심 개념, 그리고 문제 해결의 본질을 여러분께 전달합니다.

Integrity **1권**은 2026학년도 6월 모의평가, 9월 모의평가, 그리고 수능 주요 문항의 분석과 해설로 구성되어 있습니다. 지난 한 해의 출제 흐름을 정확하게 파악하고, 그것이 앞으로의 학습에 어떤 의미를 갖는지 명확히 이해할 수 있도록 구성했습니다. 이어질 Integrity **2, 3, 4권**은 앞으로 실시될 교육청 학력평가와 평가원 모의평가의 문항들을 분석하여 여러분께 전달할 것입니다. 마치 계절마다 제철 음식을 먹듯, 각 시즌에 가장 적합한 콘텐츠를 가장 적시에 제공하는 것이 Integrity의 철학입니다.

또한 Integrity는 저희의 기존 콘텐츠들과 유기적으로 연결되어 있습니다. ‘**한완수(한권으로 완성하는 수학)**’로 개념의 뼈대를 잡고, ‘**한완기(한권으로 완성하는 기출)**’로 기출을 맛본 뒤, ‘Integrity’로 최신 경향을 체화하고, ‘**이해원 N제**’와 ‘**이해원 모의고사**’로 실전 감각을 완성하는 구조입니다. 각 교재가 독립적으로도 훌륭하지만, 함께 학습할 때 그 시너지는 배가 됩니다.

여러분이 이 교재를 펼치는 순간마다 저희는 또 다른 책임감을 느낄 것입니다. 여러분의 소중한 시간과 노력이 헛되지 않도록, 한 문제 한 문제를 최선을 다해 분석했고, 한 줄 한 줄에 진심을 담아 해설했습니다. 이 교재가 여러분의 수험 생활에 든든한 동반자가 되기를, 그리고 여러분이 원하는 목표에 한 걸음 더 가까이 다가갈 수 있기를 진심으로 바랍니다.

끝으로, 언제나 최선을 다하는 여러분께 깊은 존경과 감사의 마음을 전합니다. 여러분의 노력은 결코 배신하지 않을 것이며, 그 결실을 맺는 날까지 인터그레이트가 함께하겠습니다. 감사합니다.

이해원, 인터그레이트

차례

Integrity
I

2027 Integrity I

2026학년도 6평

2026학년도 9평

2026학년도 수능

2026학년도

6평

Integrity
I

2027 Integrity I

2026학년도 6평

2026학년도 6월 평가원
공통 9번 문항

정답률 84%

함수 $f(x)=x^2+ax$ 에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)\,dx=36+\int_{-3}^{3}f(x)\,dx$$

일 때, 상수 a 의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

교과서적 요소
· 정적분

수능·실전적 요소
· 기함수와 우함수의 정적분 한완수·한완기

이해원 N제 연계
· 시즌1 수학2 #64

GLIMPSE 최상위권이 발문만 힐끗 보고 하는 생각

❶ 적분 구간이 똑같다

좌변과 우변의 정적분의 적분 구간이 똑같다. 당장 이항하여 식을 정리해야 한다.
$f(x)$ 의 식이 주어져 있다고 해서 신나게 대입하면 쓸데없는 계산을 하게 될 것이다.

❷ 적분 구간이 -3 에서 3 이다

적분 구간이 원점 대칭이므로 기함수·우함수의 성질을 이용하면 더욱 간단하게 계산해 낼 수 있다.

— NOTE

본인의 풀이를 컴팩트하게 작성해 보세요.

COMMENT 인터그레이트의 코멘트

9번 중에서도 꽤나 쉽게 출제된 문항입니다. GLIMPSE에서도 짧게 언급했듯, 함수 $f(x)$의 식이 구체적으로 주어져 있다고 해서 주어진 등식에 대입하여

$$\int_{-3}^{3}(x+1)(x^2+ax)\,dx = 36 + \int_{-3}^{3}(x^2+ax)dx$$

를 적었다면 쓸데없는 계산을 하게 되었을 것입니다. 누가 이런 비효율적인 접근을 하냐고 생각하실 수도 있겠지만, 문제를 풀 때 접근 방법을 충분히 고민하지 않은 채 급하게 펜부터 움직이다가 시간만 낭비한 경험이 누구나 한 번쯤 있을 것입니다.

풀이를 시작하기 전에 잠시 펜을 멈추고, 문제의 발문을 읽으며 '무엇을 묻고 있는지', '어떻게 접근하는 것이 의도인 문제인지'를 먼저 파악하는 것은 매우 중요합니다. 이 짧은 고민의 시간이 불필요한 계산을 줄이고, 문제 해결의 방향을 정하는데 도움이 될 것입니다.

APPENDIX 참고 콘텐츠

한완수	· 수학2(상) 286p, · 수학2(하) 344p,	Chapter F 부정적분과 정적분 TOPIC 29 대칭성·주기성과 적분
한완기	· 수학2 평수능 164p,	Pattern 10 정적분의 속산, 기함수·우함수의 정적분을 숙지하라!
이해원 N제	· 시즌1 수학2	#64

REACTION 시험 당일 수험생들의 생생한 반응

1,119 457 7.5만

lhw_math님 외 27.7만명이 풀었습니다

#정적분 #우함수 #기함수

do__hyxn 331
그냥 우함수/기함수 적분 문제라 별고민없이 푼 듯?
답글 달기

0wansoo 207
ㅇㅈ 밑끝 위끝 보자마자 개설렘ㅋㅋㅋ
답글 달기

w00ri 198
222 보자마자 짝수차항 지우고 시작함
답글 달기

zx_adv 86
최근 문제중에 기함수/우함수를 대놓고 물어본 문제가 없었던 것 같은데.. 좀 의외였음
답글 달기

「260609」 해법

「260609」 한완기 해법
《한권으로 완성하는 기출》의 요소들로 쓰인 해법입니다.
최대한 다양한 풀이를 익히며 여러 가지 도구를 연습하도록 합시다.

실전적 해법

두 적분 구간이 일치하므로 이항하여 정리하면

$$\int_{-3}^{3}(x+1)f(x)\,dx = 36 + \int_{-3}^{3}f(x)dx$$

$$\rightarrow \int_{-3}^{3}(x+1)f(x)\,dx - \int_{-3}^{3}f(x)\,dx = 36$$

$$\rightarrow \int_{-3}^{3}\left\{(x+1)f(x) - f(x)\right\}dx = 36$$

$$\rightarrow \int_{-3}^{3}xf(x)\,dx = 36$$

$$\rightarrow \int_{-3}^{3}x(x^2+ax)dx = 36$$

$$\rightarrow \int_{-3}^{3}(x^3+ax^2)dx = 36$$

이때

실전 개념 기함수·우함수의 정적분 한완기 수2 평수능 165p

을 활용하여 좌변의 정적분을 간단히 계산할 수 있다.

$$\int_{-3}^{3}(x^3+ax^2)dx \;=\; 2\int_{0}^{3}ax^2dx \;=\; 2a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 \;=\; 18a$$

$\therefore\ 18a = 36 \quad \rightarrow \quad a = 2$

정답 ②

「260615」 우미분계수의 존재성

2026학년도 6평
공통 15번 문항

정답률 27%

상수 k와 $f'(0)=6$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\le 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다.
> (나) x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 13이다.

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

교과서적 요소
- 미정계수의 결정
- 미분계수(순간변화율)
- 함수의 증가와 감소

수능·실전적 요소
- 다항함수의 극점의 위치 한완수·한완기
- 교점으로 식 세우기 한완수·한완기

GLIMPSE 최상위권이 발문만 힐끗 보고 하는 생각

❶ 최고차항의 계수가 음수 아니야?

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수에 대한 언급이 딱히 없다. 보통은 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수를 많이 다루므로, 이를 노린 출제자가 음수인 경우를 정답으로 설정해 두었을 수도 있다.

❷ 함수 $g(x)$의 연속성

보통 구간별 함수가 연속이라는 조건을 주는 경우가 많아서 발문을 대충 읽으면 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이겠거니 착각할 수도 있다. 그러나 발문 어디에도 연속이라는 조건이 없으므로, 함수 $g(x)$가 $x=\pm1$에서 불연속일 가능성을 생각해야 한다.

❸ 우미분계수의 값이 항상 존재하는 함수

모든 실수 a에 대하여 우미분계수 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하려면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 어떻게 생겨야 할까? 혹은 이 극한을 그냥 0/0꼴의 극한으로 해석하는 것이 더욱 간편할 수도 있다. 여러 가능성을 열어 두자.

❹ 방정식의 실근

방정식 $g(x)=t$를 보자마자 x축과 평행한 직선을 그려서 무언가를 판단하는 조건임을 알 수 있다. 항상 먹던 맛의 조건일 뿐이다.

— NOTE

본인의 풀이를 컴팩트하게 작성해 보세요.

COMMENT 인터그레이트의 코멘트

우미분계수가 존재할 조건이 무엇인지 정확하게 알고 있어야 헷갈리지 않고 풀이할 수 있는 문항입니다. 모든 다항함수 $f(x)$ 에서는 우미분계수와 도함수의 우극한이 같습니다. 즉 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}f'(x)$$

가 성립합니다. 이 문제에서도 막연히 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}g'(x)$ 라 생각한다면 (가)조건이 삼차함수 $f(x)$ 와 k 의 값과 관계없이 항상 성립하는 것처럼 보이기에 무언가 이상하다는 생각이 들 수도 있었을 것입니다. 이런 함정에 빠졌다는 것은 미분계수의 정의에 대한 교과서 개념을 어설프게 공부하여 '미분계수'와 '도함수의 극한'의 차이점을 명확하게 인지하지 못했음을 의미합니다.

'미분계수'와 '도함수의 극한', 둘의 차이점을 아직 잘 모른다면 뒤 페이지의 「260615」 **분석**에서 반드시 학습하고 넘어가도록 합시다.

APPENDIX 참고 콘텐츠

한완수	· 수학2(상) 206p,	Chapter E 다항함수의 그래프
	· 수학2(하) 48p,	공부법 시리즈 - 도함수의 극한값
	· 수학2(하) 58p,	TOPIC 04 미분계수 해석
한완기	· 수학2 평수능 54p,	Pattern 01 좌극한, 우극한, 극한값, 함숫값을 구분하라!
	· 수학2 평수능 58p,	Pattern 02 모두 수렴하는 함수로 표현하여 극한값을 구하라!
	· 수학2 Thema 26p,	Thema 07 극값의 위치
	· 수학2 Thema 30p,	Thema 08 다항함수에서 길이 암산

REACTION 시험 당일 수험생들의 생생한 반응

1,119 457 7.5만

lhw_math님 외 **27.7만명**이 풀었습니다

#구간별함수 #우미분계수 #실근의개수 #최댓값

sxo_yxxn 117
생긴건 뭔가 있을 것 같은데, (가)조건만 해석하면 개형 바로 나와서 쉬웠던듯
답글 달기

0wansoo 71
(가)에서 느낀 재미를 (나)의 짜침으로 덮어버림;
답글 달기

w00ri 32
출제자가 (가)까지 만들고 데드라인 임박해서 (나)에 아무거나 쓴 듯ㅋㅋㅋ
답글 달기

06r0rx 53
난 (나)조건도 나쁘지 않다고 생각하긴함
답글 달기

「260615」 분석

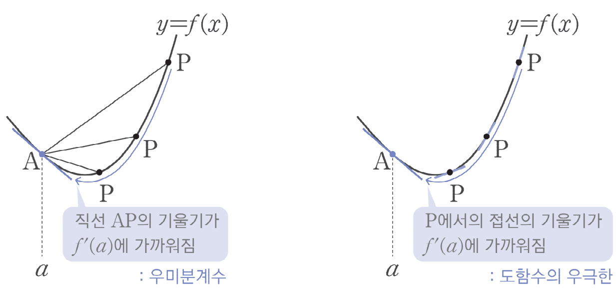
1. 미분계수와 도함수의 극한

수학적 논리에 예민하지 않은 학생들은 '미분계수'와 '도함수의 극한'의 차이점을 알아채기 어려울 수 있습니다. 두 개념의 차이를 확실히 구분하고 넘어갑시다. 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우미분계수와 도함수의 우극한을 식으로 나타내면 각각 다음과 같습니다.

우미분계수 : $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ = (평균변화율의 우극한)

도함수의 우극한 : $\lim\limits_{x \to a+} f'(x)$ = (순간변화율의 우극한)

두 개념을 시각화하여 관찰합시다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(x, f(x))$가 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$를 향해 움직이는 상황에서 각각 평균변화율, 순간변화율의 움직임을 관찰하면 됩니다.

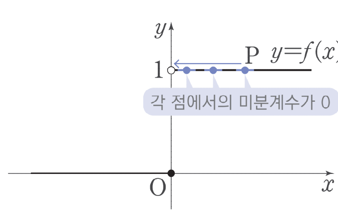


위와 같이 적당히 부드러운 곡선을 그려놓고 생각해 보면, '우미분계수'와 '도함수의 우극한'은 결국 모두 미분계수, 즉 $x=a$에서의 접선의 기울기로 수렴하므로 당연히 서로 같을 것이라는 착각을 하게 됩니다. 이는 많은 학생들이 갖고 있는 대표적인 오개념입니다. 예를 들어 함수 $f(x)$가 다음과 같이 불연속인 경우에는 다른 일이 벌어집니다.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$는 $x<0$, $x>0$에서 각각 상수함수이므로 $x \ne 0$에서 $f'(x)=0$인 것은 명확합니다. 따라서

$$(\text{도함수의 우극한}) = \lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} 0 = 0$$

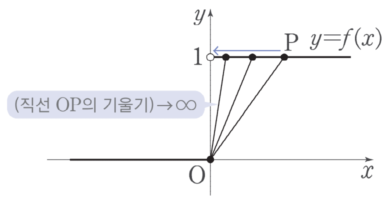


입니다.[1] 이를 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같습니다.

각주

1) 도함수 $f'(x)$가 $x=0$에서 정의되지 않는데, 어떻게 $x=0$에서의 우극한을 생각할 수 있는지 의문이 생길 수 있습니다.
이는 $x=0$에서의 우극한이 존재하는 것과 $x=0$에서 정의되는 것은 무관하고, $x>0$에서 도함수 $f'(x)$가 잘 정의되기에 생각할 수 있는 것입니다.

한편 우미분계수는 움직이는 점을 통해 ‘평균변화율’을 관찰해야 합니다.



위 그림과 같이 $x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 따라 움직이는 점 $\mathrm{P}(x, f(x))$와 고정된 점 $\mathrm{O}(0, f(0))$을 지나는 직선의 기울기를 관찰하면 됩니다. 그러면 $x \to 0+$ 일 때, 직선 OP의 기울기가 점점 커지면서 ∞로 발산한다는 것을 알 수 있습니다. 식으로도 확인해 보면 다음과 같습니다.

$$(\text{우미분계수}) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty \cdots$$ [1)]

즉, 우미분계수와 도함수의 우극한이 서로 다른 상황이 있는 것입니다. 왜 이런 차이가 생긴 것일까요? 그 이유는 아까의 ‘우미분계수와 도함수의 우극한이 서로 같다’라는 결론은 곡선 $y=f(x)$가 부드러운 곡선, 즉 함수 $f(x)$가 미분가능한 함수라는 가정에서 출발한 것이기 때문입니다. 그래서 $x=0$에서 불연속인 함수인

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

에서는 ‘우미분계수와 도함수의 우극한이 서로 같다’는 것이 성립하지 않게 된 것입니다. 즉, 이러한 오개념이 생긴 학생은 일반화의 오류를 범하고 있는 것입니다.

이처럼 수학에는 **언뜻 그럴듯해 보이던 관찰도 특수한 상황에서는 직관과 다른 결과로 나타나는 경우**가 많습니다. 모든 개념이 그렇지만 특히 극한을 활용하는 경우에 이러한 현상이 자주 나타납니다. 그리고 당연하게도 이런 내용들이 고난도 문항의 변별 요소로 활용되곤 합니다.

여기까지의 내용에서 ‘우미분계수와 도함수의 우극한은 다르다’라는 결론을 기억하는 것도 물론 중요하지만, 정말 얻어야 하는 교훈은 **‘극한에서는 함부로 직관에 의존해서는 안 된다!’** 라는 것과 **‘처음 보는 개념은 정의에 입각해서 논리적으로 확인해야 한다!’** 라는 것입니다.

각주

1) 우미분계수는 $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 의 값이 존재할 때에만 쓰는 표현이므로, ∞ 와 같이 존재하지 않는 극한에 대하여 ‘(우미분계수)= ’와 같이 나타내는 것은 엄밀하게는 잘못된 표현입니다.

2. 「260615」에서의 관찰

상수 k와 $f'(0)=6$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\le 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다.
(나) x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 13이다.

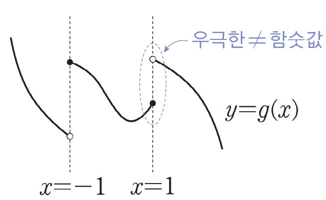
① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

2026학년도 6월 모의평가 공통 15번

앞에서 했던 우미분계수와 도함수의 우극한에 대한 관찰이 「260615」의 (가)조건을 해석하는 데에도 깊은 연관이 있습니다. 방금 배운대로

우미분계수 = (평균변화율의 우극한)

이라는 관점에서 오른쪽 그림과 같이 $x=-1$, $x=1$에서 불연속인 함수 $y=g(x)$의 그래프를 적당히 그려놓고 생각합시다.



그러면

$x=-1$에서는 우극한과 함숫값이 서로 **같으므로** $\lim_{x\to -1+}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}$이 존재하지만

$x=1$에서는 우극한과 함숫값이 서로 **다르므로** $\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$이 존재하지 않음

을 그래프 위에서 눈으로 평균변화율의 우극한을 상상하며 판단할 수 있을 것입니다. 즉, 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서는 불연속이어도 되지만, $x=1$에서는 반드시 연속이어야 하는 것입니다. 더 자세한 풀이는 뒤의 「260615」 **해법**에서 학습하도록 합시다.

2-1. 더욱 근본적인 해법

「260615」의 (가)조건에서 $\lim_{x \to a+} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$ 를 '우미분계수'이기 이전에 단순히 '0/0꼴의 극한'으로 해석한다면 아래의 교과서 개념 미정계수의 결정 을 활용하여 더 간단하게 같은 결론을 끌어낼 수 있습니다.

교과서 개념 | 수능 개념 | 교과서 간접 개념

교과서 개념 미정계수의 결정

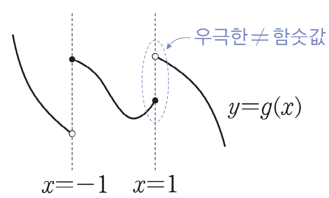
$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 의 극한값이 존재할 때, $\lim_{x \to a} g(x)=0$ 이면 $\lim_{x \to a} f(x)=0$ 이다.
(위의 성질은 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$ 일 때도 성립한다.)

교과서 개념 미정계수의 결정 에 의하여 다음을 알 수 있습니다.

$$\lim_{x \to a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \text{ 의 값이 존재} \quad \to \quad \lim_{x \to a+} \left(g(x)-g(a)\right)=0 \quad \left(\because \lim_{x \to a+}(x-a)=0\right)$$

$$\to \quad \lim_{x \to a+} g(x)=g(a)$$

즉, (가)조건을 만족시키려면 함수 $g(x)$ 의 우극한과 함숫값이 항상 같아야 합니다.



이제 동일하게 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=g(x)$ 의 그래프를 적당히 그려놓고 생각해 보면 $x=-1$ 에서는 불연속이어도 문제가 생기지 않지만, $x=1$ 에서 불연속이면 우극한과 함숫값이 달라지기에 함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서는 반드시 연속이어야 한다는 결론을 얻을 수 있습니다.

이는 $\lim_{x \to a+} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$ 를 '우미분계수'라고 해석하는 것보다 근본적이고 쉬운 접근입니다. 만약 '우미분계수'로의 해석에 매몰되었다면, 앞서 언급한 오개념처럼 미분계수와 도함수의 극한을 구분하지 못했을 수도 있습니다. 하나의 해석에 고정되지 않도록, 상황에 맞는 관점을 선택하는 연습이 필요합니다.

저자의 특강 **TIP** **우미분계수 풀이 vs 0/0꼴 극한 풀이**

「260615」의 조건을 해석할 때, '우미분계수'로 생각이 매몰되어 더 단순한 '극한'이라는 생각을 못하는 경우가 있습니다.

이는 평소 비슷한 조건이 주어진 문제를 '미분계수'로만 해석했기 때문에 생각이 '우미분계수'로 매몰된 경우에 속합니다. 이를 예방하기 위해, 기출을 공부할 때는 같은 조건을 여러 관점에서 해석해 보고 각각의 접근이 언제 유리한지도 함께 정리해 두기 바랍니다.

「260615」 해법

「260615」 한완기 해법
《한권으로 완성하는 기출》의 요소들로 쓰인 해법입니다.
최대한 다양한 풀이를 익히며 여러 가지 도구를 연습하도록 합시다.

15

상수 k와 $f'(0)=6$인 삼차함수 $f(x)$ ①에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\le 1) \end{cases}$$ ②

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하고③ 그 값은 0 이하이다.
(나) x에 대한 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수④가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 13이다.

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$ ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

발문 분석 발문을 읽으며 할 수 있는 생각, 해야 하는 생각

① 최고차항의 계수가 주어지지 않았다.
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 주어지지 않았으므로, '최고차항의 계수가 음수인 경우'를 의식해야 한다. 의식하지 않으면 의외로 놓치기 쉬운 케이스이다.

② 구간별 함수가 주어졌을 때는 연속성·미분가능성을 의식해야 한다.
구간별 함수가 주어진 문항은 함수가 바뀌는 지점에서 변수가 발생하는 경우가 많다. $x=\pm1$에서의 연속성과 미분가능성을 확인할 준비를 해 두자.

③ '존재한다'라는 조건
'존재한다'라는 조건이 주어졌다는 것은 '일반적으로는 존재하지 않을 수 있다'는 것을 내포한다. 즉, 존재하지 않는 상황을 확인해야 존재하기 위한 조건을 찾을 수 있을 것이다.

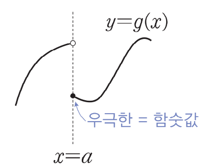
④ '방정식의 실근의 개수'는 곧 '그래프의 교점의 개수'이다.
방정식 $g(x)=t$의 실근의 개수는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 개수이다. 특히 x축에 평행한 직선과의 교점의 개수는 극값을 기준으로 바뀌므로, $y=g(x)$의 그래프를 그리고 극값을 구하는 것을 목표로 풀이 방향성을 잡을 수 있다.

교과서적 해법

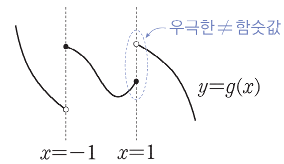
STEP 01 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$가 존재하기 위한 조건 찾기

(가)조건에서 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하려면 교과서 개념 미정계수의 결정 한완기 평수능 수학2 60p에 의해

$$\lim_{x\to a+}\{g(x)-g(a)\}=0 \quad\rightarrow\quad \lim_{x\to a+}g(x)=g(a)\ \cdots\ Ⓐ$$



이때 함수 $g(x)$는 세 구간 $x<-1$, $-1\le x\le 1$, $x>1$에서 각각 연속이므로, 그래프를 적당히 그려보면 $a=1$을 제외한 모든 실수 a에 대해서 항상 Ⓐ를 만족시키는 것을 알 수 있다.



즉, $a=1$일 때에만 Ⓐ를 확인해 보면

$$\lim_{x\to1+}g(x) = \lim_{x\to1+}\{f(x)+k\} = f(1)+k$$
$$g(1) = -f(1)$$
$$\Downarrow$$
$$f(1)+k=-f(1) \quad\rightarrow\quad k=-2f(1)\ \cdots\ Ⓑ$$

이어야 함을 알 수 있다.

STEP 02 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\le 0$ 이용하기

이제 (가)조건의 극한값이 항상 0 이하임을 이용하자.

$f(x)+k$, $-f(x)$는 각각 미분가능한 함수이므로 $x=\pm1$을 제외하면 $g(x)$는 미분가능하다.

따라서 $a\ne\pm1$일 때 평균변화율의 극한값인 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값은 미분계수인 $g'(a)$와 같고, 이 값이 항상 0 이하이므로

$$g'(x) = \begin{cases} f'(x) & (|x|>1) \\ -f'(x) & (|x|<1) \end{cases} \le 0$$
$$\rightarrow\ |x|>1:\ f'(x)\le 0,\quad |x|<1:\ f'(x)\ge 0$$

이다.★)

STEP 03 $f'(0)=6$을 활용하여 $f(x)$ 구하기

도함수 $f'(x)$의 부호가 $x=\pm1$을 기준으로 바뀌므로 $f'(1)=f'(-1)=0$이고, 인수정리에 의해

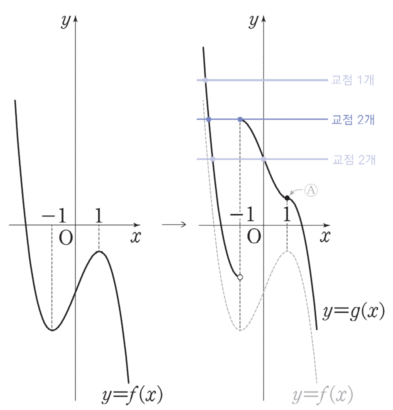
$$f'(x)=\alpha(x-1)(x+1)$$

이라 쓸 수 있다. 이제 $f'(0)=6$임을 이용하면 다음을 얻는다.

$$f'(0) = -\alpha = 6 \rightarrow \alpha=-6$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x)=-6x^2+6$$
$$\rightarrow f(x)=-2x^3+6x+C \quad (C\text{는 적분상수})$$

STEP 04 그래프 개형을 통해 (나)조건 해석하기

이제 그래프를 통해 (나)조건을 해석하자. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프를 기반으로 Ⓐ를 고려하여 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



그래프에서 방정식 $g(x)=t$의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t의 최댓값은 $t=g(-1)$임을 알 수 있으므로

$$g(-1) = -f(-1) = 4-C = 13$$
$$\rightarrow C=-9$$
$$\rightarrow f(x)=-2x^3+6x-9$$

이고, Ⓑ에 의해

$$k = -2f(1) = 10$$

이다.

$$\therefore k+f\left(\frac{1}{2}\right) = 10+\left\{-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-9\right\} = \frac{15}{4}$$

흐름 정리 풀이의 전체적인 흐름을 큰 그림으로 다시 정리하는 과정

STEP 01 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$가 존재하기 위한 조건 찾기

① 분모가 0으로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴한다.
즉, $\lim_{x\to a+} g(x)=g(a)$이어야 한다.

② $g(x)$는 $x=\pm1$을 제외한 구간에서는 연속함수이므로 확인할 필요가 없고, 세 범위 $x<-1$, $-1\le x\le1$, $x>1$에서 등호의 위치를 고려하면 $x=1$에서만 확인하면 됨을 알 수 있다.

STEP 02 $\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\le0$ 이용하기

① 평균변화율의 극한이므로 미분계수로 해석하는 것이 자연스럽다.

② $x\ne\pm1$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하므로
각각에서의 우미분계수와 좌미분계수가 서로 같다.

STEP 03 $f'(0)=6$을 활용하여 $f(x)$ 구하기

① 극한값을 계산하면 $f'(x)$의 부호가 $x=\pm1$에서 바뀜을 알 수 있고, 인수정리를 활용해 $f'(x)$의 식을 세울 수 있다.

② 도함수의 식을 찾았으므로 적분하여 $f(x)$도 쉽게 구할 수 있다.

STEP 04 그래프 개형을 통해 (나)조건 해석하기

① 방정식 $g(x)=t$의 실근의 개수는
곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 개수이다.

② $y=f(x)$의 그래프 개형을 기반으로 $y=g(x)$의 그래프도 그릴 수 있으므로, $y=t$를 움직여 보면 최대인 상황을 쉽게 찾을 수 있다.

논리적 정당화

★에서 $a=\pm 1$인 경우는 확인하지 않았는데, 주어진 조건은 모든 실수 a에 대하여 성립하는 것이므로 $a=\pm 1$인 경우도 모두 확인해야 한다. 각 구간의 끝점에 유의하여 식을 해석하면 다음과 같다.

$$\lim_{x \to a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$= (g(x) \text{의 우미분계수})$$
$$= \begin{cases} (f(x)+k \text{의 우미분계수}) & (a<-1 \text{ 또는 } a \geq 1) \\ (-f(x) \text{의 우미분계수}) & (-1 \leq a < 1) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} (f(x)+k \text{의 미분계수}) & (a<-1 \text{ 또는 } a \geq 1) \\ (-f(x) \text{의 미분계수}) & (-1 \leq a < 1) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f'(a) & (a<-1 \text{ 또는 } a \geq 1) \\ -f'(a) & (-1 \leq a < 1) \end{cases}$$

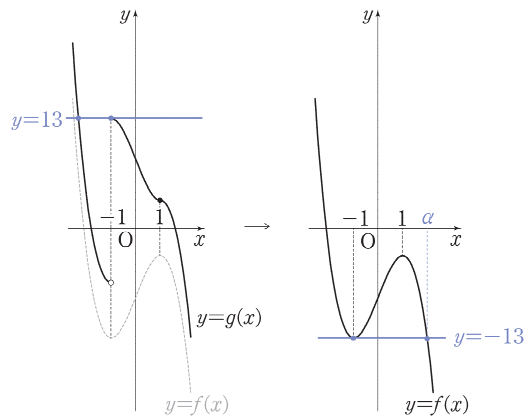
이 값이 항상 0 이하이므로

$$a<-1 \text{ 또는 } a \geq 1 \quad \rightarrow \quad f'(a) \leq 0$$
$$-1 \leq a < 1 \quad \rightarrow \quad -f'(a) \leq 0 \quad \rightarrow \quad f'(a) \geq 0$$

이 성립한다.

실전적 해법

교과서적 해법 의 STEP 02 까지, 즉 $f'(1)=f'(-1)=0$까지 알아냈다면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 모두 주어진 것이므로, $f(x)$를 직접 구하기 전에 교과서적 해법 의 STEP 04 와 같은 (나)조건 해석을 먼저 할 수도 있다.



왼쪽 그림과 같이 곡선 $y=-f(x)$가 $x=-1$에서 직선 $y=13$에 접하므로, 곡선 $y=f(x)$는 $x=-1$일 때 직선 $y=-13$과 접함을 알 수 있다.

또한 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-13$이 만나는 점 중 x좌표가 -1이 아닌 점의 x좌표를 α라 하면,

실전 개념 다항함수의 극값의 위치 한완기 수학2 Thema 29p

에 의하여 1은 -1과 α를 $2:1$로 내분하는 점이다. 따라서

$$\frac{2\alpha+1\cdot(-1)}{2+1}=1 \quad \rightarrow \quad \alpha=2$$

이고,

실전 개념 교점을 활용해 다항함수 식 세우기 한완기 수학2 Thema 39p

에 의하여

$$f(x)=p(x+1)^2(x-2)-13$$

이라고 쓸 수 있다. 이제 주어진 조건 $f'(0)=6$을 계산하면 $p=-2$를 얻는다. 이후의 풀이는 교과서적 해법 과 같다.

정답 ①

LECTURE 효율적으로 식 세우기 저자의 특강

다항함수의 식을 효율적으로 세우는 능력은 풀이 시간에 적지 않은 영향을 미친다.

주어진 조건을 어떻게 활용해야 할지, 어떻게 식을 세워야 이후의 계산이 줄어들지를 항상 생각해야 한다.

이 문항에서 '$f'(0)=6$인 삼차함수'만 보고

$$f(x)=ax^3+bx^2+6x+c$$

라 식을 세웠다면 이후의 계산이 비교적 불편했을 것이다.
조건을 충분히 해석하여 $f'(1)=f'(-1)=0$이라는 정보를 얻고 교과서적 해법 과 같이

인수정리를 이용해 $f'(x)=\alpha(x-1)(x+1)$이라고 세워서 적분하는 방법,

그리고 실전적 해법 과 같이

삼차함수 자체의 성질이나 공식을 활용하는 방법

등 이외에도 다양한 방법이 있을 수 있다.

모든 문항에 통하는 방법은 없다. 다양한 방법을 익히고, 스스로 식을 세워보는 연습을 쌓아 상황마다 최적의 방향을 찾는 능력을 키워두자.

「260621」 모든 실수에 대하여 존재하는 극한

2026학년도 6평
공통 21번 문항

정답률 26%

함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$ 와 최고차항의 계수가 1 인 사차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 a 에 대하여
> $\lim_{x \to a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}$ 의 값과 $\lim_{x \to a} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$ 의 값이
> 모두 존재한다.

$g(-1)$ 의 값을 구하시오. [4점]

교과서적 요소
- 미정계수의 결정

수능·실전적 요소
- 교점으로 식 세우기 한완수·한완기
- 인수의 개수 한완수·한완기
- 0으로 가는 속도 한완수·한완기

이해원 N제 연계
- 시즌1 수학2
  #01 #14 #28 #30 #37 #43 #60
  #63 #66 #74 #90

GLIMPSE 최상위권이 발문만 힐끗 보고 하는 생각

❶ 사차함수 $g(x)$ 를 결정하려면?

최고차항의 계수가 1 인 것까지 주어졌으니, $g(x)$ 에 대한 조건 4 개만 더 찾으면 $g(x)$ 의 식을 정확히 구할 수 있다.

❷ 모든 실수에 대하여 존재하는 극한

실수 전체의 집합을 다 조사할 수는 없으니, 극한값이 존재하지 않을 가능성이 있는 후보만 추리자.
두 극한식의 분모·분자가 모두 연속인 함수이므로 분모가 0 인 점, 즉 $f(x)=0$ 과 $g(x)=0$ 인 점만 생각하면 된다.

❸ 절댓값이 신경 쓰이는데...

절댓값이 나오면 부호에 따라 절댓값을 벗겨낼 생각을 하면 된다.
극한의 존재성을 확인하기 위해 우극한과 좌극한으로 나누어 접근하면 절댓값을 벗겨낼 수 있다.

— NOTE

본인의 풀이를 컴팩트하게 작성해 보세요.

COMMENT 인터그레이트의 코멘트

모든 실수에 대하여 극한값이 존재한다는 조건이 주어진 문항입니다.

이 유형에 익숙한 분들이라면, 분수 꼴 함수의 극한값이 존재하려면 분모를 0으로 만드는 인수가 분자에 의해 반드시 약분을 통해 제거되어야 함을 잘 알고 있을 것입니다. 평가원에서는 이미 이 원리를 여러 차례 출제하였고, 이제는 이를 당연한 배경지식으로 전제한 채 문항을 더욱 복잡하게 진화시키고 있습니다.

「260621」의 경우 분자에 절댓값을 포함함으로써, 인수의 약분뿐만 아니라 좌극한과 우극한에서의 부호까지 고려하도록 설계했습니다. 이어지는 「260621」 **분석**과 「260621」 **해법**과 더불어 여러 기출 문항들을 유기적으로 학습하여, 해당 유형에 대한 깊이 있는 통찰을 얻으시길 바랍니다.

APPENDIX 참고 콘텐츠

한완수	· 수학2(상) 12p,	Chapter A 함수의 극한
	· 수학2(하) 62p,	TOPIC 05 인수의 개수
	· 수학2(하) 82p,	TOPIC 06 인수의 개수와 그래프
	· 수학2(하) 90p,	TOPIC 07 인수의 개수와 필요충분조건
	· 수학2(하) 100p,	TOPIC 08 극한의 속도와 직관
한완기	· 수학2 평수능 58p,	Pattern 02 모두 수렴하는 함수로 표현하여 극한값을 구하라!
	· 수학2 Thema 8p,	Thema 02 0/0꼴 극한의 일반화와 인수의 개수
	· 수학2 Thema 30p,	Thema 08 다항함수에서 길이 암산
이해원 N제	· 시즌1 수학2	#01 #14 #28 #30 #37 #43 #60 #63 #66 #74 #90

REACTION 시험 당일 수험생들의 생생한 반응

1,119 457 7.5만

lhw_math님 외 **27.7만명**이 풀었습니다

#절댓값함수 #극한 #극한값존재

06r0rx 113
절댓값 극한을 한번이라도 접해봤다면 빠르게 해결 가능
답글 달기

dogixmylife 84
N제에서는 단골유형이라 반가웠음ㅋㅋ (그래놓고 틀린건 안비밀)
답글 달기

06r0rx 103
@dogixmylife 그런건 좀 비밀로 해라
답글 달기

do___hyxn 62
예비시행 28번에 비슷한게 있어서 절댓값 제곱인수 문제를 왜 연속으로 내지 의아했던
답글 달기

w00ri 71
깊이가 하나도없어서 엥??스러웠던 문제
답글 달기

「260621」 분석

1. 모든 실수에 대하여 극한값이 존재할 때

「260621」처럼 어떤 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$의 값이 존재한다.

라는 조건이 주어진 문제를 보면 어떤 행동을 해야 할지 정리해 봅시다. 당연하게도, a에 무한한 실수를 전부 대입해 볼 수는 없습니다. 이 대신

'$\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$가 존재하지 않을 가능성이 있는 실수 a'

를 찾아 대입하여, 극한값이 존재하기 위한 조건을 따지는 것이 합리적입니다. 위와 같은 실수 a의 후보를 어떻게 찾을지 함께 생각해 봅시다.

먼저, 다음의 경우에는 무조건 $\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$의 값이 존재합니다.

$\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a} g(x)$가 모두 존재하고, $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$, $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$인 경우

따라서 이를 뒤집어서 생각하면 **'극한이 존재하지 않을 수도 있는 경우'** 는 다음의 두 가지뿐입니다.

① $\lim_{x \to a} f(x)$ 또는 $\lim_{x \to a} g(x)$가 존재하지 않는 경우

② $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ 또는 $\lim_{x \to a} g(x) = 0$인 경우

이제 각각의 경우를 자세히 살펴봅시다.

① $\lim_{x \to a} f(x)$ 또는 $\lim_{x \to a} g(x)$가 존재하지 않는 경우

$\lim_{x \to a} f(x)$ 또는 $\lim_{x \to a} g(x)$가 존재하지 않는 경우는 좌·우극한이 모두 존재하는 경우, 둘 중 하나가 발산하는 경우 등 따져야 하는 상황이 매우 복잡합니다. 따라서 이러한 실수 a를 발견하면 반드시 대입하여 극한을 계산해 보아야 합니다.

② $\lim_{x \to a} f(x)=0$ 또는 $\lim_{x \to a} g(x)=0$ 인 경우

각 함수의 극한값이 0 인 경우와 $k\,(k \neq 0)$ 인 경우로 나누어 생각해 보면 다음과 같습니다.

$\lim_{x \to a} f(x)$	$\lim_{x \to a} g(x)$		$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)}$
0	0	$\rightarrow$	알 수 없음
0	k	$\rightarrow$	존재하지 않음
k	0	$\rightarrow$	0

이 중 $\lim_{x \to a} f(x)=k$, $\lim_{x \to a} g(x)=0$ 인 경우는 **항상** $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)}=0$ 이므로 극한이 존재합니다. 즉, 극한이 존재하지 않거나, 존재하지 않을 가능성이 있는 경우는 위의 표에서 색칠한 두 경우입니다. 이는 모두 $\lim_{x \to a} f(x)=0$ 인 경우이므로 **'$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)}$ 가 존재하지 않을 가능성이 있는 경우'** 는 다음뿐입니다.

① $\lim_{x \to a} f(x)$ 또는 $\lim_{x \to a} g(x)$ 가 존재하지 않는 경우

② $\lim_{x \to a} f(x)=0$ 인 경우

$\lim_{x \to a} g(x)=0$ 인 경우도 극한이 존재하지 않을 수 있지만 그때는 반드시 $\lim_{x \to a} f(x)=0$ 이어야 합니다.
즉, $\lim_{x \to a} g(x)=0$ 인 경우가 $\lim_{x \to a} f(x)=0$ 인 경우에 포함된 것으로 이해하면 됩니다.

정리하면, **'분모·분자의 극한이 존재하지 않는 경우'** 또는 **'분모의 극한값이 0 인 경우'** 를 조사한다고 기억하면 됩니다. 특히, 「260621」에서는 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모두 다항함수로 주어졌으므로

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} \text{ 에서는 } \lim_{x \to a} f(x)=0 \text{ 인 경우,}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)} \text{ 에서는 } \lim_{x \to a} g(x)=0 \text{ 인 경우}$$

만 찾아 극한이 존재하는 조건을 따지면 됩니다. 즉, 다항함수는 **'분모·분자의 극한이 존재하지 않는 경우'** 가 없으므로 각각의 분수식에서 **'분모의 극한값이 0 인 경우'** 만 조사해 보면 된다는 것입니다.

'극한값의 존재성'은 **2026학년도 모의평가, 수능**에서 빠지지 않고 출제되었고, 지금까지 배운 원칙만으로 충분합니다. 이를 다음과 같이 한 문장으로 요약하여 기억해 둡시다.

(분모·분자 극한 존재 X) 또는 (분모=0)인 경우만 보면 된다

「260621」 해법

「260621」 한완기 해법
《한권으로 완성하는 기출》의 요소들로 쓰인 해법입니다.
최대한 다양한 풀이를 익히며 여러 가지 도구를 연습하도록 합시다.

21

함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$ 와 최고차항의 계수가 1 인 사차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 a 에 대하여
> $\lim_{x \to a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}$ 의 값과 $\lim_{x \to a} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$ 의 값이 모두 존재한다. ①②

$g(-1)$ 의 값을 구하시오. [4점]

발문 분석 발문을 읽으며 할 수 있는 생각, 해야 하는 생각

① 절댓값을 대하는 자세
절댓값 기호를 보면 기본적인 접근 방법으로 '부호 나누기'를 떠올려야 한다. 그래프의 관찰이 필요할 수도 있으니 'x축 아래 부분을 접어올리기(절댓값 함수의 그래프)'도 고려하자.

② '존재한다.'라는 조건
'존재한다.'라는 조건이 주어졌다는 것은 '일반적으로는 존재하지 않을 수 있다.'는 것을 내포한다. 즉, 존재하지 않는 상황을 확인해야 존재하기 위한 조건을 찾을 수 있을 것이다. 극한의 경우 분모가 0 이 되는 경우가 중요할 것이다.

교과서적 해법

STEP 01 첫 번째 극한값이 항상 존재하기 위한 조건 찾기

먼저 주어진 식에 $f(x)=(x-1)(x-2)$ 를 대입하자.

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g(x) \times |(x-1)(x-2)|}{(x-1)(x-2)} \cdots Ⓐ$$

$$\lim_{x \to a} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{|g(x)-(x-1)(x-2)|}{g(x)} \cdots Ⓑ$$

Ⓐ를 먼저 살펴보면 분모가 0 인 지점($x=1$, 2)이 중요하고, 그 외의 지점에서는 극한값이 항상 존재함을 알 수 있다.

$a=1$ 의 경우,

$1<x<2$ 에서 $(x-1)(x-2)<0$
$x<1$ 에서 $(x-1)(x-2)>0$

이므로 좌·우극한을 살폈을 때

$$\lim_{x \to 1-} \frac{g(x) \times |(x-1)(x-2)|}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1-} \frac{g(x) \times (x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = g(1)$$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{g(x) \times |(x-1)(x-2)|}{(x-1)(x-2)} = -\lim_{x \to 1+} \frac{g(x) \times (x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = -g(1)$$

이므로 $x=1$ 에서의 극한값이 존재하려면

$$g(1)=-g(1) \quad \rightarrow \quad g(1)=0$$

이어야 한다. 같은 이유로 $a=2$ 일 때도 $g(2)=0$ 이란 결론을 얻을 수 있다. 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 사차함수이므로

$g(x)=(x-1)(x-2)h(x)$
($h(x)$: 최고차항의 계수가 1 인 이차함수)

로 식을 세울 수 있다.

STEP 02 두 번째 극한값이 항상 존재하기 위한 조건 찾기

$g(x)=(x-1)(x-2)h(x)$를 Ⓑ에 대입하면

$$\text{Ⓑ} = \lim_{x\to a}\frac{|(x-1)(x-2)h(x)-(x-1)(x-2)|}{(x-1)(x-2)h(x)}$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{|(x-1)(x-2)|\times|h(x)-1|}{(x-1)(x-2)h(x)}$$

이다. 가장 먼저 $a=1$일 때 좌·우극한을 살펴보면

$$\lim_{x\to 1-}\frac{|(x-1)(x-2)|\times|h(x)-1|}{(x-1)(x-2)h(x)}$$
$$= \lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(x-2)\times|h(x)-1|}{(x-1)(x-2)h(x)}$$
$$= \lim_{x\to 1-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{|(x-1)(x-2)|\times|h(x)-1|}{(x-1)(x-2)h(x)}$$
$$= -\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(x-2)\times|h(x)-1|}{(x-1)(x-2)h(x)}$$
$$= -\lim_{x\to 1+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

이다. 즉, $x=1$에서의 극한값이 존재하려면

$$\lim_{x\to 1-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)} = -\lim_{x\to 1+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)} \quad \cdots \text{Ⓒ}$$

이어야 하는데, $h(1)=0$이면 $|h(1)-1|\neq 0$이므로 극한값이 존재하지 않고, $h(1)\neq 0$이면 함수 $\dfrac{|h(x)-1|}{h(x)}$이 $x=1$에서 연속이므로 좌·우극한이 같아야 한다. 따라서

$$\text{Ⓒ} \Leftrightarrow h(1)\neq 0\text{이고 } \lim_{x\to 1}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=0 \Leftrightarrow h(1)=1$$

이고, 같은 이유로 $a=2$에서 $h(2)=1$이라는 결론을 얻을 수 있다. 따라서

$h(x)=(x-1)(x-2)+1 \quad \cdots$★)

$\rightarrow \ g(x)=(x-1)(x-2)\{(x-1)(x-2)+1\}$

$\rightarrow \ g(-1)=(-2)\cdot(-3)\cdot\{(-2)\cdot(-3)+1\}=42$

논리적 정당화

★에서

Ⓑ의 분모인 $(x-1)(x-2)h(x)$ 중 $(x-1)(x-2)=0$

인 상황만 확인하고 정답을 얻을 수 있었다. $h(x)=0$인 x에 대해서도 검증해 보자.

$$h(x) = (x-1)(x-2)+1 = x^2-3x+3$$

인데, 판별식을 세우면

$$D = (-3)^2-4\cdot1\cdot3 = -3 < 0$$

이다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이므로 Ⓑ의 분모는 $x=1$, $x=2$에서만 0이 되는 것을 알 수 있다.

흐름 정리 풀이의 전체적인 흐름을 큰 그림으로 다시 정리하는 과정

STEP 01 첫 번째 극한값이 항상 존재하기 위한 조건 찾기

① 분모가 0인 지점을 관찰해야 한다.
이때 $f(x)=(x-1)(x-2)$가 주어져 있으므로
$x=1$, $x=2$일 때부터 관찰을 시작하면 된다.

② $a=1$인 경우, 절댓값이 주어져 있으므로 $x<1$, $1<x<2$로 경우를 나누어 차근히 좌·우극한을 계산하면 $g(1)=0$을 얻는다.
$a=2$인 경우에도 같은 방법으로 $g(2)=0$이다.

③ 인수정리를 이용하여 $g(x)=(x-1)(x-2)h(x)$로 식을 세울 수 있다.

STEP 02 두 번째 극한값이 항상 존재하기 위한 조건 찾기

① $g(x)=(x-1)(x-2)h(x)$를 대입하면 첫 번째 극한과 거의 같은 형태의 식인
$$\lim_{x\to a}\frac{|(x-1)(x-2)|\times|h(x)-1|}{(x-1)(x-2)h(x)}$$
로 변형할 수 있다.

② 같은 방법으로 $a=1$, 2인 경우에 범위를 나누어
좌·우극한을 계산하면 $h(1)-1=h(2)-1=0$을 얻고,
마찬가지로 인수정리를 이용하면
$h(x)-1=(x-1)(x-2)$
임을 알 수 있다.

③ 완벽하게 풀기 위해서는 $h(x)=0$이 되는 x의 값이 더 이상 존재하지 않음을 논리적 정당화와 같이 확인해야 한다.

실전적 해법

'절댓값이 포함된 극한'을 간단한 예시를 통해 다항함수의 그래프 및 미분의 관점에서 이해해 보자.

$\lim_{x\to 0}\frac{|x|\times f(x)}{x}$ 의 값이 존재

$\Leftrightarrow$ 함수 $|x|f(x)$가 $x=0$에서 미분가능

함을 의미한다. 이때

$$|x|f(x)=\begin{cases} xf(x) & (x\ge 0) \\ -xf(x) & (x<0)\end{cases}$$

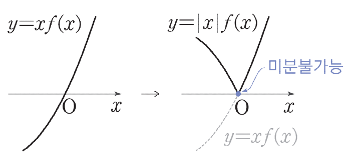
$\rightarrow$ $y=|x|f(x)$의 그래프는 곡선 $y=xf(x)$를 $x<0$인 부분만 x축에 대하여 대칭이동한 것

이다. 즉, $\lim_{x\to 0}\frac{|x|\times f(x)}{x}$ 의 값이 존재한다는 것은

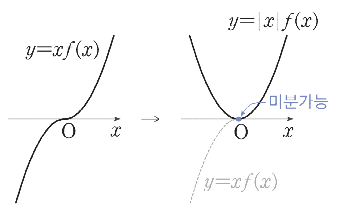
곡선 $y=xf(x)$를 한쪽만 뒤집어도 미분가능

하다는 것이다. 이러한 상황을 그래프에서 생각해 보면 그림의 ②와 같이 함수 $y=xf(x)$의 그래프가 $x=0$에서 x축과 접함을 알 수 있다.

①



②



이를

실전 개념 **교점을 활용해 다항함수 식 세우기** 한완기 수학2 Thema 39p

의 관점에서 보면

뒤집히기 전의 함수 $xf(x)$가 x^2을 인수로 갖는다

고 할 수 있다. 즉, 절댓값이 포함된 극한에서

절댓값에 의해 그래프가 뒤집히는데도 미분가능하다면
뒤집히기 전의 그래프가 x축과 접함

을 알 수 있다. 이 내용을 활용해 보자.

먼저 $a=1$일 때

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)\times|(x-1)(x-2)|}{(x-1)(x-2)}$$

의 값이 존재함을 이용하자. 이때 $\frac{|x-2|}{x-2}$는 극한의 수렴 여부에 영향을 주지 않으므로 $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)|x-1|}{x-1}$ 의 수렴성만 확인하면 된다.

$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)|x-1|}{x-1}$ 의 값이 존재

$\rightarrow$ $x=1$의 좌우에서 그래프가 뒤집혀도 미분가능

$\rightarrow$ $(x-1)g(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가짐

$\rightarrow$ $g(x)$가 $(x-1)$을 인수로 가짐

을 알 수 있다. 마찬가지로 극한

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)\times|(x-1)(x-2)|}{(x-1)(x-2)}$$

에서 $\frac{|x-1|}{x-1}$은 수렴하므로 무시하면

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)|x-2|}{x-2}$ 의 값이 존재

$\rightarrow$ $g(x)$가 $(x-2)$를 인수로 가짐

을 알 수 있다. 따라서 교과서적 해법 과 같이 $g(x)$의 식을

$$g(x)=(x-1)(x-2)h(x)$$

로 세울 수 있다.

이번에는

$$\lim_{x \to a} \frac{|(x-1)(x-2)| \times |h(x)-1|}{(x-1)(x-2)h(x)}$$

의 값이 존재한다는 조건을 앞의 방법과

실전 개념 인수의 개수 한완기 수학2 Thema 11p

를 활용하여 해석해 보자.

$x \to 1$ 일 때 극한의 수렴 여부에 영향을 주지 않는 항 $\frac{|x-2|}{x-2}$ 를 무시하고 보면

$\lim_{x \to 1} \frac{|x-1| \times |h(x)-1|}{(x-1)h(x)}$ 의 값이 존재

→ (분자의 $(x-1)$ 의 개수) > (분모의 $(x-1)$의 개수)

→ $h(1) \neq 0$, $h(x)-1$ 이 $(x-1)$ 을 인수로 가짐

이라는 결론으로 이어진다. $x \to 2$ 일 때에도 마찬가지로

$\lim_{x \to 2} \frac{|x-2||h(x)-1|}{(x-2)h(x)}$ 의 값 존재

→ $h(x)-1$ 이 $(x-2)$ 를 인수로 가짐

을 알 수 있다. 따라서 교과서적 해법 과 같이 $h(x)$ 의 식을

$$h(x)-1=(x-1)(x-2) \quad \to \quad h(x)=(x-1)(x-2)+1$$

로 세울 수 있다. 나머지 풀이는 교과서적 해법 과 같다.

정답 42

2026학년도 6평
공통 22번 문항

정답률 6%

$k>1$ 인 실수 k에 대하여 두 곡선

$$y=2^x+\frac{k}{2},\quad y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

가 만나는 점을 A 라 하고, 점 A 를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 곡선 $y=2^{x-2}-3$ 과 만나는 점을 B 라 하자.

삼각형 AOB 의 넓이가 16 일 때, $k+\log_2 k=\frac{q}{p}$ 이다.

$p+q$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

교과서적 요소
- 지수함수의 그래프
- 곡선의 평행이동
- 지수방정식

수능·실전적 요소
- 선분은 평행이동이다 한완수
- 풀 수 없는 방정식 한완수

이해원 N제 연계
- 시즌1 수학1
  #07 #14 #21 #26 #30 #34 #40
  #50 #58 #60 #81 #86 #90

GLIMPSE 최상위권이 발문만 힐끗 보고 하는 생각

❶ 점 A

두 곡선 $y=2^x+\frac{k}{2}$, $y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$를 연립해서 풀면 점 A 의 좌표를 k에 대하여 나타낼 수 있다.
당장 구할 필요는 없고, '필요할 때' 구하면 된다.

❷ 기울기가 -1 인 직선

기울기가 -1 인 직선은 매우 특별한 직선이다. 대칭성, 평행이동 등 여러 가지와 연결지어 생각할 수 있다.
그냥 계산을 위해 준 것일 수도 있겠지만, 무언가 숨겨진 의도가 있을 수도 있다.

❸ 삼각형 AOB 의 넓이

삼각형의 넓이를 구하는 방법에는 여러 가지가 있다. 그 중 무엇이 계산이 가장 적을지 잘 선택해야 한다.
가장 기본적인 방법인 $\frac{1}{2}\times$(밑변)$\times$(높이)부터 생각하며 가장 효율적으로 구해낼 생각을 하자.

❹ 묻는 값 $k+\log_2 k$

k의 값이 깔끔하게 구해진다면 굳이 묻는 값을 이렇게 꼬아둘 리 없으므로, 어쩌면 $k+\log_2 k$의 값이 통째로 구해지며 풀릴 수도 있다. '풀 수 없는 방정식'에서 k의 존재성만 알 수 있고, 식 변형을 통해 $k+\log_2 k$의 값만을 구할 수 있는 경우는 아닐까?

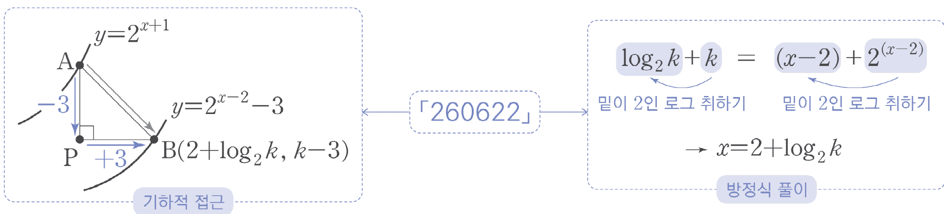
— NOTE

본인의 풀이를 컴팩트하게 작성해 보세요.

COMMENT 인터그레이트의 코멘트

평가원의 22번 중 첫 번째 지수·로그함수의 그래프 문항입니다. 이 문항은 점 B의 좌표를 구할 때 다음과 같이 두 가지 접근 방법이 존재한다는 것이 주목할 만한 학습 포인트입니다.

① 기하적 접근
② 방정식 풀이



문제를 풀며 위의 두 방법이 무엇을 뜻하는지 아직 파악하지 못했다면 먼저 스스로 다시 한번 풀어 보며 고민해 보고, 그래도 잘 모르겠다면 다음 페이지부터 나올 「260622」 분석과 「260622」 해법을 참고하며 깨닫도록 합시다.

APPENDIX 참고 콘텐츠

한완수	· 수학1(하) 34p,	TOPIC 02 지수·로그함수와 직선
	· 수학1(하) 91p,	공부법 시리즈 - 문제를 대하는 유연한 태도
	· 수학1(하) 92p,	TOPIC 07 풀 수 없는 방정식
	· 수학1(하) 98p,	공부법 시리즈 - 발상적 풀이를 대하는 태도
한완기	· 수학1 평수능 84p,	Pattern 04 지수·로그함수는 정점, 점근선, 역함수 관계가 핵심이다.
이해원 N제	· 시즌1 수학1	#07 #14 #21 #26 #30 #34 #40 #50 #58 #60 #81 #86 #90

REACTION 시험 당일 수험생들의 생생한 반응

1,119 457 7.5만

lhw_math님 외 27.7만명이 풀었습니다

#지수함수 #로그함수 #평행이동

do__hyxn 1,111
기울기 -1인거 보고 평행이동량 찍어서 맞춤ㅋㅋ
답글 달기

0wansoo 161
난 신유형에 약해서 개어려웠음;; 나중에 분석할때도 한참걸림
답글 달기

nanun_heosoo 124
@0wansoo 22번 공부 많이 된다...스트레스 많이 받을거야..
답글 달기

0wansoo 61
@nanun_heosoo 안돼..제발 22번에 얌전히 수2 내줘ㅠㅠㅠㅠ
답글 달기

zx_adv 204
처음 봤을 때 22번 지로함이라는게 그냥 웃겼음ㅋㅋ 풀고나서도 이걸 왜낸건지 모르겠음
답글 달기

dogixmylife 187
봤을때 되게 특이할꺼 없이 쉬워보였는데 막상 풀어보니까 숨이 턱 막힘
답글 달기

「260622」 분석

1. 자취의 방정식

「260622」에서 점 A의 좌표를 구하기 위해 주어진 두 곡선을 연립하면

$$2^x + \frac{k}{2} = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 2$$

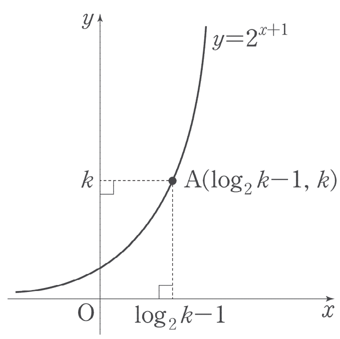
를 얻습니다. 이를 풀면 $x = \log_2 k - 1$이므로 $\mathrm{A}(\log_2 k - 1,\ k)$입니다. 이때 점 A의 x좌표와 y좌표 사이의 관계를 알면, **점 A가 어떤 곡선 위의 점**인지도 알 수 있습니다. 즉

$$x = \log_2 k - 1,\ \ y = k$$

라 두고 y를 x에 대한 식으로 나타내면 됩니다. $x = \log_2 k - 1 = \log_2 \frac{k}{2}$이므로 $2^x = \frac{k}{2}$입니다. 따라서

$$y = k = 2 \times \frac{k}{2} = 2 \times 2^x = 2^{x+1}$$

이 되어 **점 A가 곡선 $y = 2^{x+1}$ 위의 점**임을 알 수 있습니다.

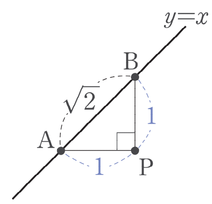


이와 같이 일정한 규칙을 만족하며 움직이는 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 자취를 x와 y의 관계식으로 나타낸 것을 **'자취의 방정식'**이라 합니다.

이렇게 점 A의 자취의 방정식을 이용하면 점 B의 좌표를 곡선의 평행이동을 통해 구할 수 있습니다. 갑자기 자취의 방정식이 튀어나와 당황했을 수 있지만, 「260622」를 기하학적으로 접근할 수 있게 해주는 관점이므로 해당 풀이도 반드시 익혀두도록 합시다.

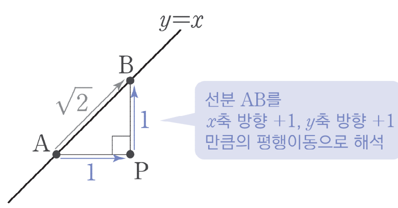
2. 선분은 평행이동이다

직선 $y=x$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$ 라 합시다.
오른쪽 그림과 같이 점 P를 잡으면 직선 $y=x$ 의 기울기가 1이므로
$\angle \mathrm{BAP}=45^\circ$ 이고, 따라서 ◺APB에서



$$(\text{밑변}):(\text{높이}):(\text{빗변}) = \overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{AB}} = 1:1:\sqrt{2}$$

입니다. 그러므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$ 로부터 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=1$ 임을 알 수 있습니다. 즉, 직선의 기울기와 선분의 길이가 주어지면 두 점의 'x좌표차'와 'y좌표차'를 알아낼 수 있는 것입니다.



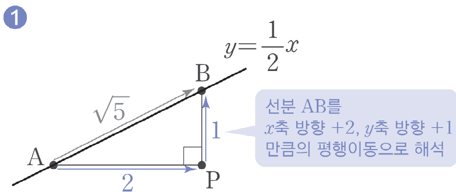
'x좌표차'와 'y좌표차'를 구하여 위와 같이 **선분을 좌표축 방향의 평행이동으로 분해한다**고 생각하면 더욱 직관적으로 이해할 수 있을 것입니다. 위와 같이 기울기가 1이고 길이가 $\sqrt{2}$ 인 선분 AB를 보면서

> 선분 AB는 x축의 방향으로 1, y축의 방향으로 1만큼의 평행이동으로 볼 수 있어!

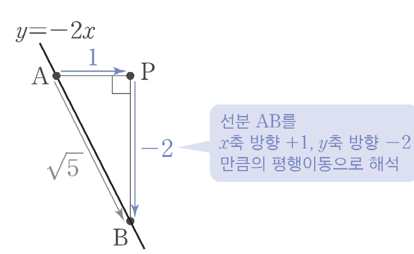
라는 발상을 떠올릴 수 있으면 됩니다.

Sample Case

❶



❷



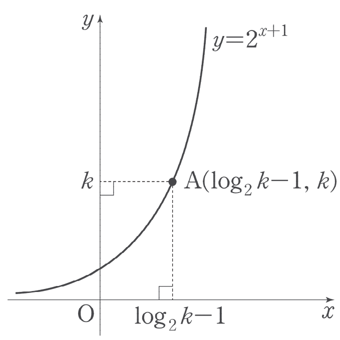
직선의 기울기와 선분의 길이가 주어지는 상황은 그 자체로는 지수·로그함수와 직접적인 연관이 있다고 보기 어렵지만, 지수·로그함수 평가원 기출 문항에서 수상할 정도로 자주 출제된 바 있습니다.

「260622」도 이러한 관점으로 문제를 풀이할 수 있었습니다. 다음 페이지에서 함께 확인해 봅시다.

> $k>1$인 실수 k에 대하여 두 곡선
>
> $$y=2^x+\frac{k}{2}, \quad y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$
>
> 가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=2^{x-2}-3$과 만나는 점을 B라 하자.
>
> 삼각형 AOB의 넓이가 16일 때, $k+\log_2 k=\frac{q}{p}$이다.
>
> $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2026학년도 6월 모의평가 공통 22번

1. 자취의 방정식에서도 분석했듯 점 A는 함수 $y=2^{x+1}$의 그래프 위의 점입니다.

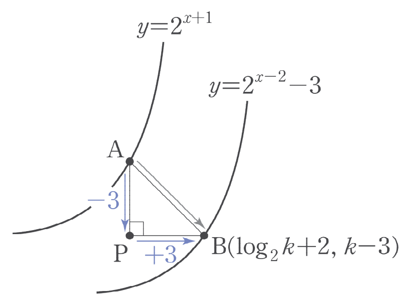


이때 점 B를 정의할 때 나오는 곡선인 $y=2^{x-2}-3$을 생각해 보면 방금 생각한 곡선 $y=2^{x+1}$을

x축 방향으로 3, y축 방향으로 -3만큼 평행이동

시킨 것입니다. 이 평행이동은

기울기가 -1인 어떤 직선



과 연결지어 해석할 수 있습니다. 그리고 조건을 다시 보면, 역시 기막힌 우연처럼 기울기가 -1인 직선이 이미 주어져 있음을 확인할 수 있습니다. 평행이동은 선분이라는 관점으로 해석하면 위 그림과 같이

점 B는 점 A를 x축 방향으로 3, y축 방향으로 -3만큼 평행이동한 점

임을 알 수 있습니다. 즉, 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(\log_2 k+2,\ k-3)$이고, 이제 삼각형 AOB의 넓이가 16이라는 사실을 활용하여 $k+\log_2 k$의 값을 구하면 됩니다.

이처럼 **평행이동과 선분을 연결 짓는 관점은 평가원에서도 최근 들어 자주 활용하는 발상**입니다. 반드시 잘 학습하고 넘어갈 수 있도록 합시다.

3. 풀 수 없는 방정식

다음 방정식의 해를 어떻게 구할지 생각해 봅시다.

$$2^x = 2x$$

기본적으로 다항함수와 지수·로그·삼각함수가 함께 등장하는 방정식은 일반적으로 푸는 방법이 알려지지 않은, **'풀 수 없는 방정식'** 입니다. 그럼에도 최근 수능에서는 위와 같은 방정식의 실근을 구해야만 해결할 수 있는 문제들이 출제되고 있습니다.

위 방정식의 해를 하나 구하는 방법은 의외로 매우 간단합니다. **적당한 수를 대입해 보면** 됩니다. 주어진 식에 $x=1$ 을 대입해 보면 등식이 성립하므로 $x=1$ 이 방정식의 실근임을 알 수 있습니다.

동일한 방법으로 $x=2$ 도 이 방정식의 실근임을 알 수 있습니다.

이런 풀이 방법에 대하여 거부감이 드는 분도 있으실 겁니다.

그냥 찍어서 맞히라고?

운에 의존하는 풀이를 시험장에서 쓸 수 없지!

대부분의 수학 문제는 논리적 추론에 초점이 맞춰져 있기 때문에 그렇게 풀어야 한다는 고정관념이 생긴 것입니다. 그러나 방정식은 풀기만 하면 그만입니다. 그 과정에 멋진 논리적 추론이나 식의 변형이 있을 필요는 전혀 없으므로, 어떤 방식으로든 등호가 성립하도록 하는 x 의 값을 찾아 주면 됩니다.

삼차방정식

$$x^3-2x^2-5x+6=0$$

을 풀어 봅시다. 좌변을 보자마자 열심히 식을 변형하여

$$(x+2)(x-1)(x-3)=0$$

으로 인수분해하고 논리적으로 $x=-2,\ 1,\ 3$ 을 찾아내는 분은 거의 없을 것입니다. x^3-2x^2-5x+6 에 **적당히 $x=0,\ 1,\ \cdots$ 을 대입해 보며 $x=1$ 을 대입하면 0 이 되는 것을 알아내고, 조립제법을 통해 나머지 인수를 찾는 것**입니다.

교과서에서도 이러한 방법을 통해 삼차·사차방정식을 해결하도록 지도하고 있습니다. **적당한 수 대입하기**도 교과서 내용에 충실한 풀이 방법이라는 것을 알아둡시다.

$k>1$ 인 실수 k에 대하여 두 곡선

$$y=2^x+\frac{k}{2},\quad y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 곡선 $y=2^{x-2}-3$ 과 만나는 점을 B라 하자.

삼각형 AOB의 넓이가 16 일 때, $k+\log_2 k=\frac{q}{p}$ 이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2026학년도 6월 모의평가 공통 22번

앞에서도 풀었듯 「260622」에서 두 곡선 $y=2^x+\frac{k}{2}$, $y=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$ 의 방정식을 연립하여 점 A의 좌표를 구해 보면 $\mathrm{A}(\log_2 k-1,\ k)$입니다.

관건은 점 B의 x좌표를 구할 때입니다. 점 A를 지나고 기울기가 -1 인 직선 $y=-\left(x-\left(\log_2 k-1\right)\right)+k$가 곡선 $y=2^{x-2}-3$ 과 만나는 점이 B이므로 점 B의 x좌표는 다음 방정식을 만족시키는 x의 값입니다.

$$-\left(x+1-\log_2 k\right)+k=2^{x-2}-3 \quad\rightarrow\quad \log_2 k+k=x-2+2^{x-2}$$

역시 다항함수와 지수함수가 모두 포함된 '풀 수 없는 방정식'이지만, $x=2+\log_2 k$를 대입하면 양변이 같은 값이 되므로 $x=2+\log_2 k$가 실근임을 알 수 있습니다.

이때 $2+\log_2 k$라는 실근을 어떻게 **적당히 대입**해 본 것일까요? '대충 아무거나' 고른다고 찾을 수 있는 값은 아니고, 다음과 같이 **식의 형태**에 주목하여 추론해낸 것입니다.

$$\log_2 k+k=(x-2)+2^{(x-2)}$$

밑이 2인 로그 취하기 밑이 2인 로그 취하기

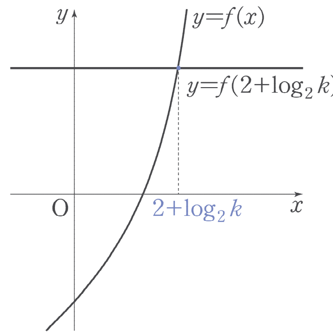
이처럼 양변이 완전히 같은 구조임을 눈치채고 나면

그냥 $(x-2)$ 랑 $\log_2 k$가 같으면 되는 거 아닌가?

라는 생각을 할 수 있고, 이로부터 $x=2+\log_2 k$라는 실근을 떠올릴 수 있는 것입니다.

또한, 찾아낸 실근 $x=2+\log_2 k$만으로 문제를 풀어나가려면 방정식 $\log_2 k+k=x-2+2^{x-2}$의 실근이 오직 $x=2+\log_2 k$ 하나뿐이라는 것도 확인해야 합니다. 다른 실근이 존재하면 생각해야 하는 상황이 하나 더 늘어나기 때문입니다. 이 유일성은 **함수의 성질**을 활용하면 알 수 있습니다. 편의상 $f(x)=x-2+2^{x-2}$이라 하고 방정식

$$f(x)=f(2+\log_2 k)$$



의 실근이 오직 하나뿐임을 보이면 됩니다. 그런데 $f(x)$는 명백하게 증가함수이므로[1], 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(2+\log_2 k)$는 오직 한 점에서만 만나는 것을 알 수 있습니다. 즉, 위 방정식의 실근은 오직 하나뿐입니다.

이처럼 '적당한 수'를 찾아 방정식을 풀 때에는 무작정 아무 숫자나 대입하는 것이 아니라 식의 형태, 함수 등의 도움을 받는 것이 중요합니다.

지금까지 '풀 수 없는 방정식'이 나오는 문제를 풀면서 다음과 같은 의문이 들었을 수 있습니다.

대입해서 해를 구할지, 관계식으로 풀지 어떻게 알지?
딱 보고 알 수 있는 방법은 없나?

결론부터 설명하면, 문제를 보자마자 방정식의 해를 구할 수 있는지 없는지 알 수 있는 방법은 없습니다. 물론 그냥 수학을 잘한다면 척 보고 해를 추론해 낼 수도 있겠지만, 일반적으로 이를 구분할 수 있는 방법은 없습니다. 결국, '풀 수 없는 방정식'이 등장하면 모든 가능성을 열어 두어야 하는 것입니다.

과거에는 '풀 수 없는 방정식'을 관계식으로 해석하면 풀리는 문제가 출제되었습니다. 하지만 최근에는 「260622」와 같이 식의 형태를 관찰해서 주어진 식을 만족하는 '적당한 수'를 찾아내야 풀리는 문제들이 출제되고 있습니다. 따라서 앞으로는 어떤 형태의 문제도 출제될 수 있다고 생각하고, 다양한 문제를 풀어보면서 스스로 판단할 수 있는 경험치를 쌓는 것이 중요합니다.

과거 VS 미래

학년도	출제요소
2021학년도	실제로 '풀 수 없는 방정식'을 출제하였고, 이는 관계식으로 끌고 가면 풀리는 문제였음.
2026학년도	복잡해서 실제로 풀리지 않는 것처럼 보였으나, 식의 형태를 관찰하여 적당한 수를 대입하면 풀리는 방정식이 출제됨.
미래	식의 형태가 복잡해질 수 있고, 관계식으로 푸는 경우와 해를 구할 수 있는 경우 모두가 출제될 수 있음.

최근에는 '풀 수 없는 방정식'이 등장했을 때, 해를 실제로 구할 수 있는지 판가름하기 어려운 문항도 출제되었습니다. 따라서 앞으로는 보다 복잡한 형태의 방정식도 출제될 가능성도 염두에 두고 대비해 두는 것이 좋습니다.

각주

1) 두 증가함수 $x-2$와 2^{x-2}을 더한 것이므로 당연히 증가합니다.

4. 발상적 풀이

「260622」에서 식의 형태로부터 추론하여 실근 $x=2+\log_2 k$를 찾아내는 과정은 다음 두 가지 때문에 대부분의 학생들이 발상적인 부담을 많이 느꼈을 것입니다.

① 방정식을 $\log_2 k+k=x-2+2^{x-2}$으로 변형하고 관찰할 생각 자체를 못함
② $\log_2 k+k=x-2+2^{x-2}$으로 두었다고 해도, 실수 k가 끼어 있어 매우 헷갈림

그러나 Integrity에서 소개한 풀이의 발상은

논리만 간결하게 정리한 결과

일 뿐입니다. 따라서 어렵게 느껴지는 것이 당연합니다. 여기서는 ①, ②에서 벽을 느끼고 포기하는 것이 아니라, 설명을 읽으며 **'나는 어디에서 막혔는가?'를 스스로 점검하는 것**이 중요합니다. 본인이 겪은 시행착오가 곧 '자신만의 필연적 발상'이기 때문입니다.

어떤 학생에게는 위의 ①, ②가 그리 어려운 과정이 아니라고 느껴질 수도 있습니다. 머릿속에서 매우 빠르게 암산하며 방정식을 여러 형태로 변형해 보고, 그중 가장 관찰하기 용이한 식인

$$\log_2 k+k=x-2+2^{x-2}$$

을 떠올려서, 결국 실근 $x=2+\log_2 k$가 금방 보였을 수도 있습니다.

반면 어떤 학생에게는 ①, ② 때문에 그 과정이 억지처럼 느껴졌을 수도 있습니다. 이미 $x=2+\log_2 k$가 실근이라는 사실을 알고 있는 상태에서 거꾸로 풀이를 끼워 맞추는 것처럼 보일 수도 있는 것입니다.

두 경우 모두 충분히 가능한 상황이며, 자신이 어느 쪽에 해당하는지는 전적으로 자신만이 압니다. 중요한 것은 ①, ②라는 벽을 느꼈을 때

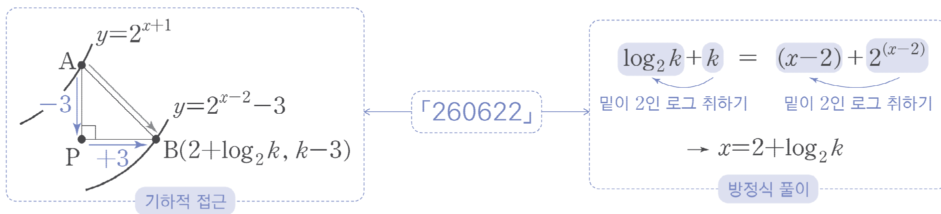
'저건 원래 보이는 사람만 할 수 있는 발상이지...'라고 넘기느냐,
'나는 어디에서 막혔고, 왜 여기서 그런 발상을 못했을까?'를 정리하며 넘어가느냐

입니다. 당연히 후자여야 합니다. 즉, 단순히 '못 풀어서 아쉽다'로 끝내는 것이 아니라, 무엇이 부족했는지 스스로 점검하고 돌아보는 **반성**이 반드시 필요한 것입니다. 이처럼 방향성이 확실한 반성을 꾸준히 해 나간다면, 앞으로 계속해서 수학 실력이 오를 것입니다.

좋은 반성 예시	암산이 빠른 애들은 식의 형태를 민감하게 관찰해서 저렇게도 해석하는구나. 나는 식의 형태를 보는 눈이 부족하구나. 앞으로 이 부분을 더 연습해야지.

5. 기하적 접근 vs 방정식 풀이

앞서 「260622」의 서로 다른 두 가지 풀이를 다루었습니다. 각각을 **'기하적 접근'**과 **'방정식 풀이'**라 부를 수 있고, 각각을 요약하면 다음 그림과 같습니다.



「260622」처럼 최근 평가원에서는 기하적 접근과 방정식 풀이가 모두 가능한 지수·로그함수 문항을 고난도로 출제하고 있습니다. 그렇다면, 다음과 같은 고민이 생길 수 있습니다.

'기하적 접근'과 '방정식 풀이' 중 어떤 풀이가 더 좋은 풀이일까?
난 시험장에서 어떤 풀이를 먼저 시도해야 하지?

결론부터 설명하자면, 각자 원하는 풀이를 선택하는 것이 좋습니다. 즉, 본인에게 '자연스럽게' 느껴지는 풀이를 먼저 구사할 수 있으면 됩니다. 각각의 풀이 중 어느 것이 편한지는 사람마다 달라서, 무엇이 옳은지를 따지는 것은 큰 의미가 없습니다.

대신, 최종 목표는 **'상황에 따라 기하적 관점과 방정식 관점을 자유롭게 넘나들 수 있는 능력'**을 기르는 것이어야 합니다. 당연한 말이지만, 문제마다 어떤 풀이가 편한지는 알 수 없습니다. 기하적 접근만으로 문제를 풀거나, 방정식 풀이로만 밀어붙이겠다는 것은 굳이 무기 하나를 버리겠다는 것과 같습니다. 진짜 고수는 두 관점을 모두 자신의 것으로 만들어 갈고 닦아둔 사람임을 명심합시다.

「260622」해법	**「260622」한완기 해법** 《한권으로 완성하는 기출》의 요소들로 쓰인 해법입니다. 최대한 다양한 풀이를 익히며 여러 가지 도구를 연습하도록 합시다.

교과서적 해법 1

주어진 정의에 따라 점 A의 좌표는 두 곡선의 방정식을 연립하여 구할 수 있다.

$$2^x+\frac{k}{2}=k\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+k-2$$

이때 $2^x=t$라 하면 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{t}$이므로

$$t+\frac{k}{2}=\frac{k}{t}+k-2 \;\rightarrow\; t^2+\left(2-\frac{k}{2}\right)t-k=0$$
$$\rightarrow\; \left(t-\frac{k}{2}\right)(t+2)=0 \;\cdots^{1)}$$
$$\rightarrow\; t=\frac{k}{2}\;(\because\; t=2^x>0)$$
$$\Downarrow$$
$$2^x=t=\frac{k}{2} \;\rightarrow\; x=\log_2\frac{k}{2}=\log_2 k-1$$

즉, 점 A의 x좌표는 $\log_2 k-1$이다. 이를 다시 곡선의 방정식에 대입하면 y좌표가 k임을 쉽게 알 수 있으므로

$$\mathrm{A}\left(\log_2 k-1,\; k\right)$$

라 할 수 있다. 이제 점 B의 정의를 보면, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선과 곡선 $y=2^{x-2}-3$의 교점이다. 직선 AB의 기울기가 -1임에 유의하며 평행이동을 생각해 보자.

앞서 구한 점 A의 좌표를 보면

$\mathrm{A}\left(\log_2 k-1,\; k\right)$ → 곡선 $y=2^{x+1}$ 위의 점

임을 알 수 있는데, 점 B를 지나는 곡선의 방정식과 비교하면

$y=2^{x-2}-3$
→ 곡선 $y=2^{x+1}$를
x축의 방향으로 3, y축의 방향으로 -3만큼
평행이동한 곡선

임을 알 수 있다.

이때 직선 AB의 기울기도 -1이므로

점 B는 점 A를
x축의 방향으로 3, y축의 방향으로 -3만큼
평행이동한 점 → $\mathrm{B}\left(\log_2 k+2,\; k-3\right)$

임을 알 수 있다. 따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$이고,

($\triangle$AOB의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times$(직선 AB와 원점 사이의 거리)

이다. 원점과 직선 AB 사이의 거리를 d라 하면

$$16=\frac{3\sqrt{2}}{2}d \;\rightarrow\; d=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$

따라서 점과 직선 사이의 거리 공식을 활용하자.

(직선 AB의 방정식): $y=-\left(x-\log_2 k+1\right)+k$
$\Leftrightarrow\; x+y+1-k-\log_2 k=0$

$$\Downarrow$$
$$d=\frac{\left|0+0+1-k-\log_2 k\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$
$$\rightarrow\; \left|k+\log_2 k-1\right|=\frac{32}{3}$$
$$\rightarrow\; k+\log_2 k=\frac{35}{3}\;(\because\; k>1)$$

$\therefore\; p+q=38$

교과서적 해법 2

$\boxed{\text{교과서적 해법 1}}$과 같이 점 A의 좌표를 구한 뒤, 직선 AB의 방정식을 세워 계산해 보자.

(직선 AB의 방정식): $y = -(x-\log_2 k+1)+k$

이므로 이를 곡선의 방정식과 연립하면

$-(x-\log_2 k+1)+k = 2^{x-2}-3$ ⋯ Ⓐ

이 방정식을 고등학교 교육과정의 내용으로 푸는 것은 불가능해 보인다. 이때 남은 조건에서

(△AOB의 넓이)$=16$
→ 점 B의 좌표를 구하긴 해야 한다

는 것을 알 수 있고, 구하는 값의 형태로부터

구하는 값이 $k+\log_2 k$
→ k의 값을 반드시 구해야 하는 것은 아니다

라는 것까지 생각하면,

방정식 Ⓐ에서 식의 형태를 조작하여 조건을 얻어내는 것

을 목표로 할 생각을 할 수 있다. 앞서 생각한 것들에 유의하여 Ⓐ를 정리해 보면

$-x+\log_2 k-1+k = 2^{x-2}-3$
$\rightarrow \log_2 k+k = (x-2)+2^{(x-2)}$

이때 함수 $y=x$와 $y=2^x$은 항상 증가하는 함수이므로, 함수 $y=x+2^x$의 그래프도 마찬가지일 것임을 알 수 있다. 따라서 위 등식에서

$k=2^{(x-2)},\ \log_2 k=(x-2) \rightarrow x=\log_2 k+2$

임을 알 수 있다. 이를 다시 곡선 또는 직선의 방정식에 대입하면 y좌표는 $k-3$이므로

$B(\log_2 k+2,\ k-3)$

을 얻는다. 이후의 풀이 과정은 $\boxed{\text{교과서적 해법 1}}$과 같다.

교과서적 해법 3

$\boxed{\text{교과서적 해법 2}}$와 같이 직선의 방정식을 세워 계산할 때에, 점 A의 좌표에서 $\log_2 k-1=p$로 치환하면

$k = 2^{p+1} \rightarrow A(p,\ 2^{p+1})$

이다. 이 좌표로 직선 AB의 방정식을 세우면

$y = -(x-p)+2^{p+1}$

이므로 곡선의 방정식과 연립하면

$-x+p+2^{p+1}=2^{x-2}-3$
$\rightarrow p+2^{p+1}=x-3+2^{x-2}$

이므로 $\boxed{\text{교과서적 해법 2}}$와 같은 논리에 의해

$p=x-3 \rightarrow x=p+3$
$\rightarrow B(p+3,\ 2^{p+1}-3)$
$\rightarrow B(\log_2 k+2,\ k-3)$

을 얻을 수 있다. 이후의 풀이 과정은 $\boxed{\text{교과서적 해법 2}}$와 같다.

CHECK 각주 — 해설 본문의 각주

1) 주어진 이차방정식에서 바로 인수분해 형태를 발견하는 것은

t의 계수가 $2,\ -\frac{k}{2}$의 합이고 상수항이 $2,\ -\frac{k}{2}$의 곱

이라는 점에서 필연적이라 할 수 있는데, 이 과정이 발상적이거나 어렵다고 느껴진다면 직접 근의 공식에 대입해도 방정식의 두 실근을 쉽게 얻을 수 있다.

정답 38

2026학년도 6평
확통 28번 문항

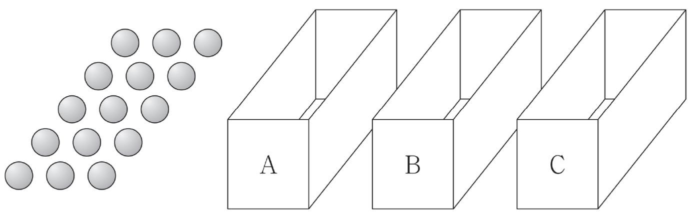
정답률 59%

공 15개와 비어 있는 세 상자 A, B, C가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 세 상자 A, B, C에 공을 넣는 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 3의 배수이면
> 세 상자 A, B, C에 넣는 공의 개수가 각각 1, 2, 0이고,
> 나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면
> 세 상자 A, B, C에 넣는 공의 개수가 각각 1, 1, 1이다.

이 시행을 5번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수일 때, 상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합이 8 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{44}{61}$ ② $\frac{47}{61}$ ③ $\frac{50}{61}$ ④ $\frac{53}{61}$ ⑤ $\frac{56}{61}$



교과서적 요소
· 조건부확률
· 독립시행

수능·실전적 요소
· 마르코프 체인

이해원 N제 연계
· 시즌1 확통
#15 #25 #27 #36 #41 #53

GLIMPSE 최상위권이 발문만 힐끗 보고 하는 생각

❶ 규칙 다섯 줄
최근 평가원 확률 문제는 시행의 규칙이 복잡해 보이는 경우가 많다.
하지만 길기만 하지 어렵지 않을 것이라는 자신감을 가지고 읽어야 한다.

❷ 공의 개수가 홀수
시행을 반복하면 상자 B에 들어 있는 공의 개수의 홀짝이 바뀐다.
5번 반복한 후 이 개수가 홀수라는 것은 어떤 상황을 의미할까? 홀수는 홀수가 홀수 번 더해져야 나온다.

❸ 상자 A와 상자 C의 공의 개수의 합
주어진 규칙을 잘 보면 시행 1번당 세 상자에 넣는 공은 항상 3개이다.
즉, 5번의 시행 후 상자들에 들어 있는 공은 항상 총 15개인 것이다...! 애초에 공 15개를 가지고 시행을 하고 있긴 하다.
다시 말해, 상자 A와 상자 C의 공의 수의 합은 15에서 상자 B의 공의 수를 뺀 것과 같다.

— NOTE

본인의 풀이를 컴팩트하게 작성해 보세요.

COMMENT 인터그레이트의 코멘트

독립시행의 규칙이 주어진 조건부확률 문항입니다. 핵심이 되는 논리는 1과 2를 여러 번 더해 홀수를 만들려면 홀수인 1이 홀수 번 필요하다는 것입니다. 아마도 대다수의 학생분들께 익숙한 논리일 텐데, 만약 생각해 내지 못했다면 꽤 자주 등장하는 빈출 소재이므로 확실하게 학습해 두도록 합시다.

또한 상자 B의 공의 개수와 상자 A와 상자 C의 공의 개수의 합 사이의 관계를 '전체 공의 개수는 15개' 라는 사실로 묶어 과하지 않은 논리를 묻고 있다는 점도 한 번 짚고 넘어갈 만한 부분입니다.

시행이 반복될 때마다 '상자 B의 공의 홀짝'이 바뀌는 상황은 뒤의 「2606(확통)28」 **분석**에서 소개하고 있는 **마르코프 체인**을 통해 해석할 수 있습니다. 마르코프 체인은 이러한 상태 변화 위주의 확률 문제를 풀어낼 때 유용한 도구가 될 수 있으니, 찬찬히 읽으며 학습해 보시길 바랍니다.

APPENDIX 참고 콘텐츠

한완수	· 확통(하) 48p, · 확통(하) 214p, · 확통(하) 224p,	Chatper B 조건부확률 TOPIC 03 조건부확률 TOPIC 05 마르코프 체인
한완기	· 확통 평수능 146p,	Pattern 09 모양 $\frac{\triangle}{\triangle + \bigstar}$ 으로 조건부확률을 계산하라!
이해원 N제	· 시즌1 확통	#15 #25 #27 #36 #41 #53

REACTION 시험 당일 수험생들의 생생한 반응

1,119 457 7.5만

lhw_math님 외 27.7만명이 풀었습니다

#조건부확률 #홀짝 #독립시행

06r0rx 113
경우를 많이 안나눠도 돼서 무난하게 풀었음
답글 달기

do__hyxn 62
조건부확률 분모 구하고나서 이제 본격적으로 풀어볼까 했는데 이미 분자도 다구함ㅋㅋ
답글 달기

w00ri 71
상자 A랑 C가 삐질까봐 굳이 등장시켜주는 평가원....
답글 달기

06r0rx 103
ㅋㅋㅋ 박애주의
답글 달기

「2606(확통)28」 분석

1. 확률 구조의 시각화 - 마르코프 체인

「2606(확통)28」은 주어진 조건을 시각화하여 직관적으로 구조를 판단하면 보다 효율적으로 풀 수 있는 문제였습니다. 이러한 상황을 다루는 **마르코프 체인**에 대한 기초적인 이해와 더불어 도식화의 주의점 및 교훈을 정리해 보겠습니다. 이는 교과서 개념 은 아니지만 특정 유형에 대한 유용한 풀이를 제공하므로 한 번쯤은 공부해 두는 것이 좋습니다.

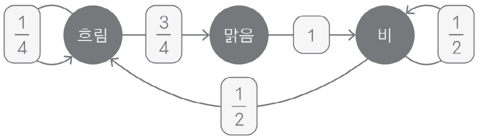
어느 지역의 날씨가 맑음, 흐림, 비 세 가지로만 구분되고 다음 표의 규칙을 따른다고 생각해 보겠습니다.

오늘 \ 내일	맑음	흐림	비
맑음	0	0	1
흐림	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
비	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

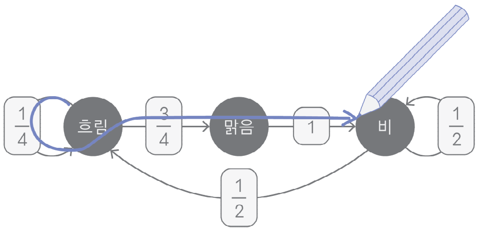
이 지역의 1월 1일의 날씨가 흐림일 때, 1월 4일에 비가 올 확률을 생각해 보겠습니다. 이때

‘1월 1일이 흐림이니까 1월 2일은 맑거나 흐리고, 그러면 1월 3일은 …’

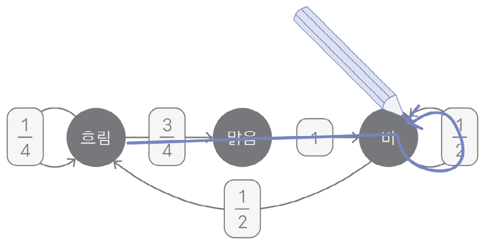
과 같이 하나씩 나열하는 것은 너무 복잡하고 확률 계산을 헷갈리게 만들 수도 있습니다. 이러한 구조는 단순히 표나 문장으로 보는 것보다 그림으로 나타내서 관찰하는 것이 좋습니다.



이렇게 그림으로 나타내 놓으면 1월 1일에서 1월 4일까지의 과정을 **‘길 찾기’**로 해석할 수 있게 됩니다. 예를 들면, 다음과 같은 경로를 생각할 수 있습니다.



한 번 도식화해 놓으면 이 문제의 풀이는 펜으로 길을 따라가며 그 개수를 세기만 하면 되는 단순한 작업으로 바뀌게 됩니다. 그리고 앞의 그림의 경로로 나타나는 '**흐림 - 흐림 - 맑음 - 비**'라는 경우의 확률은 지나온 경로에 적혀 있는 확률을 순서대로 곱하기만 하면 됩니다. 즉, $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot 1=\frac{3}{16}$ 이 앞의 그림에서 얻을 수 있는 확률입니다.



더 그리다 보면 위와 같은 경로도 찾을 수 있고, 이 경우의 확률은 $\frac{3}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$ 입니다. 그리고 몇 번 끄적이다 보면 세 번 만에 '흐림'에서 '비'로 가는 경로가 더는 없다는 것도 쉽게 알 수 있을 것입니다.

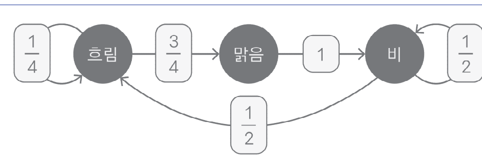
이처럼 그림을 통해 확률 구조를 도식화하는 것은 복잡한 상황을 시각적, 직관적으로 관찰할 수 있게 해주므로 적극적으로 활용하도록 합시다.

이러한 시각화에 있어 주의할 점은

다음 시행의 결과가 현재 상태만으로 결정

되는지 확인해야 한다는 것입니다. 만약 "이틀 연속 맑으면 다음 날은 반드시 흐리다", "과거 일주일 동안 비가 3일 이상 내렸으면 다음 날 비가 내릴 확률은 $\frac{3}{4}$ 이다." 같은 조건이 있었다면 간단한 도식으로는 나타낼 수 없었을 것입니다. 이처럼 '다음 시행의 결과가 현재 상태에만 의존하여 결정되는 과정'을 **마르코프 체인**이라 부르고, 이러한 상황을 그림으로 나타낸 것을 **마르코프 체인 그림**이라고 합니다.

이러한 용어는 언급의 편의를 위해 도입한 것일 뿐이고, 중요한 것은 이러한 상황을 알아채고 **도식을 활용하는 발상**입니다. 마르코프 체인 그림을 그리는 과정을 다음과 같이 정리하여 기억합시다.

방법	예시
1. 주어진 조건을 '상태'로 분류	상태를 맑음, 흐림, 비로 분류
2. 한 번의 시행으로 옮겨갈 수 있는 상태끼리만 화살표로 연결하고 해당 확률 표시	
3. 각 상태에서 나가는 확률의 합이 1인지 확인	ex) '흐림'에서 나가는 확률의 합: $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

2. 마르코프 체인과 「2606(확통)28」

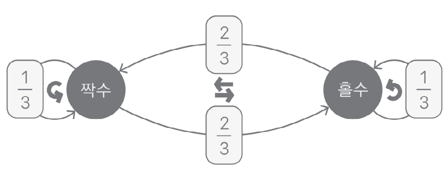
> 공 15개와 비어 있는 세 상자 A, B, C가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 세 상자 A, B, C에 공을 넣는 시행을 한다.
>
> | |
> |---|
> | 주사위를 한 번 던져
나온 눈의 수가 3의 배수이면
세 상자 A, B, C에 넣는 공의 개수가 각각 1, 2, 0이고,
나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면
세 상자 A, B, C에 넣는 공의 개수가 각각 1, 1, 1이다. |
>
> 이 시행을 5번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수일 때, 상자 A에 들어 있는 공의 개수와 상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합이 8 이상일 확률은? [4점]

2026학년도 6월 모의평가 확률과 통계 28번 (선지·그림 생략)

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수인 상황을 묻고 있으므로, 그것을 기준으로 생각해 봅시다.

B에 넣는 공의 개수는 $\frac{1}{3}$의 확률로 2개, $\frac{2}{3}$의 확률로 1개이므로, B에 들어 있는 공의 홀짝은 $\frac{1}{3}$의 확률로 바뀌지 않고, $\frac{2}{3}$의 확률로 반대로 바뀌게 됩니다.

이를 마르코프 체인 그림으로 나타내 봅시다. 이때 홀짝이 바뀌는 경로를 간단히 ⇆으로, 홀짝이 바뀌지 않고 자기 자신으로 돌아오는 경로를 간단히 ↺으로 나타내겠습니다.



이제 그림에서 '길 찾기'를 하면 됩니다. '짝수'에서 시작하여 5번 이동해 '홀수'에 도착할 경로를 찾으면 되는데, 그러기 위해서는 ⇆가 홀수 번만 나타나야 합니다. 따라서 시행을 5번 반복한 후 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수일 확률은 ⇆가 1번, 3번, 5번인 확률을 더한 것으로 구할 수 있습니다.

즉, (⇆, ↺)$=(1, 4)$, $(3, 2)$, $(5, 0)$인 세 경우로 나누어 각각 독립시행의 확률을 구하면 원하는 확률을 구할 수 있습니다.

이후의 풀이는 뒤의 해법을 참고하시기 바랍니다.

이 풀이로부터 마르코프 체인 그림 활용에 대한 많은 교훈을 얻을 수 있습니다.

〈교훈1〉 상태 분류의 기준

체인 그림을 그리기 위해 상태를 분류할 때,

문제에서 묻는 상황을 기준으로 삼는다

라는 원칙을 기억합시다. 만약 세 상자에 들어 있는 공의 개수를 기준으로 생각했다면 (a, b, c)와 같은 순서쌍을 생각하여 굉장히 많은 경우를 생각해야 했을 것입니다. 그러나 문제에서

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수일 때

를 언급했으므로 상자 B에 들어 있는 공의 홀짝을 기준으로 상태를 분류하는 것이 '자연스러운 풀이'라고 할 수 있습니다. 상태 분류에 있어서는 항상 문제에서 묻는 것을 최우선적으로 체크하도록 합시다.

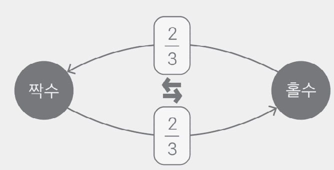
〈교훈2〉 경우의 수로 길 찾기

길 찾기는 종이에 펜을 들고 길을 따라가는 것만이 능사가 아닙니다. 가능한 루트가 너무 많은 경우에는 언제든 경우의 수를 활용하여 길을 찾을 수 있어야 합니다. 어떤 길을 어떻게 선택하여 조합하면 원하는 경로가 완성되는지, 경우의 수로 접근하여 경로의 개수를 찾고 독립시행의 확률로 계산하는 방법을 잘 기억해 두도록 합시다.

〈교훈3〉 '가만히 있기'

길 찾기를 할 때 하나의 팁으로 '가만히 있기'를 무시하는 사고방식은 꽤나 유용합니다. ⇆과 ↺을 함께 고려해서 길을 찾기가 어려우면 '가만히 있기'에 해당하는 ↺은 무시하고 ⇆만 가지고 경로를 찾으면 되는 것입니다. 이때 움직이는 횟수를 '5번'이 아니라 '5번 이하'로 세어주기만 하면 됩니다. 즉, 문제를 다음과 같이 간략화해서 생각하는 것입니다.

다음 그림에서 '5번 이하로 움직여서 홀수로 가는 방법' 찾기



이렇게 보면 ⇆을 1번, 3번, 5번 움직이면 된다는 것을 쉽게 알 수 있고, 남은 횟수는 '가만히 있기', 즉 ↺로 채우면 됩니다. 간단한 발상이지만 복잡한 상황을 단순화하여 관찰할 때 도움이 되는 관점이므로 잘 기억해 두도록 합시다.

「2606(확통)28」 해법	「2606(확통)28」 한완기 해법 《한권으로 완성하는 기출》의 요소들로 쓰인 해법입니다. 최대한 다양한 풀이를 익히며 여러 가지 도구를 연습하도록 합시다.

교과서적 해법

시행을 5번 반복했을 때 3의 배수가 나온 시행의 횟수를 $n(0 \le n \le 5)$이라 하면

(상자 A에 들어 있는 공의 개수) $=$ 5
(상자 B에 들어 있는 공의 개수) $=$ $2 \cdot n + 1 \cdot (5-n)$ $=$ $n+5$
(상자 C에 들어 있는 공의 개수) $=$ $0 \cdot n + 1 \cdot (5-n)$ $=$ $5-n$

이때 세 상자에 들어 있는 공의 개수의 합이 15로 일정하므로

상자 A에 들어 있는 공의 개수와
상자 C에 들어 있는 공의 개수의 합이 8 이상
$\Leftrightarrow$ 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 7 이하

라 할 수 있다. 따라서 구하는 확률은

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수일 때, 7 이하일 확률

이므로

△: 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 7보다 큰 홀수
($n=4$인 경우)

★: 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 7 이하인 홀수
($n=0$, 2인 경우)

로 경우를 나누어 생각하자.

① $n=0$인 경우
주사위를 5번 던져 3의 배수의 눈이 한 번도 나오지 않을 확률이므로 ${}_5\mathrm{C}_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$이다.

② $n=2$인 경우
주사위를 5번 던져 3의 배수의 눈이 두 번 나올 확률이므로
${}_5\mathrm{C}_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$이다.

따라서 ★일 확률은 $\frac{32}{243}+\frac{80}{243}=\frac{112}{243}$이다.

③ $n=4$인 경우
주사위를 5번 던져 3의 배수의 눈이 네 번 나올 확률이므로
${}_5\mathrm{C}_4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{10}{243}$이다.

따라서 △일 확률은 $\frac{10}{243}$이다.

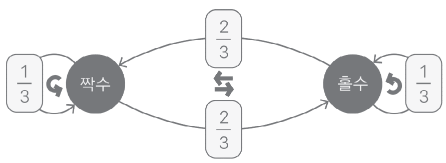
$$\therefore \text{(구하는 확률)} = \frac{★}{△+★} = \frac{\frac{112}{243}}{\frac{10}{243}+\frac{112}{243}} = \frac{56}{61}$$

실전적 해법

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수인 상황을 묻고 있으므로, 그것을 기준으로 생각해 보자.

B에 넣는 공의 개수는 $\frac{1}{3}$ 의 확률로 2개, $\frac{2}{3}$ 의 확률로 1개이므로, B에 들어 있는 공의 홀짝은 $\frac{1}{3}$ 의 확률로 바뀌지 않고, $\frac{2}{3}$ 의 확률로 반대로 바뀐다.

이를 마르코프 체인 그림으로 나타내면 다음과 같다. 이때 홀짝이 바뀌는 경로를 ⇆으로, 홀짝이 바뀌지 않고 자기 자신으로 돌아오는 경로를 ↺으로 나타내자.



이제 그림에서 '길 찾기'를 하면 된다. '짝수'에서 시작하여 5번 이동해 '홀수'에 도착할 경로를 찾으면 되는데, 그러기 위해서는 ⇆가 홀수 번만 나타나야 한다.

따라서 시행을 5번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수일 확률은 ⇆가 1번, 3번, 5번인 확률을 더한 것으로 구할 수 있다. 즉, (⇆, ↺)$=(1,\ 4)$, $(3,\ 2)$, $(5,\ 0)$인 세 경우로 나누어 각각 확률을 구하면 된다.

(⇆, ↺)$=(1,\ 4)$인 경우, ⇆, ↺의 순서만 정하면 되므로 독립시행의 확률에 의해 ${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4$ 이다.

(⇆, ↺)$=(3,\ 2)$, $(5,\ 0)$인 경우의 확률도 같은 방법으로 구하면 각각 다음과 같다.

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2,\ \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

한편 ⇆일 때는 A, C에 공이 각각 1개씩 추가되고, ↺일 때는 A에만 공이 1개 추가되므로, 5번의 시행 후 A, C에 들어 있는 공의 개수의 합이 8 이상인 경우는
(⇆, ↺)$=(3,\ 2)$, $(5,\ 0)$일 때이다.

$$\therefore \text{(구하는 확률)} = \frac{{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^5}{{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^5}$$
$$= \frac{56}{61}$$

정답 ⑤

2026학년도 6평
확통 30번 문항

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4$일 때 $f(x+1)+3 \geq f(x)+x$이다. (나) $f(2)$의 값은 홀수이다.

정답률 18%

교과서적 요소
- 경우의 수
- 중복조합

수능·실전적 요소
- 함수의 개수 한완수
- 중복조합과 칸막이 한완수

이해원 N제 연계
- 시즌1 확통
  #34 #50 #59 #69 #74

GLIMPSE 최상위권이 발문만 힐끗 보고 하는 생각

❶ (가)조건의 부등식에 $x = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 대입

주어진 형태의 (가)조건만으로는 함숫값들 사이의 관계를 즉각적으로 파악하기 어렵다. 따라서 x의 자리에 $1,\ 2,\ 3,\ 4$를 직접 대입하여 구체적인 관계식을 도출해야겠다는 생각을 해야 한다.

❷ $f(2)$가 홀수

(나)조건을 보자마자 $f(2)=1,\ f(2)=3,\ f(2)=5$의 세 가지로 경우를 나눠버리면 된다.

— NOTE

본인의 풀이를 컴팩트하게 작성해 보세요.

COMMENT 인터그레이트의 코멘트

전형적으로 출제되는 함수의 개수를 묻는 중복조합 문항입니다. (가)조건의 부등식이 살짝 복잡해 보일 수 있으나, 그 의미를 너무 고민하지 말고 $x=1$, 2, 3, 4를 대입하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 관계를 알아내는 것이 전부인 조건입니다.

이후 (나)조건을 보자마자 $f(2)=1$, $f(2)=3$, $f(2)=5$로 경우를 나누고, 앞에서 얻은 부등식을 변형해 가며 중복조합을 어떻게 활용할지 고민하면 크게 어렵지 않게 풀어내실 수 있으셨을 것입니다.

이 문제에서 (가)조건을 통해 얻은 부등식을 어떻게 해석할지 잘 모르시겠다면

한완수 확통(상) Part2의 TOPIC 05 함수의 개수와 TOPIC 07 중복조합과 칸막이

를 학습하시길 바랍니다.

APPENDIX 참고 콘텐츠

한완수	· 확통(상) 154p, · 확통(상) 252p, · 확통(상) 262p,	Chapter E 중복조합 TOPIC 05 함수의 개수 TOPIC 07 중복조합과 칸막이
한완기	· 확통 평수능 74p,	Pattern 04 중복조합의 활용
이해원 N제	· 시즌1 확통	#34 #50 #59 #69 #74

REACTION 시험 당일 수험생들의 생생한 반응

1,119 457 7.5만

lhw_math님 외 27.7만명이 풀었습니다

#경우의수 #함수의개수 #중복조합

kim_da 174
(가)가 바로 해석이 안돼서 1,2,3,4 다 대입하고 쭉 나열하니까 중복조합이 보였음
답글 달기

zx_adv 89
22
답글 달기

06r0rx 73
3333 x=1~4 다 대입해보니까 그제서야 중복조합 보이더라
답글 달기

2_solution_1 1,012
f(1)~f(5)를 하나의 부등식 관계로 나타낼 수 있다는 점이 재밌었음
답글 달기

「2606(확통)30」 해법

「2606(확통)30」 한완기 해법
《한권으로 완성하는 기출》의 요소들로 쓰인 해법입니다.
최대한 다양한 풀이를 익히며 여러 가지 도구를 연습하도록 합시다.

교과서적 해법

(가)조건에 $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$를 각각 대입하여 각 원소들의 관계를 파악하도록 하자.

$x=1$ 대입: $f(2)+3 \ge f(1)+1 \quad \rightarrow \quad f(2)+2 \ge f(1)$
$x=2$ 대입: $f(3)+3 \ge f(2)+2 \quad \rightarrow \quad f(3)+1 \ge f(2)$
$x=3$ 대입: $f(4)+3 \ge f(3)+3 \quad \rightarrow \quad f(4) \ge f(3)$
$x=4$ 대입: $f(5)+3 \ge f(4)+4 \quad \rightarrow \quad f(5)-1 \ge f(4)$

이 값들을 한꺼번에 나타내면 다음과 같다.

$$f(1)-3 \le f(2)-1 \le f(3) \le f(4) \le f(5)-1 \ \cdots \ Ⓐ$$

우리가 알고 있는 공식을 적용할 수 없으므로 (나)조건을 보자. $f(2)$의 값이 홀수이므로 $f(2)$의 값에 따라 경우를 나누어 살펴보도록 하자.

ⅰ) $f(2)=1$인 경우
Ⓐ에 $f(2)=1$을 대입하면

$$f(1)-3 \le 0 \le f(3) \le f(4) \le f(5)-1 \ \cdots \ Ⓑ$$

이고, $f(1) \le 3$이므로 가능한 $f(1)$의 값은 $1,\ 2,\ 3$뿐이다. 따라서 $f(1)=1$로 고정하고 $3\times$를 하자.

Ⓑ에서 $f(3) \ge 1,\ f(5)-1 \le 4$이므로

$$0 \le f(3) \le f(4) \le f(5)-1$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 \le f(3) \le f(4) \le f(5)-1 \le 4$$

이고, 공식을 적용할 수 있다.
가능한 순서쌍 $(f(3),\ f(4),\ f(5)-1)$의 개수는

$$_4H_3={}_6C_3=20$$

이므로 구하는 경우의 수는 $3\times20=60$이다.

ⅱ) $f(2)=3$인 경우
Ⓐ에 $f(2)=3$을 대입하면

$$f(1)-3 \le 2 \le f(3) \le f(4) \le f(5)-1 \ \cdots \ Ⓒ$$

이고, $f(1) \le 5$이므로 가능한 $f(1)$의 값은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$이다. 따라서 $f(1)=1$로 고정하고 $5\times$를 하자.

Ⓒ에서 $f(5)-1 \le 4$이므로

$$2 \le f(3) \le f(4) \le f(5)-1$$
$$\Leftrightarrow \quad 2 \le f(3) \le f(4) \le f(5)-1 \le 4$$

이고, 공식을 적용할 수 있다.
가능한 순서쌍 $(f(3),\ f(4),\ f(5)-1)$의 개수는

$$_3H_3={}_5C_3=10$$

이므로 구하는 경우의 수는 $5\times10=50$이다.

ⅲ) $f(2)=5$인 경우
Ⓐ에 $f(2)=5$를 대입하면

$$f(1)-3 \le 4 \le f(3) \le f(4) \le f(5)-1 \ \cdots \ Ⓓ$$

이고, $f(1) \le 7$이므로 가능한 $f(1)$의 값은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$이다. 따라서 $f(1)=1$로 고정하고 $5\times$를 하자.

Ⓓ에서 $f(5)-1 \le 4$이므로

$$4 \le f(3) \le f(4) \le f(5)-1$$
$$\Leftrightarrow \quad 4 \le f(3) \le f(4) \le f(5)-1 \le 4$$

이고, $f(3),\ f(4),\ f(5)$의 값은 각각 $4,\ 4,\ 5$로 정해진다. 따라서 구하는 경우의 수는 $5\times1=5$이다.

$\therefore$ (조건을 만족시키는 f의 개수) $=\ 60+50+5\ =\ 115$

정답 115

2026학년도 6평
미적분 28번 문항

정답률 11%

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times e^{b}$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$$

이다.

(나) $f(-3)f(3)<0$, $f'(2)>0$

① $-3e^{-\frac{4}{3}}$ ② $-\frac{5}{3}e^{-\frac{4}{3}}$ ③ $-\frac{1}{3}e^{-\frac{4}{3}}$
④ $e^{-\frac{4}{3}}$ ⑤ $\frac{7}{3}e^{-\frac{4}{3}}$

교과서적 요소
- 이계도함수
- 변곡점
- 사잇값정리
- 함수의 그래프
- 합성함수

수능·실전적 요소
- 빼기함수 한완수
- 차수논리 한완수

이해원 N제 연계
- 시즌1 미적분
  #27 #32 #41 #68 #81

GLIMPSE 최상위권이 발문만 힐끗 보고 하는 생각

❶ 이계도함수를 갖는

왜 굳이 이계도함수를 갖는다는 조건을 주었을까?

혹시 (가)조건을 두 번 미분하여 얻는 식들로 두 상수 a, b의 값을 구할 수 있나?

❷ 직선 $y=ax+b$, 너 설마...

(가)조건의 $ax+b$를 이항하면 $\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3=\ln\left(x+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)$이다.

즉, 함수 $\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3$는 곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$와 직선 $y=ax+b$의 위치관계로 해석할 수 있다.

그렇다면 직선 $y=ax+b$가 곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$의 변곡접선은 아닐까?... 정답은 특수한 상황일테니!

❸ x^5+x^3와 $f(x)$의 합성

$\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3$는 x^5+x^3에 $f(x)$를 합성한 함수이다. N축, 차수논리 등 합성함수를 다루는 툴은 많다.

❹ 본능적으로

왜인진 모르겠지만 $f(-3)f(3)<0$을 보면 사잇값 정리에 의하여 $f(k)=0$인 실수 $k(-3<k<3)$이 떠오른다.

— NOTE

본인의 풀이를 컴팩트하게 작성해 보세요.

COMMENT 인터그레이트의 코멘트

명실상부 2026학년도 6평의 최고난도 문항입니다. (가)조건의 항등식을 해석할 수 있는 방향이 꽤나 다양하여 여러 가지 풀이가 가능한 문항이기도 합니다. 크게 다음과 같이 두 가지 풀이가 존재합니다.

❶ (가)조건의 항등식의 양변을 두 번 미분하여 푸는 우직한 계산 풀이

❷ 합성함수 $\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3$의 의미를 파악하여 푸는 풀이

두 풀이 모두 멋진 풀이이며 우열은 존재하지 않습니다. ❶의 풀이는 화려한 기교가 없는, 정석적인 풀이라고 할 수 있으며 ❷의 풀이는 수능 수학에 대한 경험이 아주 많은 분들이 주로 생각해 내는 발상 위주의 풀이라 할 수 있겠습니다. 특히 ❷의 풀이에서는 뒤의 「2606(미적)28」 **분석**에서도 다루는 **차수논리**를 통해 접근할 수도 있습니다. 이는 수학 논리력을 비약적으로 올릴 수 있는 좋은 학습 소재이니 반드시 학습해 보시길 바랍니다.

어떤 수학 문제를 무조건 풀어내는 '절대 해법'은 존재하지 않습니다. 이는 한 문제를 푸는 방법이 한 가지뿐이 아닐 수 있음을 의미하기도 합니다. 뒤의 「2606(미적)28」 **해법**을 통해 여러 풀이를 경험해 보며 수학 문제 풀이의 다채로움을 느껴보시길 바랍니다.

APPENDIX 참고 콘텐츠

한완수	· 미적분(상) 198p, · 미적분(하) 272p, · 미적분(하) 504p,	Chapter H 함수의 그래프 TOPIC 21 합성함수의 이해 TOPIC 42 차수논리
한완기	· 미적분 평수능 152p, · 미적분 평수능 172p,	Pattern 11 함수의 그래프 ①~⑥을 활용하여 그래프를 완성하라! Pattern 12 합성함수의 극한, 사칙연산·합성함수의 연속성
이해원 N제	· 시즌1 미적분	#27 #32 #41 #68 #81

REACTION 시험 당일 수험생들의 생생한 반응

1,119 457 7.5만

lhw_math님 외 **27.7만명**이 풀었습니다

#이계도함수 #합성함수미분 #합성함수그래프 #차수논리

0wansoo 379
사잇값정리 써야겠다는 생각을 못하니까 손도 못댔음
답글 달기

dogixmylife 142
진짜 손도 못댄 문제 중 하나임..
답글 달기

sxo_yxxn 188
첨봤을 때 도대체 뭘 하라는건지 감도 안왔음. 그러다가 '이계도함수 존재'를 보고 미분해보니까 그제서야 사잇값정리가 보이더라
답글 달기

zx_adv 212
개인적으로 240628보다도 훨씬훨씬 어려웠어
답글 달기

do__hyxn 89
상황찍기는 쉬운데, 엄밀하게 풀기는 어렵긴함
답글 달기

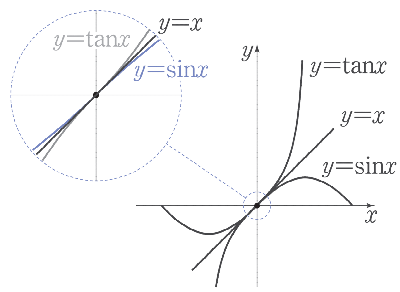
「2606(미적)28」 분석

1. 근사와 차수 논리

함수를 더욱 직관적이고 빠르게 파악하기 위한 도구로 '초월함수의 차수'를 도입해 봅시다. **「차수」**란 기본적으로 다항함수에서만 정의된 개념인데, 이것을 초월함수로 확장해서 생각한 것입니다. 간단하게 이해하고 넘어가도 됩니다. 우선 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한을 이해하는 데에서 시작하겠습니다.

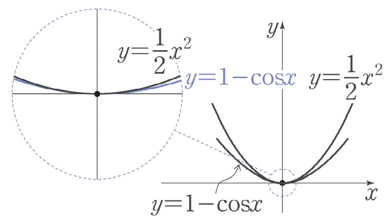
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$x=0$ 의 근방에서는 곡선 $y=\sin x$, $y=\tan x$ 가 직선 $y=x$ 와 거의 똑같다는 거구나!



$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$x=0$ 의 근방에서는 곡선 $y=1-\cos x$ 가 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 과 거의 똑같다는 거구나!



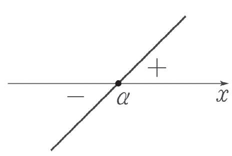
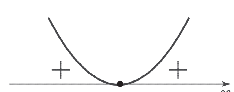
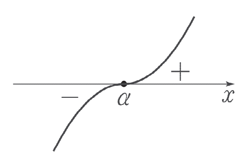
함수의 극한을 이렇게 해석했다면

초월함수도 각각의 점의 근방에서는 다항함수처럼 움직인다

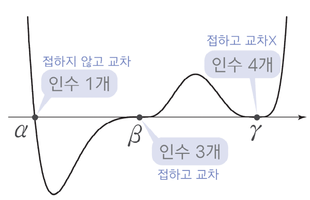
는 것을 이해할 수 있습니다. 여기에 다항함수의 그래프의 성질을 더해서 생각해 봅시다.

수능 개념 **인수의 개수와 다항함수의 그래프** 교과서 개념 | **수능 개념** | 교과서 간접 개념

함수 $y=(x-\alpha)^n$ 의 그래프는 인수의 개수에 따라 그래프의 개형이 달라진다. (단, n 은 자연수이다.)

		
$n=1$ 일 때 x 축과 접하지 않고 교차함	n 이 짝수일 때 x 축과 접하고 교차하지 않음	n 이 1보다 큰 홀수일 때 x 축과 접하고 교차함

다양한 인수를 갖는 경우에도 각각의 근의 근방에서 동일한 형태가 나타난다. 예를 들면 함수 $y=(x-\alpha)^1(x-\beta)^3(x-\gamma)^4\ (\alpha<\beta<\gamma)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

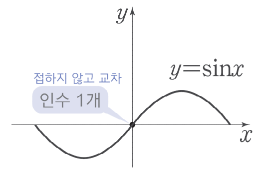


— Sample Case —

— $x=0$ 의 근방에서 —

❶ $y=\sin x \;\approx\; x$

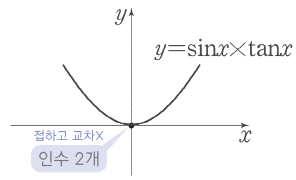
$\rightarrow$ $(0,\,0)$ 에서 x 축과 접하지 않고 교차함



❷ $y=\sin x\times\tan x \;\approx\; x\times x \;=\; x^2$

$\rightarrow$ $(0,\,0)$ 에서 x 축과 접하고 교차하지 않음

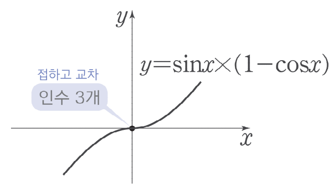
$\rightarrow$ $x=0$ 에서 극값



❸ $y=\sin x\times(1-\cos x) \;\approx\; x\times\left(\dfrac{x^2}{2}\right) \;=\; \dfrac{x^3}{2}$

$\rightarrow$ $(0,\,0)$ 에서 x 축과 접하고 교차함

$\rightarrow$ $x=0$ 에서 변곡점



x 축과의 교점이 아닌 경우에도 마찬가지로 몇 차인지 생각할 수 있습니다. 예를 들어 함수 $f(x)=x^2$ 은 $x=0$ 의 근방에서는 2 차이지만

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2 \quad\rightarrow\quad x=1\text{ 의 근방에서 }\ \frac{f(x)-f(1)}{x-1}\approx 2$$

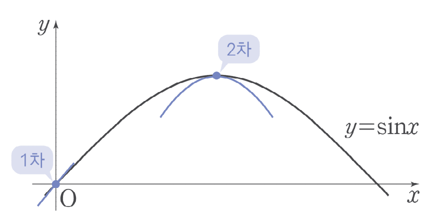
$$\Leftrightarrow\quad f(x)\approx 2(x-1)+f(1)$$

이므로 $x=1$ 의 근방에서는 기울기가 2 인 직선, 즉 일차식처럼 움직인다는 것으로 이해할 수 있습니다. 따라서 함수 $f(x)=x^2$ 은 $x=1$ 에서는 1 차라 할 수 있습니다.

또한 $y=\sin x$ 는 $x=0$ 근방에서는 일차함수 $y=x$ 처럼 움직였는데, 앞에서 공부한

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \quad\rightarrow\quad x=0\text{ 의 근방에서 } 1-\cos x\text{ 가 이차함수 }\frac{1}{2}x^2\text{ 처럼 움직임}$$

을 생각하면 똑같이 생긴 함수 $y=\sin x$ 역시 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 의 근방에서 이차함수처럼 움직인다는 것을 알 수 있습니다.



즉, 함수 $y=\sin x$ 는 $x=0$ 에서는 1 차, $x=\dfrac{\pi}{2}$ 에서는 2 차라 할 수 있습니다.

$x=a$ 에서의 차수 (최저차수)[1]

수능 개념

교과서 개념 | **수능 개념** | 교과서 간접 개념

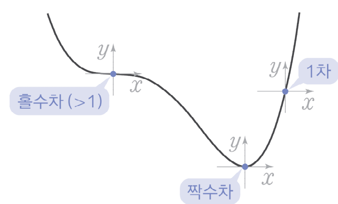
연속함수 $f(x)$ 와 실수 a 에 대하여 극한값 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}$ 가 0 이 아닌 실수로 존재하도록 하는 자연수 k 가 존재한다면 k 를 **함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 차수**라고 한다.

여기까지의 흐름을 잘 이해했다면, 함수 $f(x)$ 의 차수를 위와 같이 정의하는 것을 자연스럽게 받아들일 수 있을 것입니다. 차수의 계산은 기본적인 극한 계산이나 미분을 통해 찾아낼 수 있습니다.

또한 확실하게 알아두어야 하는 것은 정해진 함수에서도 각 점마다 차수가 다르다는 것입니다. 가장 간단한 다항함수의 경우, 다음 그림과 같이 좌표평면의 원점이라고 생각하고 그래프의 형태(교차, 접함 여부)를 생각하면 그 점의 근방에서의 차수의 홀짝을 알 수 있습니다.

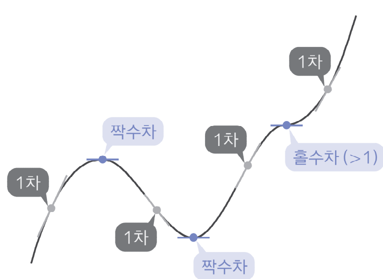
기울기가 0 이 아니면 1 차,
기울기가 0 이면서 극대·극소이면 짝수차,
기울기가 0 이면서 접선과 교차하면 홀수차(>1)

이라고 생각하면 됩니다. 다음 그림을 보며 판단 기준을 이해할 수 있도록 합시다.

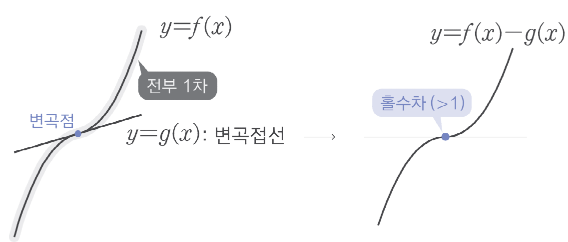


— Sample Case —

1 다항함수 전체의 차수



2 삼차함수와 변곡접선



여러 함수의 차수

수능 개념

교과서 개념 | **수능 개념** | 교과서 간접 개념

① 미분가능한 점은 1 차 이상이다.
즉, 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수는 모든 점에서 1 차 이상이다.
② n 차 다항함수의 차수는 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ 만 가능하다.

각주

1) 일반적으로 사용하는 '다항함수의 차수'는 최고차항의 차수를 의미하는데, 여기에서는 근사의 관점이 중요하므로 최저차항의 차수에 대해 논할 것입니다. 이때, 한완수 독자는 '차수'가 '0으로 가는 속도'와 동일한 개념이라고 생각하면 됩니다.

2. 합성함수와 차수논리

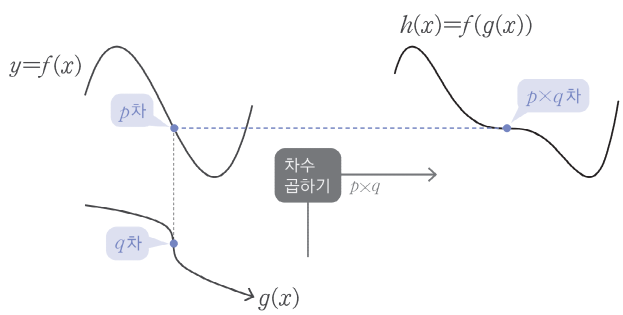
이제 합성함수의 차수를 생각해 봅시다. 각각의 함수를 원점으로 옮긴다는 관점을 고려하면, 간단한 두 개의 함수 $f(x)=x^p$, $g(x)=x^q$ 으로 확인하면 충분하다는 것을 알 수 있습니다.

$$f(g(x)) \ = \ (x^q)^p \ = \ x^{pq}$$

이라는 간단한 식으로부터

(합성함수의 차수) = (겉함수의 차수)×(속함수의 차수)

임을 알 수 있고, 이를 합성함수의 구조를 나타내는 그림에서는 다음처럼 나타낼 수 있습니다. '대응되는 점에서의 차수의 곱'이 합성함수의 차수가 된다고 이해하면 됩니다.



— **참고**

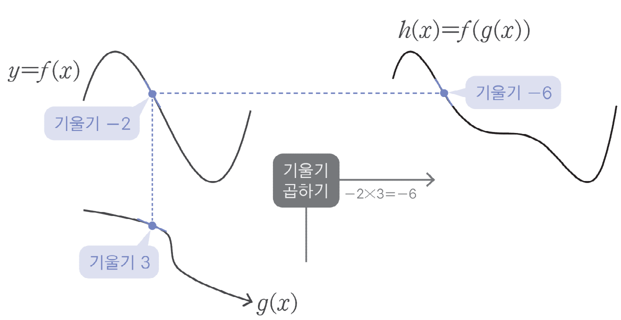
합성함수의 미분법

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

$$\Updownarrow$$

(합성함수의 미분계수) = (겉함수의 미분계수)×(속함수의 미분계수)

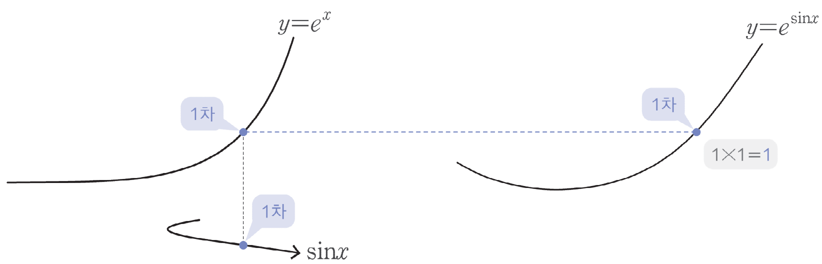
도 같은 방식으로 나타냅니다. 겉함수와 속함수의 대응되는 두 점에서의 미분계수의 곱이 합성함수의 미분계수입니다.



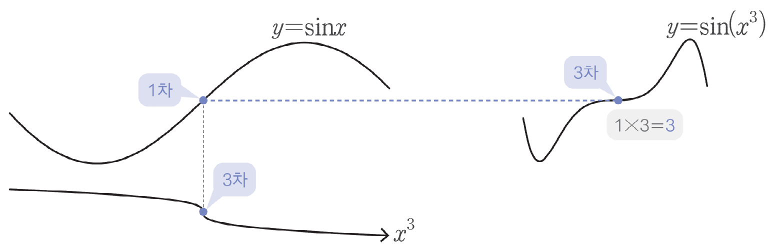
— Sample Case —

$x=0$의 근방에서

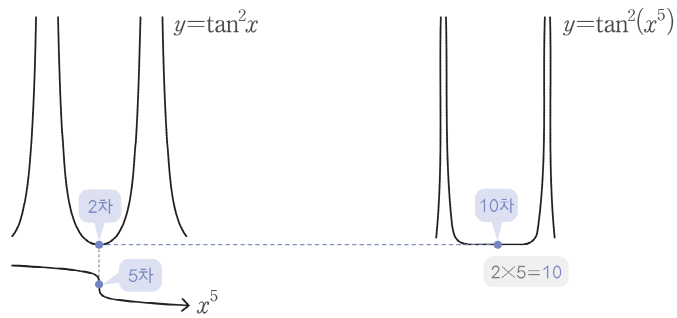
❶ $y=e^{\sin x}$: 1차(e^x)에 1차($\sin x$)를 합성했으므로 1차(x)처럼 움직입니다.



❷ $y=\sin(x^3)$: 1차($\sin x$)에 3차(x^3)를 합성했으므로 3차(x^3)처럼 움직입니다.



❸ $y=\tan^2(x^5)$: 2차($\tan^2 x$)에 5차(x^5)를 합성했으므로 10차(x^{10})처럼 움직입니다.



여기까지 이해했다면 합성함수의 움직임 및 극값, 변곡점 등의 판단을 할 준비가 된 것입니다.

— 참고

미분·적분과 차수

도함수를 활용하여 차수를 판단할 수 있습니다. 직관적으로는 x^3(3차)의 도함수가 $3x^2$(2차)인 것을 떠올려서 이해하면 됩니다. $x=0$에서 몇 가지 예시를 확인해 봅시다.

$y=\cos x$: 2차 → $y'=-\sin x$: 1차
$y=x-\sin x$: $y'=1-\cos x$가 2차이므로 $x-\sin x$는 3차
$y=x-\tan x$: $y'=1-\sec^2 x=-\tan^2 x$가 2차이므로 $x-\tan x$는 3차

이런 예시로부터, 아래와 같이 미분할 때마다 차수가 1씩 작아진다고 생각할 수 있습니다.

3차 $\xrightarrow{\text{미분}}$ 2차 $\xrightarrow{\text{미분}}$ 1차 $\xrightarrow{\text{미분}}$??

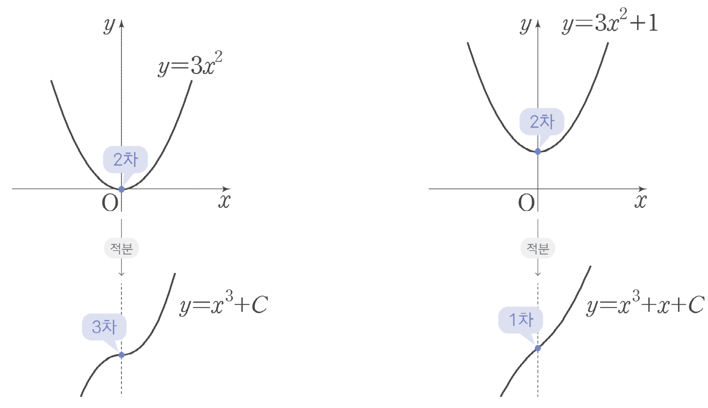
이때 주의할 점이 두 가지 있습니다.

❶ 1차를 미분했을 때의 차수는 알 수 없다

간단히 e^x(1차)를 확인해 봅시다. 이 함수는 몇 번을 미분해도 e^x으로 항상 1차입니다.
또한 $\sin x$의 경우 $x=0$에서 1차이지만 도함수인 $\cos x$는 $x=0$에서 2차입니다.
이처럼 1차의 경우 미분했을 때의 차수는 함부로 확정지어서는 안 됩니다.

❷ 적분한다고 차수가 1씩 커지는 것은 아니다

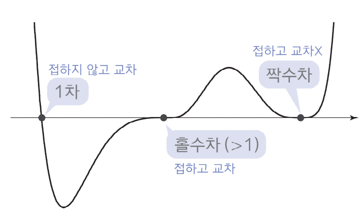
$y=3x^2$과 $y=3x^2+1$은 모두 $x=0$에서 2차이지만, 각각의 부정적분의 차수는



$\int 3x^2 dx = x^3 + C$: 3차　　$\int (3x^2+1)dx = x^3+x+C$: 1차

가 됩니다. 우리가 논하는 차수는 '최저차수'이기 때문에 나타나는 일입니다.
즉, 함숫값이 0일 때에만 적분했을 때 차수가 1만큼 커지고,
함숫값이 0이 아닌 점에서는 적분하면 항상 1차가 됩니다.

이제 「2606(미적)28」을 차수논리로 접근해 봅시다. 우선, 문제에 주어진 $f(x)$와 같이 정체를 알 수 없는 함수들이 모두 다항함수로 근사되는 예쁜 함수라는 가정하에 시작하면 됩니다. 다항함수의 개형에 따른 차수 판정법도 다시 한번 확인해 둡시다. 오른쪽 그림이 이해되면 됩니다.



3. 「2606(미적)28」과 차수논리

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$와 두 상수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a \times e^{b}$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right) \text{ 이다.}$$

(나) $f(-3)f(3)<0$, $f'(2)>0$

2026학년도 6월 모의평가 미적분 28번

(가)조건의 항등식의 좌변의 $ax+b$를 우변으로 이항합시다.

$$\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)$$

이제 좌변에 남은 함수를 x^5+x^3에 $f(x)$가 합성된 것으로 볼 수 있습니다. $y=x^5+x^3$의 원점에 대응되는 점에서의 $f(x)$의 차수를 k라 하면, $f(x)$는 미분가능하므로 $k \geq 1$입니다. 따라서 함수 $\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3$의 그 점에서의 차수는 $3k$ $(3k \geq 3)$이고, 이는 함수 $\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-ax-b$의 어떤 점에서의 차수가 3 이상임을 의미합니다.

한편 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-ax-b$를 미분하면

$$y' = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}-a = \frac{(\text{이차식})}{x^2+x+\frac{5}{2}}$$

인데, 이때 분모는 $x^2+x+\frac{5}{2}>0$이므로 차수에 영향을 주지 않습니다. 따라서 y'의 차수는 최대 2입니다. 이를 바탕으로 원함수의 차수를 생각해 보면

y': 1차 or 2차
- $y'=0$인 경우 → y: 2차 or 3차
- $y'\neq0$인 경우 → y: 1차

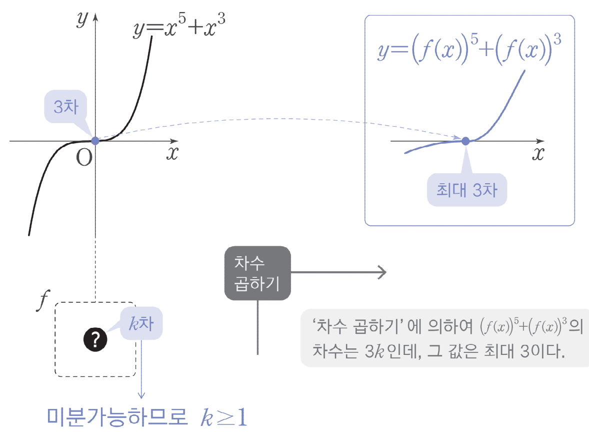
이므로 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-ax-b$의 차수는 최대 3 입니다.

결과적으로 $y=x^5+x^3$의 원점에 대응되는 점에서 $\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3$의 차수 $3k$는

$$3 \le 3k \le 3 \quad \rightarrow \quad 3k=3$$

입니다.

즉, x축이 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-ax-b$의 변곡접선임을 알 수 있습니다. 이후의 풀이는 뒤의 해법을 참고하시길 바랍니다.



참고

함수의 한 점에서의 차수를 따지거나, 합성함수 항등식을 차수논리의 관점으로 해석하는 방법은 교육과정에서 다루는 내용이 아닙니다. 그래서 이 방식으로 문제를 푸는 것이 매우 부자연스럽고 어렵게 느껴질 수 있습니다.

「2606(미적)28」은 당연히 차수논리를 몰라도 충분히 풀 수 있는 문항입니다. 따라서 차수논리 풀이에만 매달리기보다, 다른 기본 풀이를 잘 익혀두는 것이 더 중요합니다. 이후 이어질 해법은 차수논리 없이 문제를 풀고 있습니다.

그러나 차수논리를 활용해 식을 해석해 보면, 지금까지와 다른 관점에서 함수를 바라보게 되고, 특히 합성함수나 함수의 성질을 다룰 때 사고의 도구가 하나 더 생기는 효과가 있습니다. "정답을 위한 필수 기술"보다는, "함수를 다루는 새로운 해석 도구"를 배운다는 마음으로 접근하면 부담은 줄고 얻는 것은 커질 것입니다.

수능 공부에는 한완수에 실린 수준의 차수논리와, 이를 활용한 기출 문항의 풀이 학습만으로 충분합니다. 다만 더 깊은 내용이 궁금한 경우에만 오른쪽 QR 코드로 연결되는 게시글의 첨부 교재를 참고하여 학습하도록 합시다. QR의 교재에는

차수가 존재하지 않는 경우, 부분역함수와 차수논리, 차수 곱하기·나누기 등 심화 테크닉 정리

등이 수록되어 있습니다.

「2606(미적)28」 해법

「2606(미적)28」 한완기 해법
《한권으로 완성하는 기출》의 요소들로 쓰인 해법입니다.
최대한 다양한 풀이를 익히며 여러 가지 도구를 연습하도록 합시다.

교과서적 해법 1

STEP 01 $\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3$을 합성함수로 바라보기

(가)조건을 보면 $f(x)$를 x에 대한 식으로 정리하기 어렵다는 것을 알 수 있다. 그렇기 때문에 (가)조건의 식을

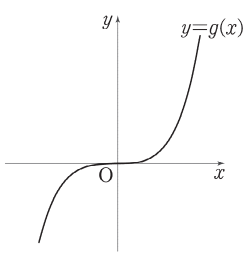
$$\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3 \;=\; \ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b) \;\cdots\; Ⓐ$$

로 정리한 후, 좌변의 함수 $y=\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3$을 두 함수 $y=x^5+x^3$, $y=f(x)$의 합성함수로 바라보며 간접적으로 조건을 해석할 생각을 해야 한다.

이때, 편의상 $g(x)=x^5+x^3$이라 하자. 합성함수 $g(f(x))$를 생각하기 전에 함수 $y=g(x)$에 대해 살펴보면

$$g(x)=x^3\left(x^2+1\right),\quad g'(x)=5x^4+3x^2\,(\geq 0)$$

이므로 다음과 같은 증가하는 그래프를 가짐을 알 수 있다.



따라서 합성함수 $y=g(f(x))$의 그래프의 개형은 $f(x)$에 의해 결정된다. 이제 $f(x)$에 대한 정보가 있는 (나)조건을 살펴보자.

STEP 02 $f(x)$에 대한 조건으로 합성함수 $g(f(x))$ 분석하기

(나)조건의 $f(-3)f(3)<0$은 사잇값 정리에 의해

열린구간 $(-3,\,3)$에 $f(\alpha)=0$인 α가 적어도 하나 존재

함을 의미한다. 이를 통해 합성함수 $g(f(x))$를 분석하면

$$g(f(\alpha))=g(0)=0,\quad g'(f(\alpha))f'(\alpha)=g'(0)f'(\alpha)=0$$

$\Downarrow$

함수 $y=g(f(x))$의 그래프는 $x=\alpha$에서
x축과 교점을 갖고, 그 교점은 접점이다 (⋯ Ⓑ)

를 알 수 있다. 또한 $g''(x)=20x^3+6x$이므로 $x=\alpha$에서 함수 $g(f(x))$의 이계도함수를 구해보면

$$\begin{aligned}&g''(f(\alpha))(f'(\alpha))^2+g'(f(\alpha))f''(\alpha)\\&=\; g''(0)(f'(\alpha))^2+g'(0)f''(\alpha) \;=\; 0 \;\cdots\; Ⓒ\end{aligned}$$

이고, (나)조건의 $f'(2)>0$에 의해

$$g'(f(2))f'(2)\geq 0 \quad\cdots\; Ⓓ$$

임을 알 수 있다.

STEP 03 합성함수 $g(f(x))$의 정보 이용하기

STEP 02 에서 분석한 합성함수 $g(f(x))$의 정보가 식 Ⓐ의 우변에 있는 함수의 정보와 일치하므로 이를 바탕으로 우변의 함수를 관찰하자.

이때, 우변의 함수를 두 함수 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$, $y=ax+b$의 차함수로 생각하면 보다 수월하다.

먼저, $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$의 그래프를

교과서 개념 함수의 그래프 한완기 미적 평수능 본문 154p

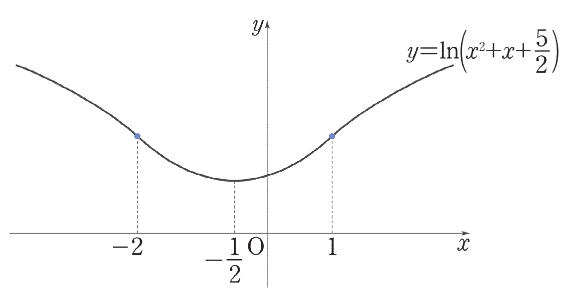
의 과정을 간략히 적용하여 그려보자.

④⑤ $y'=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} \quad\rightarrow\quad x=-\dfrac{1}{2}$에서 극소

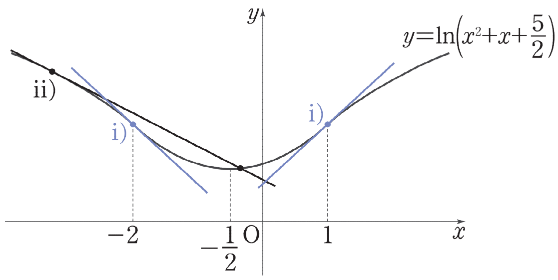
$$y''=\frac{2\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(2x+1)^2}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}$$

$\rightarrow\quad x=-2,\ x=1$에서 변곡점

$\Downarrow$



두 함수 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$, $y=ax+b$의 차함수의 그래프가 Ⓑ와 같이 $x=\alpha$에서 x축과 접하려면 함수 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$의 그래프는 직선 $y=ax+b$와 $x=\alpha$에서 접해야 한다.



그림과 같이 곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$와 직선 $y=ax+b$가 접하는 경우는

i) 접점이 변곡점이거나 $x=-\frac{1}{2}$일 때 교점의 개수는 1

ii) 접점이 변곡점이 아니고 $x\neq-\frac{1}{2}$일 때 교점의 개수는 2

가 가능하다. 이때 ii)의 경우나 $x=-\frac{1}{2}$인 경우에는 접점이 ⓒ를 만족시키지 못하므로 i)에서 접점이 변곡점인 경우만이 가능하다. 또한 ⓓ를 만족시키려면

$y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$의 $x=2$에서의 접선의 기울기

가 직선 $y=ax+b$의 기울기인 a 이상이어야 한다. 즉,

직선 $y=ax+b$는 함수 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$의 $x=-2$에서의 접선

이어야 한다. 따라서

$$\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)_{x=-2}=\ln\frac{9}{2},\quad \left.\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}\right|_{x=-2}=-\frac{2}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$y=-\frac{2}{3}(x+2)+\ln\frac{9}{2}=-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}+\ln\frac{9}{2}$$

$$\therefore\ a=-\frac{2}{3},\ b=-\frac{4}{3}+\ln\frac{9}{2}\ \rightarrow\ a\times e^b=\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{9}{2}e^{-\frac{4}{3}}\right)$$

$$=-3e^{-\frac{4}{3}}$$

흐름 정리 풀이의 전체적인 흐름을 큰 그림으로 다시 정리하는 과정

STEP 01 $(f(x))^5+(f(x))^3$을 합성함수로 바라보기

① $f(x)$를 x에 대한 식으로 정리하기 어렵다는 것을 인지해야 한다.

② 합성함수로 바라본 후, 간접적으로 조건을 해석해야 한다.

STEP 02 $f(x)$에 대한 조건으로 합성함수 $g(f(x))$ 분석하기

① $f(\alpha)=0$인 α가 열린구간 $(-3,3)$에 존재한다.

② 함수 $y=g(f(x))$의 그래프는 $x=\alpha$에서 x축과 접한다.

③ 함수 $y=g(f(x))$의 그래프는 $x=\alpha$에서 변곡점을 가진다.

④ 이때 $f'(2)>0$이므로 $g'(f(2))f'(2)\geq 0$이다.

STEP 03 합성함수 $g(f(x))$의 정보 이용하기

① 두 함수 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$, $y=ax+b$의 차함수로 바라볼 수 있어야 한다.

② 구간 $(-3,3)$에서
곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)$와 직선 $y=ax+b$의 교점은 항상 접점이어야 하며, 변곡점이며 이 점에서의 기울기가 양수라는 조건까지 적용하면 정답 상황을 찾을 수 있다.

교과서적 해법 2

LECTURE 우직한 계산 풀이 저자의 특강

2026학년도 6평 미적분 28번은 여러 가지 다양한 풀이가 가능하지만, 실전 개념 이나 특별한 발상 없이 우직한 계산만으로도 충분히 풀어낼 수 있다. 그러한 풀이가 이 교과서적 해법 2 이다.

수능에서 어떤 풀이가 더 우월한지 따지는 것은 무의미하다. 교과서적 해법 2 와 같이

열심히 계산하여 정답을 구해내는 풀이

를 정독하며, 복잡한 이론 없이 정확한 계산 능력과 논리력만으로 정답을 구하는 경험을 해보자. 다양한 무기를 갖추어 실제 수능에서는 자신에게 가장 잘 맞는 방법으로 문제를 풀어내는 것이 중요하다.

(가)조건의 항등식의 양변을 미분하면 다음과 같다.

$$\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3+ax+b=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right) \quad \cdots \text{Ⓐ}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3+ax+b\right]=\frac{d}{dx}\left[\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$5\left(f(x)\right)^4f'(x)+3\left(f(x)\right)^2f'(x)+a=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x)\left[5\left(f(x)\right)^4+3\left(f(x)\right)^2\right]+a=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}} \quad \cdots \text{Ⓑ}$$

함수 $f(x)$가 이계도함수를 가진다고 했으므로 $f''(x)$를 등장시켜 보자. Ⓑ의 양변을 한 번 더 미분하면 다음을 얻는다.

$$f'(x)\left[5\left(f(x)\right)^4+3\left(f(x)\right)^2\right]+a=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x)\left[5\left(f(x)\right)^4+3\left(f(x)\right)^2\right]+\left(f'(x)\right)^2\left[20\left(f(x)\right)^3+6f(x)\right]=\frac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} \quad \cdots \text{Ⓒ}$$

(나)조건에서 $f(-3)f(3)<0$이고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(k)=0$인 상수 k가 열린구간 $(-3, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

여기서 $f(k)=0$인 k를 Ⓐ, Ⓑ, Ⓒ에 대입하자. 여기서 k를 대입하는 것이 다소 뜬금없이 느껴질 수 있는데, 이러한 행동을 하는 것은 이를 Ⓐ, Ⓑ, Ⓒ에 대입했을 때 다음과 같이 식의 좌변이 깔끔해지기 때문이다.

$$\text{Ⓐ} \rightarrow \left(f(k)\right)^5+\left(f(k)\right)^3+ak+b=\ln\left(k^2+k+\frac{5}{2}\right)$$

$$\rightarrow 0^5+0^3+ak+b=\ln\left(k^2+k+\frac{5}{2}\right)$$

$$\rightarrow ak+b=\ln\left(k^2+k+\frac{5}{2}\right) \quad \cdots \text{Ⓓ}$$

$$\text{Ⓑ} \rightarrow f'(k)\left[5\left(f(k)\right)^4+3\left(f(k)\right)^2\right]+a=\frac{2k+1}{k^2+k+\frac{5}{2}}$$

$$\rightarrow f'(k)\left[5\cdot 0^4+3\cdot 0^2\right]+a=\frac{2k+1}{k^2+k+\frac{5}{2}}$$

$$\rightarrow a=\frac{2k+1}{k^2+k+\frac{5}{2}} \quad \cdots \text{Ⓔ}$$

$$\text{Ⓒ} \rightarrow f''(k)\left[5\left(f(k)\right)^4+3\left(f(k)\right)^2\right]+\left(f'(k)\right)^2\left[20\left(f(k)\right)^3+6f(k)\right]=\frac{-2(k+2)(k-1)}{\left(k^2+k+\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow f''(k)\left[5\cdot 0^4+3\cdot 0^2\right]+\left(f'(k)\right)^2\left[20\cdot 0^3+6\cdot 0\right]=\frac{-2(k+2)(k-1)}{\left(k^2+k+\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow 0=\frac{-2(k+2)(k-1)}{\left(k^2+k+\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow -2(k+2)(k-1)=0$$

$$\rightarrow k=-2 \text{ 또는 } k=1 \quad \cdots \text{Ⓕ}$$

식이 매우 많고 복잡하지만, 결과만 정리하면 다음과 같다.

Ⓓ $ak+b=\ln\left(k^2+k+\frac{5}{2}\right)$,

Ⓔ $a=\frac{2k+1}{k^2+k+\frac{5}{2}}$,

Ⓕ $k=-2$ 또는 $k=1$

즉, Ⓕ의 $k=-2$ 또는 $k=1$을 Ⓔ에 대입하여 a의 값을 구하고, 구한 a의 값과 k의 값을 Ⓓ에 대입하여 b의 값을 구하면 문제를 풀 수 있다.

이때 $k=-2$와 $k=1$ 중 무엇이 정답인 상황인지는 아직 활용되지 않은 조건인 $f'(2)>0$을 활용하여 판단하면 될 것이라 예상할 수 있다.

$k=1$인 경우부터 생각해 보자. Ⓔ에 $k=1$을 대입하면

$$a = \frac{2\cdot 1+1}{1^2+1+\frac{5}{2}} = \frac{2}{3}$$

이때 (나)조건의 $f'(2)>0$이 성립하는지 확인하기 위하여

$$Ⓑ\ f'(x)\left[5\left(f(x)\right)^4+3\left(f(x)\right)^2\right]+a=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$$

에 $x=2$를 대입해 보자. $a=\frac{2}{3}$이므로

$$f'(2)\left[5\left(f(2)\right)^4+3\left(f(2)\right)^2\right]+\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 2+1}{2^2+2+\frac{5}{2}}$$

$$\rightarrow\ f'(2)\left[5\left(f(2)\right)^4+3\left(f(2)\right)^2\right]=-\frac{4}{51}\quad \cdots\ Ⓖ$$

이때 $f(2)$의 값에 관계없이 $5\left(f(2)\right)^4+3\left(f(2)\right)^2\geq 0$인데,
(나)조건에서 $f'(2)>0$이므로

$$f'(2)\left[5\left(f(2)\right)^4+3\left(f(2)\right)^2\right]\geq 0$$

이 되어 Ⓖ에 모순이 된다. 즉, $k=1$인 경우는 원하는 상황이 아니다.

따라서 $k=-2$일 수밖에 없으므로[1] 계산하여 정답을 내면 된다. Ⓔ에 $k=-2$를 대입하면

$$a = \frac{2(-2)+1}{(-2)^2+(-2)+\frac{5}{2}} = -\frac{2}{3}$$

이제 Ⓓ에 $a=-\frac{2}{3}$, $k=-2$를 대입하면 다음과 같이 b의 값을 계산할 수 있다.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)(-2)+b=\ln\left((-2)^2+(-2)+\frac{5}{2}\right)$$

$$\rightarrow\ b=-\frac{4}{3}+\ln\frac{9}{2}$$

$$\therefore\ a\times e^b = \left(-\frac{2}{3}\right)\times e^{-\frac{4}{3}+\ln\frac{9}{2}} = -3e^{-\frac{4}{3}}$$

CHECK 각주 해설 본문의 각주

1) 이 경우도 다른 조건들을 만족시키는지 모두 확인하여야 완전한 풀이이다. 만약 이 경우도 모순이 나온다면 정답이 존재하지 않는 것인데, 시험문제가 그럴 리 없으므로 믿고 계산만 하면 충분한 것이다. 즉, 정답이 존재하는 '시험문제'라는 것을 고려한 편법(?)과 같은 것이다.

실제로 다른 조건을 모두 만족시키는 것은 스스로 확인해 보도록 하자.

'차수논리'를 활용한 풀이입니다.

실전적 해법

(가)조건의 항등식에서 좌변의 $ax+b$를 우변으로 이항하자.

$$\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(ax+b)$$

이제 좌변에 남은 함수를 x^5+x^3에 $f(x)$가 합성된 것으로 보자. $y=x^5+x^3$의 원점에 대응되는 점에서의 $f(x)$의 차수를 k라 하면, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $k\geq 1$이다.

따라서 함수 $\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3$의 그 점에서의 차수는 $3k$ $(3k\geq 3)$이고, 이는 함수 $\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-ax-b$의 어떤 점에서의 차수가 3 이상임을 의미한다.

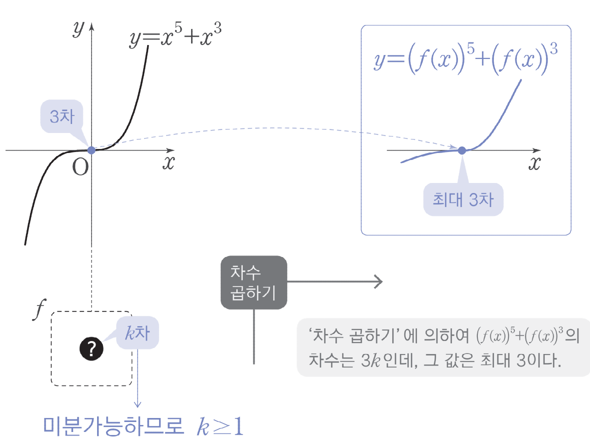
한편 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-ax-b$를 미분하면

$$y'=\frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}-a=\frac{(\text{이차식})}{x^2+x+\frac{5}{2}}$$

인데, 이때 분모는 $x^2+x+\frac{5}{2}>0$이므로 차수에 영향을 주지 않는다. 따라서 y'의 차수는 최대 2이다. 이를 바탕으로 원함수의 차수를 생각해 보면

y': 1차 or 2차
- $y'=0$인 경우 → y: 2차 or 3차
- $y'\neq 0$인 경우 → y: 1차

이므로 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-ax-b$의 차수는 최대 3이다.



결과적으로 $y=x^5+x^3$의 원점에 대응되는 점에서 $\left(f(x)\right)^5+\left(f(x)\right)^3$의 차수 $3k$는

$$3\leq 3k\leq 3 \quad\rightarrow\quad 3k=3$$

이다. 즉, x축이 곡선 $y=\ln\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-ax-b$의 변곡접선임을 알 수 있다.

이후의 풀이는 $\boxed{\text{교과서적 해법 1}}$과 같다.

LECTURE 자신만의 풀이 저자의 특강

Integrity에서는 2026학년도 6평 미적분 28번에 대하여 실전적 해법 한 가지와 $\boxed{\text{교과서적 해법}}$ 두 가지, 총 세 가지의 풀이를 제시하고 있다.

모든 풀이를 읽으며 공통점과 차이점을 분석해보면, 같은 문항도 접근법에 따라 완전히 다른 사고과정을 경험할 수 있음을 깨달을 수 있을 것이다. 기출 문제를 여러 번 다른 방법으로 풀어보며 '왜 이렇게 되는가'를 스스로 납득하고, 그 과정을 통해 본인 나름대로 제일 납득이 잘 되는, **자신만의 풀이**를 완성할 수 있도록 하자.

이렇게 풀이를 완성해본 경험을 쌓아나가면 수학적 사고력 자체가 한 단계 성장하게 될 것이다.

정답 ①

2026학년도 6평
미적분 29번 문항

정답률 27%

두 정수 α, $\beta(\alpha>\beta)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_n=\alpha\times\sin\frac{n}{2}\pi+\beta\times\cos\frac{n}{2}\pi$$
>
> 이고, $a_1\times a_2\times a_3\times a_4=4$이다.

수열 $\{a_n\}$과 $b_1>0$인 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}b_{2n})=6$$

일 때, $b_1\times b_3=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

교과서적 요소
- 급수의 성질
- 등비급수의 수렴과 발산

이해원 N제 연계
- 시즌1 미적분
  #4 #8 #19 #31 #40 #45 #57 #63
  #67 #78

GLIMPSE 최상위권이 발문만 힐끗 보고 하는 생각

❶ 두 정수 α, β

정수 조건은 여러 케이스 중 단 하나의 상황을 확정지어 주는 경우가 많다. 이 문제에서도 그러지 않을까?

❷ 겉보기에는 번지르르

박스 안의 $a_n=\alpha\times\sin\frac{n}{2}\pi+\beta\times\cos\frac{n}{2}\pi$가 겉보기에는 굉장히 복잡해 보이는데,

$n=1$, 2, 3, $\cdots$를 넣어보면 계산하면 규칙성이 매우 쉽게 보인다.

사인함수와 코사인함수의 주기가 2π이므로....

— NOTE

본인의 풀이를 컴팩트하게 작성해 보세요.

COMMENT 인터그레이트의 코멘트

제시된 조건을 통해 의도된 풀이의 방향을 쉽게 파악할 수 있는 문항입니다. 조건이 의미하는 바를 너무 고민하지 말고 발문을 따라서 a_1, a_2, a_3, a_4를 차례로 구해보면 수열 $\{a_n\}$의 규칙을 파악할 수 있게 되고, 이 규칙을 바탕으로 계산을 마무리하면 어렵지 않게 구하고자 하는 값을 구할 수 있습니다.

최근에도 급수 문항은 꾸준히 4점 배점으로 출제되고 있으며, 다양한 소재와 결합한 형태로 진화하고 있습니다. 뒤의 「2606(미적)29」 **분석**을 통해 급수 문항의 최신 트렌드를 소개해 두었으니 참고하여 학습하시길 바랍니다. N제나 실전 모의고사에서 여러 급수 문제를 풀며 「2606(미적)29」 수준의 문제는 무리 없이 맞힐 수 있는 실력을 기르는 것이 중요합니다.

APPENDIX 참고 콘텐츠

한완수	· 미적분(상) 58p, · 미적분(하) 20p,	Chapter B 급수 TOPIC 01 급수 문항의 트렌드
한완기	· 미적분 평수능 70p,	Pattern 02 급수의 성질과 수렴하는 급수 2가지를 숙지하라!
이해원 N제	· 시즌1 미적분	#4 #8 #19 #31 #40 #45 #57 #63 #67 #78

REACTION 시험 당일 수험생들의 생생한 반응

1,119 457 7.5만

lhw_math님 외 **27.7만명**이 풀었습니다

#급수 #등비수열 #삼각함수 #정수조건

kim_da 172
수열 a_n의 정의가 괴팍해 보이는데, 나열하니까 너무 쉬운 수열임
답글 달기

dogixmylife 163
그래도 이 규칙성이 저렇게 표현된게 신선하고 좋았음
답글 달기

sxo_yxxn 94
뭔가 있어보이는데 아무것도 없는문제
답글 달기

nanun_heosoo 65
ㄹㅇㅋㅋ 어렵게 보이려고 할수 있는건 다했는데 알맹이가 없음
답글 달기

「2606(미적)29」 분석

1. 급수 문항의 트렌드 변화

「2606(미적)29」를 살펴보기 전, 최근 평가원·수능에서 급수 문항의 트렌드가 어떻게 변화했는지를 간단히 살펴보겠습니다. 먼저 2023학년도 수능까지는 아래와 같이 도형이 무한히 반복되는 상황을 설정하고 그 넓이의 합을 묻는 **「도형+등비급수」** 유형이 단골로 출제되었습니다.

2023학년도 수능 미적분 27번

그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $\mathrm{OA_1B_1}$이 있다.

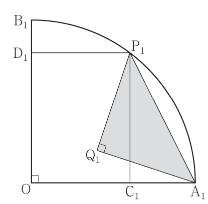
⋮

(중략)

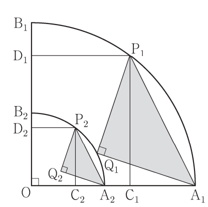
⋮

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{9}{40}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{11}{40}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{13}{40}$

그러나 2024학년도부터는 위와 같은 **「도형+등비급수」** 유형이 역사 속으로 사라지며 출제 스타일이 크게 바뀌게 됩니다. 급수 단원은 일종의 '껍데기'이고, 순수 수학적 논리로 밀어붙여 조건을 설정하거나 등차수열·삼각함수 등 다른 단원의 소재와 결합한 형태의 문제가 출제되기 시작한 것입니다.

다음은 2024, 2025학년도의 평가원 급수 문항 중 일부입니다. **발문만 읽어보며** 급수 단원의 내용이 얼마나 쓰였는지, 급수 단원 이외의 내용이 얼마나 들어가 있는지 살펴보며 변화를 체감해 봅시다.

2024학년도 기출

2024학년도 6평 미적분 30번

수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고,
수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}-1 & (a_n\le -1)\\ a_n & (a_n>-1)\end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.
(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3=-1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$의 값을 구하시오. [4점]

2024학년도 수능 미적분 29번

첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\times\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right),$$
$$3\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{2n}|=7\times\sum_{n=1}^{\infty}|a_{3n}|$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}=S$일 때, $120S$의 값을 구하시오. [4점]

2025학년도 기출

2025학년도 9평 미적분 29번

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합을 S_m이라 하자. 모든 자연수 m에 대하여

$$S_m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

일 때, $a_1+a_{10}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2025학년도 수능 미적분 29번

등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+a_n\right)=\frac{40}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|-a_n\right)=\frac{20}{3}$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$

을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

2024학년도에는 「**2406(미적)30**」, 「**24수능(미적)29**」와 같이 등비급수를 주로 다루는 문항이 출제되었습니다. 이에 반해 2025학년도에는

「**2509(미적)29**」와 같이 '심화적인 부분분수 해석'이 필요한 문항
「**25수능(미적)29**」와 같이 '양수수열, 음수수열 해석'이 필요한 문항

이 출제되었습니다. 이를 통해 **'급수 단원 이외의 주제'**가 차지하는 비율이 올라가는 방향으로 출제 스타일이 변화했다고 해석할 수 있습니다.

2. 「2606(미적)29」에서의 관찰

2026학년도에 들어서는 **'급수 단원 이외의 주제'**가 갖는 비율이 더욱 올라가는 추세입니다. 이해를 돕기 위해 「2606(미적)29」의 교과서적 해법 을 살펴보겠습니다.

교과서적 해법

a_1, a_2, a_3, a_4에 대한 조건이 주어져 있으므로 주어진 식으로부터 이들을 먼저 구하자.

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha\times\sin\frac{\pi}{2}+\beta\times\cos\frac{\pi}{2} &&= \alpha \\ a_2 &= \alpha\times\sin\pi+\beta\times\cos\pi &&= -\beta \\ a_3 &= \alpha\times\sin\frac{3\pi}{2}+\beta\times\cos\frac{3\pi}{2} &&= -\alpha \\ a_4 &= \alpha\times\sin2\pi+\beta\times\cos2\pi &&= \beta \end{aligned}$$

구한 값을 그대로 대입하면 다음을 얻는다.

$$a_1\times a_2\times a_3\times a_4 = (\alpha\beta)^2 = 4$$

$$\Downarrow$$

가능한 두 정수 α, $\beta\,(\alpha>\beta)$의 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$는

$(2,1)$, $(-1,\ -2)$, $(2,\ -1)$, $(1,\ -2)$ (⋯ Ⓐ)

삼각함수

다음으로 a_{4n-2}, a_{4n-3}을 살펴보자.

$$\begin{aligned} a_{4n-2} &= \alpha\times\sin\frac{(4n-2)\pi}{2}+\beta\times\cos\frac{(4n-2)\pi}{2} \\ &= \alpha\times\sin(2n-1)\pi+\beta\times\cos(2n-1)\pi \\ &= -\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{4n-3} &= \alpha\times\sin\frac{(4n-3)\pi}{2}+\beta\times\cos\frac{(4n-3)\pi}{2} \\ &= \alpha\times\sin\left(2n-\frac{3}{2}\right)\pi+\beta\times\cos\left(2n-\frac{3}{2}\right)\pi \\ &= \alpha \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(-\beta b_n),\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}b_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha b_{2n})$$

급수

이 두 급수가 6으로 수렴하기 때문에 등비수열 $\{b_n\}$의 공비 r은 $|r|<1$이어야 한다.

등비급수의 합 공식을 이용해 식을 정리하자.

Ⓑ: $\sum_{n=1}^{\infty}(-\beta b_n) \;=\; \frac{-\beta b_1}{1-r} \;=\; 6$

Ⓒ: $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha b_{2n}) \;=\; \frac{\alpha b_1 r}{1-r^2} \;=\; 6$

$\Downarrow$

Ⓒ÷Ⓑ: $\frac{\alpha r}{-\beta(1+r)}=1 \;\rightarrow\; r=-\frac{\beta}{\alpha+\beta}$

급수

앞서 구한 Ⓐ를 대입하여 $|r|<1$을 만족시키는 경우를 찾아보자.

$(\alpha, \beta)=(2, 1) \quad \rightarrow \quad r=-\frac{1}{3}$ ⋯ ⅰ)

$(\alpha, \beta)=(-1, -2) \quad \rightarrow \quad r=-\frac{2}{3}$ ⋯ ⅱ)

$(\alpha, \beta)=(2, -1) \quad \rightarrow \quad r=1$ (모순)

$(\alpha, \beta)=(1, -2) \quad \rightarrow \quad r=-2$ (모순)

계산

ⅰ)의 경우는 $\beta=1$, $r=-\frac{1}{3}$이므로 Ⓑ: $\frac{-\beta b_1}{1-r}=6$에 대입했을 때, $b_1<0$이 되어 문제의 조건을 만족시키지 못한다. 따라서 ⅱ)의 경우가 문제에서 묻는 상황이므로 이를 통해 b_1을 구하자.

Ⓑ: $\frac{-\beta b_1}{1-r}=6$에 $\beta=-2$, $r=-\frac{2}{3}$ 대입 $\rightarrow$ $\frac{2b_1}{1+\frac{2}{3}}=6$에서 $b_1=5$

$\therefore\; b_1\times b_3 \;=\; 5^2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \;=\; \frac{100}{9} \;\rightarrow\; p+q=109$

「2606(미적)29」의 교과서적 해법을 보면 알 수 있듯, 풀이 과정의 대부분이 급수가 아니라 '삼각함수' 또는 '계산'으로 이루어져 있는 것을 알 수 있습니다. 즉, **'급수 단원 이외의 주제'**에서 난도를 확보하고, '급수'의 요소는 조건 하나에만 활용되도록 구성해서

급수와 관계없는 부분이 어렵지만, 급수의 내용을 모르면 못 푸는 문제

를 출제한 것으로 이해할 수 있습니다. 9월 모의평가의 「2609(미적)29」와 수능의 「26수능(미적)29」 역시 비슷한 형태로 출제되었습니다. 최신 기출을 공부할 때는 이를 유의하면서 학습하도록 합시다.

「2606(미적)29」 해법

「2606(미적)29」 한완기 해법
《한권으로 완성하는 기출》의 요소들로 쓰인 해법입니다.
최대한 다양한 풀이를 익히며 여러 가지 도구를 연습하도록 합시다.

교과서적 해법

a_1, a_2, a_3, a_4에 대한 조건이 주어져 있으므로
주어진 식으로부터 이들을 먼저 구하자.

$$a_1 = \alpha\times\sin\frac{\pi}{2}+\beta\times\cos\frac{\pi}{2} = \alpha$$
$$a_2 = \alpha\times\sin\pi+\beta\times\cos\pi = -\beta$$
$$a_3 = \alpha\times\sin\frac{3\pi}{2}+\beta\times\cos\frac{3\pi}{2} = -\alpha$$
$$a_4 = \alpha\times\sin2\pi+\beta\times\cos2\pi = \beta$$

구한 값을 그대로 대입하면

$$a_1\times a_2\times a_3\times a_4 = (\alpha\beta)^2 = 4$$
$$\Downarrow$$
가능한 두 정수 α, $\beta(\alpha>\beta)$의 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$는
$(2,\ 1)$, $(-1,\ -2)$, $(2,\ -1)$, $(1,\ -2)$ (⋯ Ⓐ)

임을 알 수 있다. 다음으로 주어진 두 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}b_n),\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}b_{2n})$$

을 해석하기 위해 a_{4n-2}, a_{4n-3}을 살펴보자.

$$\begin{aligned}a_{4n-2} &= \alpha\times\sin\frac{(4n-2)\pi}{2}+\beta\times\cos\frac{(4n-2)\pi}{2}\\ &= \alpha\times\sin(2n-1)\pi+\beta\times\cos(2n-1)\pi\\ &= -\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{4n-3} &= \alpha\times\sin\frac{(4n-3)\pi}{2}+\beta\times\cos\frac{(4n-3)\pi}{2}\\ &= \alpha\times\sin\left(2n-\frac{3}{2}\right)\pi+\beta\times\cos\left(2n-\frac{3}{2}\right)\pi\\ &= \alpha\end{aligned}$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-2}b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(-\beta b_n),\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_{4n-3}b_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha b_{2n})$$

이 두 급수가 6으로 수렴하기 때문에 등비수열 $\{b_n\}$의 공비 r은 $|r|<1$이어야 한다. 공식을 통해 식을 추가적으로 정리하자.

$$Ⓑ:\ \sum_{n=1}^{\infty}(-\beta b_n) = \frac{-\beta b_1}{1-r} = 6$$
$$Ⓒ:\ \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha b_{2n}) = \frac{\alpha b_1 r}{1-r^2} = 6$$
$$\Downarrow$$
$$Ⓒ\div Ⓑ:\ \frac{\alpha r}{-\beta(1+r)}=1 \rightarrow r=-\frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

앞서 구한 Ⓐ를 대입하여 $|r|<1$을 만족시키는 경우를 찾아보자.

$(\alpha,\ \beta)=(2,\ 1) \rightarrow r=-\frac{1}{3}$ ⋯ ⅰ)
$(\alpha,\ \beta)=(-1,\ -2) \rightarrow r=-\frac{2}{3}$ ⋯ ⅱ)
$(\alpha,\ \beta)=(2,\ -1) \rightarrow r=1$ (모순)
$(\alpha,\ \beta)=(1,\ -2) \rightarrow r=-2$ (모순)

ⅰ)의 경우는 $\beta=1$, $r=-\frac{1}{3}$이므로 Ⓑ: $\frac{-\beta b_1}{1-r}=6$에 대입했을 때, $b_1<0$이 되어 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 ⅱ)의 경우가 문제에서 묻는 상황이므로 이를 통해 b_1을 구하자.

Ⓑ: $\frac{-\beta b_1}{1-r}=6$에 $\beta=-2$, $r=-\frac{2}{3}$ 대입
$\rightarrow \frac{2b_1}{1+\frac{2}{3}}=6$에서 $b_1=5$

$$\therefore\ b_1\times b_3 = 5^2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{100}{9} \rightarrow p+q=109$$

정답 109

2026학년도 6평
미적 30번 문항

정답률 8%

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = \left| f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right) \right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $g(0)>0$이다.
> (나) $g'(\ln 3)<0$, $|g'(-\ln 3)| = \frac{3}{8}g(-\ln 3)$

$g(0)$의 최솟값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

교과서적 요소
- 함수의 그래프
- 합성함수

수능·실전적 요소
- 절댓값 함수의 미분가능성 한완수·한완기
- 합성함수의 그래프와 극값 한완수·한완기
- 미분불가능 후보 찾기 한완수·한완기
- 합성함수의 극대·극소 한완수·한완기

이해원 N제 연계
- 시즌1 미적분
  #27 #32 #41 #68 #81

GLIMPSE 최상위권이 발문만 힐끗 보고 하는 생각

❶ N축

속함수 $\frac{2}{1+e^{-x}}$는 증가함수이므로 함수 g의 극대·극소는 겉함수 $|f|$의 극대·극소에 의해서 나타난다.

❷ 여러 조건들

부호로 주어진 조건 $g(0)>0$, $g'(\ln 3)<0$ 등은 케이스를 거르는 데 쓰일 것이다.

$|g'(-\ln 3)| = \frac{3}{8}g(-\ln 3)$에서 $g'(-\ln 3)$의 값을 어떻게 계산하지? 절댓값 함수를 미분해야 하는데...

❸ 절댓값 함수가 미분가능?

$|f|$는 웬만하면 미분가능하지 않은 점을 가질 거 같은데...

이 부분을 속함수 $\frac{2}{1+e^{-x}}$가 어떻게 해결해 주는 것일까?

— NOTE

본인의 풀이를 컴팩트하게 작성해 보세요.

COMMENT 인터그레이트의 코멘트

미적분 4점 문항의 단골 소재인 '합성함수의 극대·극소'를 묻는 문항입니다. 과거에는 겉함수와 속함수가 모두 극값을 가지는 경우를 출제하였으나, 「2606(미적)30」은 속함수를 단순 증가함수로 출제하여 'N축'의 활용도가 크게 줄었다는 특징이 있습니다. 또한 (나)조건에서는 복잡한 계산 능력을 요구하고 있습니다.

이처럼 평가원·수능에서도 복잡한 계산을 요구하는 경우가 늘어나고 있습니다. 「2606(미적)30」 수준의 계산을 부담 없이 해낼 수 있도록 평소에 계산 연습을 충분히 해두도록 합시다.

APPENDIX 참고 콘텐츠

한완수	· 미적분(상) 198p, Chapter H 함수의 그래프 · 미적분(하) 272p, TOPIC 21 합성함수의 이해 · 미적분(하) 460p, TOPIC 39 합성함수의 극대·극소 (N축)
한완기	· 미적분 평수능 182p, Pattern 13 사칙연산·합성함수의 미분가능성, 극대·극소 · 미적분 Thema 44p, Thema 29 합성함수의 그래프와 극값 (N축) · 미적분 Thema 48p, Thema 30 합성함수의 극대·극소 (N축)
이해원 N제	· 시즌1 미적분 #27 #32 #41 #68 #81

REACTION 시험 당일 수험생들의 생생한 반응

1,119 457 7.5만

lhw_math님 외 27.7만명이 풀었습니다

#합성함수 #절댓값함수 #합성함수미분 #극값

06r0rx 312
뭔가 과조건처럼 느껴지는데 조건이 많아서 오히려 더 헷갈리는 느낌
답글 달기

zx_adv 171
f가 만족해야하는 조건이 너무 많아서 정확히 다 표현하기 힘들었음
답글 달기

nanun_heosoo 189
처음에 접근선 활용해야 한다는 생각을 못했었음
답글 달기

w00ri 212
분명 합성함수문젠데 속함수가 증가만해서 그런가? 그래프가 뚝딱 나옴ㅋㅋㅋ 전에 나온 합성함수문제랑은 확실히 뭔가 다름
답글 달기

0wansoo 118
n축 이슈 때문에 속함수가 단조함수인 경우만 나오는듯
답글 달기

「2606(미적)30」 한완기 해법
《한권으로 완성하는 기출》의 요소들로 쓰인 해법입니다.
최대한 다양한 풀이를 익히며 여러 가지 도구를 연습하도록 합시다.

30

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\left|f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고①
다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소②이고,
> $g(0)>0$ 이다.
> (나) $g'(\ln 3)<0$, $|g'(-\ln 3)|=\dfrac{3}{8}g(-\ln 3)$ ③

$g(0)$ 의 최솟값을 $\dfrac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

발문 분석 발문을 읽으며 할 수 있는 생각, 해야 하는 생각

① 합성함수의 미분가능성은 미분불가능 후보부터 생각해야 한다.
함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 첨점을 가지는 경우가 있기 때문에 미분불가능 후보가 존재한다. 이 지점이 합성된 함수 $y=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ 에 의해 어떻게 미분가능하게 되는지를 확인해야 한다.

② 합성함수가 극값을 가질 조건을 생각하자.
합성함수인 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 극소이므로
실전 개념 합성함수의 극대·극소 한완기 미적 Thema 48p를 떠올려 풀이를 진행해야 한다.

③ $x=\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{3}{2}$ 에서의 $f(x)$ 를 관찰해야 한다.
절댓값을 제거하기 위해선 절댓값 안의 부호를 명확하게 구분해야 한다.
따라서 $x=\ln 3$, $x=-\ln 3$ 에서의 $\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ 의 값인 $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{1}{2}$ 을 구해 놓고, 이 지점에서 함수 $f(x)$ 의 값의 부호를 관찰할 생각을 해야 한다.

실전적 해법

함수 $g(x)$ 는 두 함수 $y=|f(x)|$, $y=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ 의 합성함수이다.

속함수인 $y=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ 의 그래프를

교과서 개념 함수의 그래프 한완기 미적 평수능 본문 154p

의 과정을 통해 살펴보면

① 정의역은 실수 전체의 집합이고
치역은 집합 $\{y|0<y<2\}$ 이다.
② 보자마자 대칭성, 주기성이 보이진 않는다.
③ 점 $(0,\ 1)$ 을 지난다.
④⑤ $y'=\dfrac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}>0$ 이므로 실수 전체의 집합에서
증가한다. 볼록성은 필요시 이계도함수를 구해 확인하자.
⑥ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1+e^{-x}}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+e^{-x}}=2$ 이므로
x 축, $y=2$ 가 점근선임을 알 수 있다.

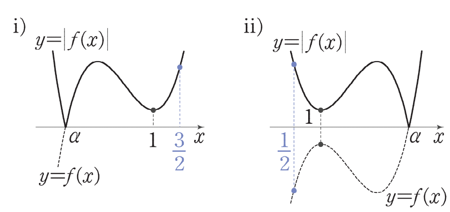
따라서 (가)조건에서 합성함수인 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서
0 보다 큰 극솟값을 갖는다는 정보를

실전 개념 합성함수의 극대·극소 한완기 미적 Thema 48p

로 해석하면

겉함수 $|f(x)|$ 가 $x=\dfrac{2}{1+e^{-0}}=1$ 에서 극소

임을 알 수 있다.



이제 (나)조건으로 ⅰ), ⅱ) 중에서 가능한 경우를 찾아내자.

ⅰ)의 경우에서

$$\begin{aligned} g'(\ln 3) &= \left\{\left|f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|\right\}'_{x=\ln 3} = \left\{f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right\}'_{x=\ln 3} \\ &= f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)'_{x=\ln 3} \end{aligned}$$

이고, 이 값은 0보다 크므로 (나)조건의 $g'(\ln 3)<0$을 만족시키지 못한다. 따라서 ⅱ)의 경우가 문제에서 묻는 상황이다. 즉,

$$\begin{aligned} g'(-\ln 3) &= \left\{\left|f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|\right\}'_{x=-\ln 3} \\ &= \left\{-f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right\}'_{x=-\ln 3} \\ &= -f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)'_{x=-\ln 3} \\ &= -\frac{3}{8}f'\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(-\ln 3) &= \left\{\left|f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right|\right\}_{x=-\ln 3} \\ &= \left\{-f\left(\frac{2}{1+e^{-x}}\right)\right\}_{x=-\ln 3} \\ &= -f\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$|g'(-\ln 3)|=\frac{3}{8}g(-\ln 3) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{8}f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\to \quad f'\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)$$

을 얻을 수 있다.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능함을 이용하자.

함수 $f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 미분가능

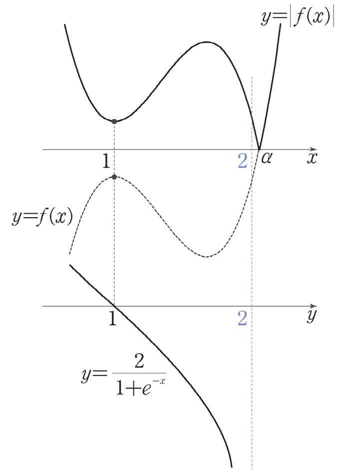
속함수 $y=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$도 실수 전체의 집합에서 미분가능

$$\Downarrow$$

앞서 그린 그림 ⅱ)에서 함수 $y=|f(x)|$가 미분불가능한 점은 $x=\alpha$뿐이므로, 증가하는 속함수의 함숫값이 모두 α 이하

$$\Downarrow$$

$y=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$가 점근선 $y=2$를 가지므로 $f(2)\le 0$



지금까지 확인한 $f(x)$의 정보를 정리해 보면

Ⓐ: $f(x)$는 $x=1$에서 극대 $\to$ $f'(1)=0$

Ⓑ: $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Ⓒ: $f(2)\le 0$

이다. Ⓐ를 이용하여 $f(x)=(x-1)^2(x-a)+b$라 두고 Ⓑ, Ⓒ를 이용하여 미지수를 정리하자.

$$f(x)=(x-1)^2(x-a)+b, \quad f'(x)=(x-1)(3x-2a-1)$$

$$\Downarrow$$

Ⓑ: $a-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{a}{4}-b$ $\to$ $b=\dfrac{1}{8}-\dfrac{3a}{4}$

Ⓒ: $2-a+b\le 0$ $\to$ $2-a+\left(\dfrac{1}{8}-\dfrac{3a}{4}\right)\le 0$ ($\because$ Ⓑ)

$\to$ $a\ge \dfrac{17}{14}$

$\therefore$ $g(0)=-f(1)=-b=\dfrac{3a}{4}-\dfrac{1}{8}\ge\dfrac{11}{14}$ $\to$ $p+q=25$

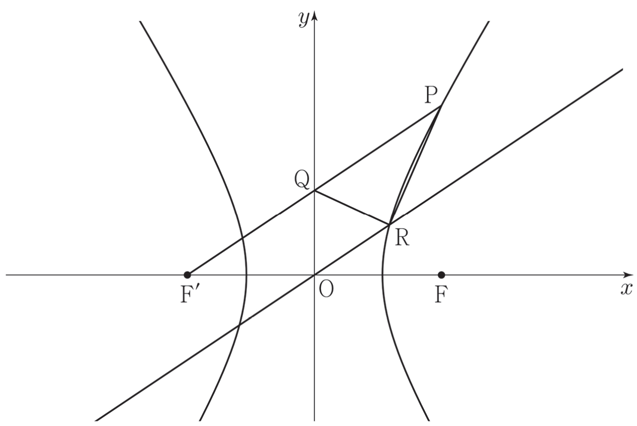
정답 25

「2606(기하)29」 쌍곡선의 정의

2026학년도 6평
기하 29번 문항

정답률 51%

그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 F′P가 y축과 만나는 점을 Q라 하고, 원점 O를 지나고 선분 F′P와 평행한 직선이 이 쌍곡선과 만나는 점 중 제1사분면에 있는 점을 R이라 하자.
$\overline{\mathrm{F'Q}}=\overline{\mathrm{QP}}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=2$이고 삼각형 PQR의 넓이가 3일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는 $p+q\sqrt{13}$이다.
p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



교과서적 요소
· 쌍곡선

이해원 N제 연계
· 시즌1 기하
#3 #9 #20 #29 #45 #58 #83 #87

GLIMPSE 최상위권이 발문만 힐끗 보고 하는 생각

❶ 쌍곡선 위의 점 P
그림에 두 점 F와 P가 연결되어 있지 않다. 선분 FP부터 그리자.

❷ △PQR의 넓이
△PQR의 넓이를 구할 때 선분 PQ를 밑변으로 설정한다면, 문제에서 제시된 평행한 두 직선 사이의 거리가 곧 삼각형의 높이이다. △PQR의 넓이를 구하는 방법은 많으니 다채롭게 생각하자.

NOTE

본인의 풀이를 컴팩트하게 작성해 보세요.

COMMENT 인터그레이트의 코멘트

긴 발문과 다소 복잡해 보이는 그림 때문에 외형만 보고 위축될 수 있는 문항입니다. 기하 과목은 삼각함수 활용 단원과 마찬가지로, 표시할 수 있는 조건은 그림에 모두 표시하고 관찰하는 습관을 들여야 합니다.

또한, 평면기하의 여러 가지 성질이 쓰일 수 있습니다. 「2606(기하)29」에서는 '중점연결정리'를 활용하여 두 직선 OQ와 FP가 평행함을 파악하는 것이 중요했습니다. 중학교와 고등학교 1학년 때 배웠던 평면기하의 성질을 복습하고 싶다면 **한완수 수학1(상) 216p**의 **'평면기하 총정리 1'**을 통해 학습하시길 바랍니다.

APPENDIX 참고 콘텐츠

한완수	· 수학1(상) 216p, · 기하 18p, · 기하 320p,	공부법 시리즈 - 평면기하 총정리 1 Chapter A 포물선, 타원, 쌍곡선 TOPIC 01 이차곡선 조건반사
한완기	· 기하 평수능 44p,	Pattern 04 이차곡선의 정의를 이용해 작도하라!
이해원 N제	· 시즌1 기하	#3 #9 #20 #29 #45 #58 #83 #87

REACTION 시험 당일 수험생들의 생생한 반응

1,119 457 7.5만

lhw_math님 외 27.7만명이 풀었습니다

#쌍곡선 #쌍곡선정의 #삼각형넓이

0wansoo 217
뭔가 최근 기출중 이차곡선 정의를 제일 안쓰는 것 같음
답글 달기

dogixmylife 135
ㅇㅈ넓이가 핵심인 느낌?
답글 달기

zx_adv 143
PQ를 밑변으로 보니까 높이구할때 좀 막막하긴 했음
답글 달기

do__hyxn 129
복잡해 보였는데, 풀이자체는 생각보다 간단했던듯
답글 달기

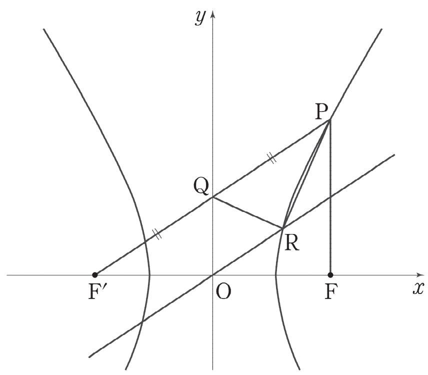
「2606(기하)29」 해법

「2606(기하)29」 한완기 해법

《한권으로 완성하는 기출》의 요소들로 쓰인 해법입니다.
최대한 다양한 풀이를 익히며 여러 가지 도구를 연습하도록 합시다.

교과서적 해법

쌍곡선 위의 점 P와 초점 F를 연결한 그림을 그리자.[1)]



$\overline{F'Q}=\overline{QP}$ 이므로 점 Q가 선분 F′P의 중점이다.
그런데 점 Q의 x좌표가 0이므로, 두 점 F′과 P의 x좌표는 부호만 반대임을 알 수 있다. 즉,

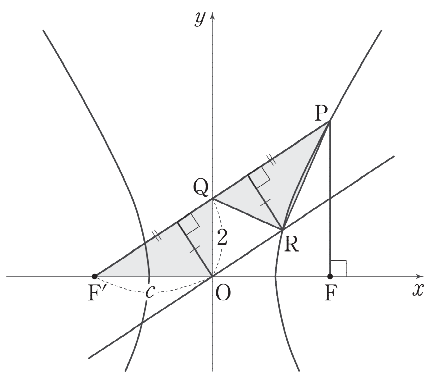
$$(\text{P의 } x\text{좌표}) = -(\text{F}'\text{ 의 } x\text{좌표}) = (\text{F의 } x\text{좌표})$$

이므로, 직선 PF는 x축에 수직임을 알 수 있다.

이제 △PQR의 넓이가 3임을 이용하자.

$$(\triangle\text{PQR의 넓이}) = \frac{1}{2}\cdot\overline{\text{PQ}}\cdot(\text{점 R과 직선 PQ 사이의 거리}) \quad \cdots Ⓐ$$

인데, (직선 PQ) // (직선 OR)이고 $\overline{\text{PQ}}=\overline{\text{F}'\text{Q}}$ 이므로



$$Ⓐ = \frac{1}{2}\cdot\overline{\text{F}'\text{Q}}\cdot(\text{점 O와 직선 PQ 사이의 거리})$$

로 볼 수 있고, 이는 △QF′O의 넓이이다.

그런데

$$(\triangle\text{QF}'\text{O의 넓이}) = \frac{1}{2}\cdot\overline{\text{OF}'}\cdot\overline{\text{OQ}} = \frac{1}{2}\cdot c\cdot 2 = c$$

이므로 $c=3$이다.

◺OQF′에서 피타고라스의 정리를 이용하면 $\overline{\text{QF}'}=\sqrt{13}$ 인데,
◺OQF′∽◺FPF′이고 닮음비는 $1:2$이므로

$$\overline{\text{PF}} = 2\overline{\text{OQ}} = 4,\quad \overline{\text{PF}'} = 2\overline{\text{QF}'} = 2\sqrt{13}$$

을 얻는다. 마지막으로 쌍곡선의 정의를 이용하자.

$$(\text{주축의 길이}) = \overline{\text{PF}'}-\overline{\text{PF}} = 2\sqrt{13}-4$$

$$\therefore\ p=-4,\ q=2 \quad\rightarrow\quad p^2+q^2=20$$

CHECK 각주 해설 본문의 각주

1) 풀이에서 점 R이 쌍곡선 위의 점이라는 사실이 활용되지 않기 때문에 점 R과 두 초점을 연결한 그림을 그리지 않았지만, 실제로 처음 풀 때에는 어떤 점이 쓰일지 알 수 없으므로 점 R과 두 초점 F, F′도 연결한 그림도 그려두는 것이 좋다.

정답 20

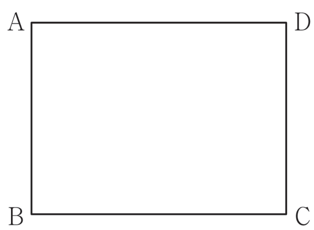
2026학년도 6평
기하 30번 문항

정답률 15%

좌표평면에 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=8$ 인 직사각형 ABCD 와 $2\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$ 를 만족시키는 점 E 가 있다. 선분 BC 위를 움직이는 점 P 에 대하여 점 Q 가

$$\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB})=0$$

을 만족시킬 때, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]



교과서적 요소
- 내분점과 외분점
- 벡터의 덧셈과 뺄셈
- 벡터의 내적
- 벡터로 나타낸 원의 방정식

수능·실전적 요소
- 내분점, 외분점, 무게중심의 위치벡터 한완수

이해원 N제 연계
- 시즌1 기하
  #28 #63 #66 #90

GLIMPSE 최상위권이 발문만 힐끗 보고 하는 생각

❶ 6 ? 8 ? 10 !

$\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=8$ 을 보고 대각선의 길이가 10 이라는 것부터 떠올린다.

❷ 이건 못 참지

$2\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$ 를 보자마자 못 참고 $\overrightarrow{BE}=\dfrac{3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}}{3-1}$ 로 변형한다.

즉, 점 E 는 선분 AC 를 $3:1$ 로 외분하는 점이다.

❸ 어디서 많이 본 벡터방정식

$\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB})=0$ 은 원과 관련된 벡터방정식이다. 어디에 원이 그려질까?

❹ 내적의 최솟값

내적이 최소가 되는 상황은 어떤 상황일까? 내적의 기하적 의미인 수선의 발로 최소인 상황을 찾을 생각을 하자.

NOTE

본인의 풀이를 컴팩트하게 작성해 보세요.

COMMENT 인터그레이트의 코멘트

굉장히 단순한 도형인 직사각형과 원을 나타내는 벡터방정식이 제시된 문항입니다. 외분점 해석이나 내적의 최솟값을 내적의 기하적 의미로 구하는 아이디어는 기출 문항에서 매우 빈번하게 다뤄지는 소재입니다. 따라서 충실히 기출 문항을 학습했다면 무난히 해결할 수 있었을 것입니다.

문제를 푸는 데 어려움을 겪었다면 뒤의 「2606(기하)30」 해법을 통해 풀이를 학습하시길 바랍니다. 그리고 **한완기 기하 평수능**의 Pattern 09를 풀며 필연적 발상들을 연습하도록 합시다.

APPENDIX 참고 콘텐츠

한완수	· 기하 134p, · 기하 376p, · 기하 382p,	Chapter D 평면벡터의 성분과 내적 TOPIC 07 벡터의 덧셈 분석하기 TOPIC 08 벡터의 내적 분석하기
한완기	· 기하 평수능 116p,	Pattern 09 직선·원의 벡터 방정식의 의미를 파악하라!
이해원 N제	· 시즌1 기하	#28 #63 #66 #90

REACTION 시험 당일 수험생들의 생생한 반응

1,119 457 7.5만

lhw_math님 외 **27.7만명**이 풀었습니다

#평면벡터 #내적 #외분점 #수직 #최솟값

2_solution_1 411
생각할 건 많긴 한데, 기출에 나오던 것들과 유사해서 발문따라 천천히 풀면 충분히 풀만한 듯
답글 달기

sxo_yxxn 97
저렇게 적혀있으니까 외분점 공식이 안떠올라서 E를 어디둬야할지 당황했음
답글 달기

06r0rx 68
난 오히려 PQ-AB에서 AB를 어떻게 해석해야될지 모르겠더라
답글 달기

「2606(기하)30」 해법

「2606(기하)30」 한완기 해법

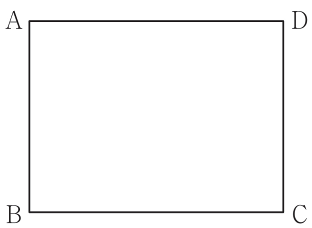
《한권으로 완성하는 기출》의 요소들로 쓰인 해법입니다.
최대한 다양한 풀이를 익히며 여러 가지 도구를 연습하도록 합시다.

30

좌표평면에 $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=8$ 인 직사각형 ABCD 와 $2\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$ ①를 만족시키는 점 E 가 있다. 선분 BC 위를 움직이는 점 P 에 대하여 점 Q 가

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\left(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB}\right)=0 \text{②}$$

을 만족시킬 때, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}$ ③의 최솟값을 구하시오. [4점]



발문 분석 발문을 읽으며 할 수 있는 생각, 해야 하는 생각

① $\triangle\overrightarrow{AX}=\square\overrightarrow{AY}+☆\overrightarrow{AZ}$ 꼴은 항상 내·외분점을 의식해야 한다.

벡터 문항의 경우에는 늘 벡터를 통해 점의 위치 관계를 묻는다.
특히 ①의 경우에는 내분점·외분점을 벡터로 표현하는 것에 대한 이해를 묻는 것으로, 점 E 의 위치를 바로 찾을 수 있어야 한다.

②③ 내적은 항상 수직과 관련되어 있다.

내적의 정의 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 를 '한 벡터를 다른 벡터에 정사영' 하는 것으로 접근했을 때를 묻는 경우가 많고, 그 과정에서 수직은 늘 따라오는 것이다. 특히 내적이 0 일 때는 두 벡터가 수직임을 의미하므로 내적을 보면 수직을 떠올려야 한다.

교과서적 해법

STEP 01 점 E 의 위치 파악하기

$$2\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA} \iff \overrightarrow{BE}=\frac{3\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}}{2}$$

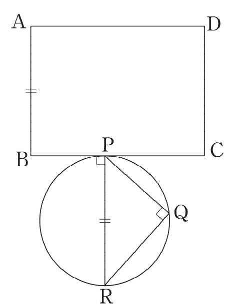
이므로 점 E는 선분 AC를 3:1로 외분한 점임을 알 수 있다.
다시 말해, $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ 이므로 문제에서 묻는 값은 $\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 임을 알 수 있다.

STEP 02 두 점 P, Q 의 위치 관계 파악하기

이제 $\overrightarrow{PQ}\cdot\left(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB}\right)=0$ 을 해석하기 위해 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PR}$ 이 되는 점 R 을 생각하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\cdot\left(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB}\right)=0 &\iff \overrightarrow{PQ}\cdot\left(\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR}\right)=0\\ &\iff \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RQ}=0\\ &\iff \angle PQR=90^\circ\end{aligned}$$

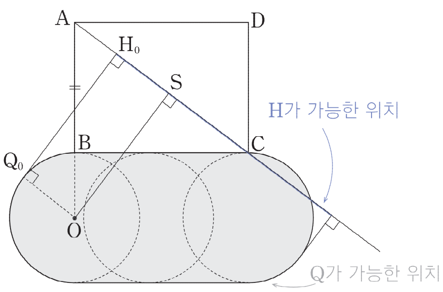
이다. 이를 그림으로 그려서 확인해 보자.



$|\overrightarrow{PR}|=|\overrightarrow{AB}|=6$ 이므로 위의 그림처럼 점 Q는 선분 PR 을 지름으로 하고 반지름의 길이가 3 인 원 위의 점이다.

STEP 03 점 Q가 가능한 위치와 답이 되는 상황 찾기

점 P가 선분 BC 위를 움직이므로 이는 원 역시 움직인다는 것이다. 점 P의 움직임에 따른 원의 움직임을 그리면 다음과 같다.



$\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}$를 살펴봤을 때, 점 Q에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{6^2+8^2}=10$이므로

$$\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AH}| = 15|\overrightarrow{AH}|$$

이다. 이 값이 최소가 되는 상황을 그림으로 살펴보면
$Q=Q_0$, $H=H_0$이 되는 상황임을 알 수 있다.

STEP 04 답 구하기

점 Q_0이 포함된 원의 중심을 O라 하면 $\angle OQ_0H_0=90°$이므로,
점 O에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 S라 하면

$$\overline{AH_0} = \overline{AS}-\overline{H_0S}$$

이때, $\square H_0Q_0OS$는 직사각형이므로 $\overline{H_0S}=\overline{OQ_0}=3$이다.
한편, $\triangle ABC \backsim \triangle ASO$이고 $\triangle ABC$는 세 변의 길이의 비가 $3:4:5$인 직각삼각형이므로 이를 활용하면

$$\overline{AS} = \frac{3}{5}\overline{AO} = \frac{3}{5}(\overline{AB}+\overline{BO}) = \frac{3}{5}(6+3) = \frac{27}{5}$$

$$\rightarrow \overline{AH_0} = \overline{AS}-\overline{H_0S} = \frac{27}{5}-3 = \frac{12}{5}$$

$$\therefore (\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AQ}\text{의 최솟값}) = 15|\overrightarrow{AH_0}| = 15\times\frac{12}{5} = 36$$

흐름 정리 풀이의 전체적인 흐름을 큰 그림으로 다시 정리하는 과정

STEP 01 점 E의 위치 파악하기

① 주어진 식으로부터 내분·외분의 의미를 찾을 수 있어야 한다.
② 묻는 값의 E 대신에 기존의 A, B, C, D로 표현할 수 있으면 표현하는 것이 좋다.

STEP 02 두 점 P, Q의 위치 관계 파악하기

① $\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{AB}$에서 두 벡터가 시점, 종점 모두 일치하지 않으므로 시점이 일치하도록 평행이동하는 것이 좋다.
② 내적이 0이라는 것은 두 벡터가 수직임을 의미하고, 수직이 되는 상황은 지름의 원주각에서 비롯되어 점 Q가 원 위의 점임을 찾을 수 있다.

STEP 03 점 Q가 가능한 위치와 답이 되는 상황 찾기

① 점 P가 고정되어 있는 점이 아니라, 선분 BC 위를 움직이는 점이다.
점 P의 움직임에 따른 원의 움직임을 관찰하여
점 Q의 자취를 영역으로 찾을 수 있다.
② 답이 되는 상황을 찾아보면 P=B이고
점 Q에서의 접선이 직선 AC와 수직인 상황이다.

STEP 04 답 구하기

① $\overline{AH_0}$을 구하려면 $\overline{AS}-\overline{H_0S}$로 접근해야 한다.
② $\overline{AS}$는 닮음을 통해 $\triangle ASO$의 세 변의 비가 $3:4:5$임을 찾아서 구할 수 있고, $\overline{H_0S}$는 원의 반지름의 길이와 같다.
이후에 답을 계산할 수 있다.

2027 Integrity 1

발행인	오우석
펴낸곳	시대인재북스
발행일	2026년 2월 25일
출판신고	2017년 5월 11일 제2017-000158호
주소	서울특별시 강남구 도곡로 462, 2층(대치동)
홈페이지	www.sdijbooks.com
이메일	sdijbooks@hiconsy.com

본 교재의 정오표 및 첨부파일은 www.sdijbooks.com의
본 교재 페이지에서 다운로드 하실 수 있습니다.

시대인재 BOOKS