2027 수능대비
필요충분 모의고사 시즌1
문항분석지 + 정답과 해설

양지용 수학연구실

2027 필요충분 모의고사 시즌1 (3월 학평대비)

ㅁ 총평

수능과 가장 가까운 수학, 양지용 선생님입니다.
필요충분 모의고사 For.2027은 작년 수능의 출제 기조와 난이도를 반영하여
쓸데없이 호흡이 긴 어려운 문항을 대폭 줄이고,
묻고자 하는 바를 명확히 함과 동시에 변별력을 기를 수 있는 것에 주력하였습니다.
대신, 특히나 다양한 표현을 담은 준킬러 4점짜리 문항들을 수록하였습니다.
기출문제들의 아이디어를 충실히 담았으며,
2027 수능특강/수능완성의 주요 표현들을 인용, 변형한 문항도 수록되어 있습니다.
아직 숙달되지 않은 부분 때문에 원하는 만큼의 점수가 나오지 않을 수도 있지만,
양지용 선생님의 해설강의와 함께 공부해나간다면
향후 모의고사에서 흔들리지 않는 실력을 얻게 될 것이라고 생각합니다.
필살기, 백점백승 강좌와 최고의 수능훈련을 진행할 수 있을 것입니다.
최선을 다하는 수업과 최고의 문항들로 여러분들과 만나도록 하겠습니다.

ㅁ 시즌1 1회차 예상 등급컷

	확률과 통계	미적분
1등급	84	82
2등급	77	75
3등급	69	67
4등급	56	54
5등급	40	36

ㅁ 오답정리 방법

1. 맞은 문제과 틀린 문항 모두 반드시 해설 영상을 보며 공부한다.
2. 해설강의를 통해 문제풀이의 시작에 대한 당위성을 공감하며, 다시 풀었을 때 맞을 수 있도록 행동강령을 공부한다.
3. 새로운 시험지로 다시 풀어봐서 다 100점에 가까운지 확인한다. (반드시 필요한 과정)
4. 필살기의 내용과 연결하며 복습을 진행한다.
5. 상담이 필요하다고 생각한다면 적극적으로 시험지와 함께 Q&A 게시판에 자세한 현 상태를 공유하고, 상담을 진행한다.
   (현장강의 학생은 대면상담 가능)

□ 필요충분 모의고사 시즌1 1회차 문항구성

번호	과목	배점	출제원리 및 목표	특이사항
1번	수학 I	2점	간단한 지수법칙 연산	
2번	수학 II	2점	미분계수의 정의와 곱의 미분법	
3번	수학 I	3점	등비수열의 항 구하기	
4번	수학 II	3점	합성함수의 극한값 구하기	
5번	수학 II	3점	절댓값 함수의 연속	
6번	수학 I	3점	삼각함수의 관계식과 부호	
7번	수학 II	3점	정적분의 활용	
8번	수학 I	3점	간단한 로그연산	수능특강 변형
9번	수학 II	4점	우함수/기함수와 정적분	
10번	수학 I	4점	삼각함수 그래프의 비례관계	
11번	수학 II	4점	속도를 이용한 두 점의 위치 찾기	
12번	수학 I	4점	등차수열	
13번	수학 II	4점	접선의 방정식	
14번	수학 I	4점	사인법칙과 코사인법칙	26 수능 14번 아이디어 차용
15번	수학 II	4점	정적분으로 정의된 함수	
16번	수학 I	3점	수열의 귀납적 정의	
17번	수학 II	3점	0/0꼴 극한값 연산	
18번	수학 I	3점	절댓값이 포함된 삼각방정식의 실근의 합	
19번	수학 II	3점	삼차함수의 극대/극소	
20번	수학 I	4점	여러 가지 수열의 합	빈칸추론 수열 유형
21번	수학 II	4점	0/0꼴 극한값 분석	
22번	수학 I	4점	지수함수의 그래프와 평행한 두 직선으로 이루어진 도형	

번호	과목	배점	출제원리 및 목표	특이사항
23번	확률과 통계	2점	중복순열과 중복조합	
24번	확률과 통계	3점	같은 것이 있는 순열	
25번	확률과 통계	3점	이웃하여 않는 원순열	
26번	확률과 통계	3점	대소를 만족하는 순서쌍의 개수	
27번	확률과 통계	3점	최단경로로 이동하기	
28번	확률과 통계	4점	함수의 개수	
29번	확률과 통계	4점	집합의 순서쌍의 개수	
30번	확률과 통계	4점	중복조합의 정의	신유형(미출제요소)

번호	과목	배점	출제원리 및 목표	특이사항
23번	미적분	2점	간단한 극한값 계산	
24번	미적분	3점	등비수열의 극한	
25번	미적분	3점	극한값 계산과 등차수열	
26번	미적분	3점	수열의 극한 식 세우기	
27번	미적분	3점	샌드위치 정리	
28번	미적분	4점	등비수열로 정의된 함수	
29번	미적분	4점	수열의 극한 식 세우기	
30번	미적분	4점	수열의 극한 식 세우기	

수학(공통) 정답

1	⑤	2	②	3	②	4	③	5	①
6	⑤	7	④	8	③	9	②	10	②
11	④	12	③	13	⑤	14	①	15	③
16	3	17	10	18	15	19	10	20	55
21	16	22	14						

확률과 통계 정답

23	①	24	④	25	③	26	①	27	②
28	②	29	880	30	366				

미적분 정답

23	②	24	⑤	25	④	26	②	27	②
28	⑤	29	24	30	11				

1) [정답] ⑤

수학Ⅰ - 지수로그
KEY POINT : 간단한 지수 연산

$3^{\sqrt{2}+1}\div 3^{\sqrt{2}-1}=3^{(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)}=3^2=9$

2) [정답] ②

수학Ⅱ - 미분계수와 도함수
KEY POINT : 곱의 미분법

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$
$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$$

그런데 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$이므로

$f'(x)=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)$

$f'(1)=2$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}=2f'(1)$$
$$=2\times 2=4$$

3) [정답] ②

수학Ⅰ - 수열
KEY POINT : 간단한 등비수열의 항의 연산

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면

$\dfrac{a_8}{a_5}=\dfrac{a_1r^7}{a_1r^4}=r^3=\dfrac{1}{8}$이므로 $r=\dfrac{1}{2}$

$a_2\times a_4=a_3{}^2=9$이므로 $a_3=3\ (\because a_n>0)$

$\therefore\ a_1=a_3\times\dfrac{1}{r^2}=12$

4) [정답] ③

수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속
KEY POINT : 함숫값과 극한값의 확인

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=-1$이므로 $f(-1)=0$

5) [정답] ①

수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속
KEY POINT : 절댓값 함수의 연속

함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 함수 $|f(x)|$가 $x=2$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 2-}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 2+}|f(x)|=|f(2)|$이어야 한다.

이때

$\lim\limits_{x\to 2-}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 2-}|x^2+1|=5$,

$\lim\limits_{x\to 2+}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 2+}|2x+a|=|4+a|$,

$|f(2)|=|4+a|$

이므로 $5=|4+a|$에서

$4+a=5$ 또는 $4+a=-5$

$a=1$ 또는 $a=-9$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $1+(-9)=-8$

6) [정답] ⑤

수학Ⅰ - 삼각함수의 정의
KEY POINT : 삼각함수의 관계식과 부호

$$\frac{1}{1+\tan\theta}+\frac{1}{1-\tan\theta}=\frac{2}{(1+\tan\theta)(1-\tan\theta)}$$
$$=\frac{2}{1-\tan^2\theta}=-2\text{에서}$$

$1-\tan^2\theta=-1$에서 $\tan^2\theta=2$이므로

$\tan\theta=\sqrt{2}\ \left(\because\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$이다.

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

7) [정답] ④

수학Ⅱ - 적분
KEY POINT : 정적분의 활용

이차함수와 직선으로 둘러싸인 면적이 같으려면

방정식 $x^2+2x=x$ 의 서로 다른 두 실근의 차이와

방정식 $x^2+2x=mx$의 서로 다른 두 실근의 차이가 같아야 한다.

방정식 $x^2+2x=x$에서

$x^2+x=0$이므로 $x=-1$ 또는 $x=0$이고, 서로 다른 두 실근의 차이는 1이다.

또한 방정식 $x^2+2x=mx$에서

$x(x+2-m)=0$에서 $x=0$ 또는 $m-2$

따라서 서로 다른 두 실근의 차이는 $m-2$이고, $(\because\ m>2)$

$m-2=1$, $m=3$이다.

8) [정답] ③

수학Ⅰ - 지수로그함수
KEY POINT : 간단한 로그 연산

$\log_c a=2\log_b a$에서

$$\frac{1}{\log_a c}=\frac{2}{\log_a b}$$

$\log_a b = 2\log_a c$

$b=c^2$ …… ㉠

또한 $\log_a b+\log_a c=6$, $\log_a bc=6$, $bc=a^6$에서

㉠을 대입하면

$c^3=a^6$, $c=a^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $b=a^4$

이므로

$\log_a b\times\log_a c=\log_a a^4\times\log_a a^2=4\times2=8$

9) [정답] ②

수학Ⅱ - 적분
KEY POINT : 우함수/기함수의 정적분

$$\int_1^2 f(x)dx=a+\int_{-2}^1 (x^2-f(x))dx$$

$$=a+\int_{-2}^1 x^2dx-\int_{-2}^1 f(x)dx$$

이므로

$$\int_{-2}^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=a+\int_{-2}^1 x^2dx$$

$\int_{-2}^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_{-2}^2 f(x)dx$이므로

$$\int_{-2}^2 f(x)dx=a+\int_{-2}^1 x^2dx$$

$$\int_{-2}^2 (x^3+3x^2-5x)dx=a+\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^1$$

$$2\int_0^2 3x^2dx=a+3,\ 2\left[x^3\right]_0^2=a+3$$

$\therefore\ a=13$

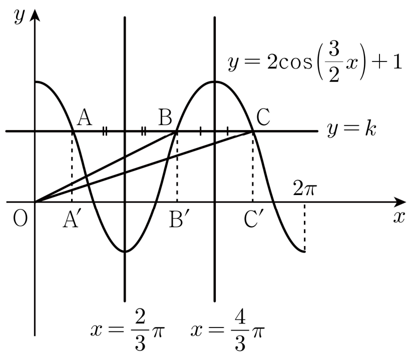
10) [정답] ②

수학Ⅰ - 삼각함수의 그래프
KEY POINT : 삼각함수 그래프의 비례관계

함수 $y=2\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+1$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\pi$이므로

함수 $y=2\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+1\ (0\le x\le 2\pi)$의 그래프는

다음 그림과 같다.



함수 $y=2\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+1$와 직선 $y=k$가 만나는 교점을 x좌표가 작은 점부터 차례대로 A, B, C라 하고, 점 A, B, C에서 x축 위로 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, C′이라고 하면 두 직선 OB, OC의 기울기는 각각 $\frac{k}{\overline{OB'}}$, $\frac{k}{\overline{OC'}}$ 이므로

$\frac{k}{\overline{OB'}}:\frac{k}{\overline{OC'}}=7:5$, $\overline{OB'}:\overline{OC'}=5:7$이 성립한다.

$\overline{OB'}=5p$, $\overline{OC'}=7p$라고 할 때, 점 B, C의 좌표는 각각 $B(5p,\ k)$, $C(7p,\ k)$이며

점 B, C는 직선 $x=\frac{4}{3}\pi$에 대하여 대칭이므로

$$\frac{5p+7p}{2}=\frac{4}{3}\pi,\ p=\frac{2}{9}\pi$$

점 A, B는 직선 $x=\frac{2}{3}\pi$에 대하여 대칭이므로 점 A의 x좌표는

$p=\frac{2}{9}\pi$

이고 $k=2\cos\left(\frac{3p}{2}\right)+1=2\cos\frac{\pi}{3}+1=2$

따라서 점 A의 좌표는 $A\left(\frac{2}{9}\pi,\ 2\right)$이므로 직선 OA의 기울기는

$$\frac{2}{\frac{2}{9}\pi}=\frac{9}{\pi}$$

11) [정답] ④

수학Ⅱ - 적분
KEY POINT : 속도를 이용한 두 점의 위치 찾기

$v(t)=3t^2-14t+16=(3t-8)(t-2)$

이므로 점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=2$이다.

따라서 점 Q의 시각 $t\,(t\ge2)$에서의 위치를 $x_q(t)$로 놓으면

$x_q(t)=a(t-2)$

이다.

한편, 점 P의 시각 $t\,(t\ge0)$에서의 위치를 $x_p(t)$로 놓으면

$$x_p(t)=\int_0^t v(s)ds=t^3-7t^2+16t$$

이고, 시각 $t=6$에서 두 점 P, Q가 만나므로

$x_p(6)=x_q(6)$, $4a=60$

이다.

$\therefore\ a=15$

12) [정답] ③

수학Ⅰ - 수열
KEY POINT : 등차수열

a_m과 a_{2m}은 t에 대한 이차방정식

$t^2-23t+112=(t-7)(t-16)=0$의 서로 다른 두 실근이고,

등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로

$a_m=7,\ \ a_{2m}=16\ (\because\ a_m<a_{2m})$이어야 한다.

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{2m}-a_m=md=9$이므로

조건을 만족시키는 모든 순서쌍 $(m,\ d)$는 $(1,\ 9)$, $(3,\ 3)$, $(9,\ 1)$이다.
각각에 대하여 a_1을 구하면 다음과 같다.

$a_1=7$,

$a_3=7,\ d=3 \Rightarrow a_1=1$

$a_9=7,\ d=1 \Rightarrow a_1=-1$

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은 8이다.

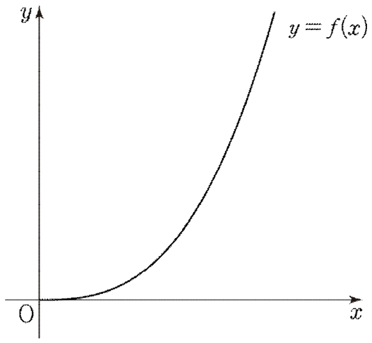
13) [정답] ⑤

 # 수학Ⅱ - 미분
 # KEY POINT : 접선의 방정식

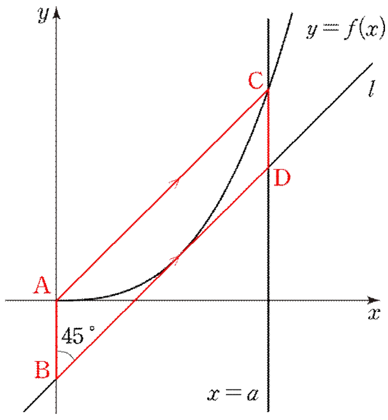
$f(x)=\dfrac{8x^3+x^2}{7}$으로 놓으면

$$f'(x)=\frac{24x^2+2x}{7}=\frac{2x(12x+1)}{7}$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0을 갖고, $x\ge 0$에서 증가하는 함수이다.
따라서 $x\ge 0$에서 곡선 $y=f(x)$의 개형이 그림과 같다.



이때 문제의 조건을 만족시키도록 잡은 직선 l은 그림과 같다.



즉, 직선 l의 기울기가 1이므로 직선 l과 곡선 $y=f(x)$가 접하는 점의 x좌표를 $t\,(t>0)$이라 하면

$$f'(t)=1 \Rightarrow \frac{24t^2+2t}{7}=1$$

$$\Rightarrow 24t^2+2t-7=0$$

$$\Rightarrow (2t-1)(12t+7)=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{2}\ (\because\ t>0)$$

이고, 이때

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{7}=\frac{5}{28}$$

이므로 직선 l의 방정식은

$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{28} \Rightarrow y=x-\frac{9}{28}$$

이다.

따라서 점 A가 원점이고 점 B의 y좌표가 $-\dfrac{9}{28}$이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=\frac{9}{28}\ \cdots\ ㉠$$

이다.
또한, 점 C는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점 중 제1사분면 위의 점이고, 점 C의 x좌표가 a이므로

$$f(a)=a \Rightarrow \frac{8a^3+a^2}{7}=a$$

$$\Rightarrow a(a+1)(8a-7)=0$$

$$\Rightarrow a=\frac{7}{8}\ (\because\ a>0)\ \cdots\ ㉡$$

이다.
한편, 평행사변형의 밑변을 선분 AB라 하면 평행사변형의 높이는 점 C의 x좌표인 a와 같고, ㉠, ㉡에 의하여 평행사변형 ABDC의 넓이는

$$\overline{\mathrm{AB}}\times a=\frac{9}{28}\times\frac{7}{8}=\frac{9}{32}$$

이다.

$\therefore$ (구하는 값)$=\dfrac{9}{32}$

14) [정답] ①

 # 수학Ⅰ - 삼각함수
 # KEY POINT : 사인법칙과 코사인법칙

$\angle\mathrm{DAE}=\alpha$라 할 때, 삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\alpha=\frac{3^2+3^2-4^2}{2\times3\times3}=\frac{1}{9}$$

또한, $\angle\mathrm{ADE}=\beta$라 하고 선분 DE의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{DM}}=2$이므로

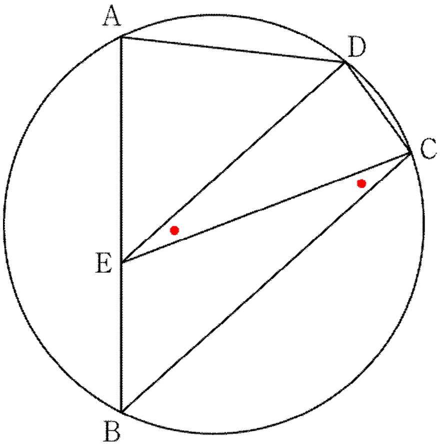
$$\cos\beta=\frac{\overline{\mathrm{DM}}}{\overline{\mathrm{DA}}}=\frac{2}{3}$$

따라서 삼각형의 모든 내각에 대해서 $\sin$의 값이 양수이므로

$$\cos\alpha=\frac{1}{9},\quad \sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos\beta=\frac{2}{3},\quad \sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

한편, 두 직선 ED, BC가 평행하므로 그림과 같이
$\angle\mathrm{CED}=\angle\mathrm{BCE}=\bullet$
이고 $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{AED}=\beta$



또한, 삼각형 AED의 세 내각의 합은 π이므로 $\alpha+2\beta=\pi$이고

원에 내접하는 사각형 ABCD에서

$$\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{CDA}=\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{CDE}+\angle \mathrm{EDA}$$
$$=\beta+\beta+\angle \mathrm{CDE}=\pi$$

이므로 $\angle \mathrm{CDE}=\alpha$이다.

따라서 삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\bullet}=\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin\alpha} \Rightarrow \overline{\mathrm{CD}}=\frac{\sin\bullet}{\sin\alpha}\times\overline{\mathrm{CE}} \cdots ㉠$$

이고, 삼각형 BCE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BE}}}{\sin\bullet}=\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{\mathrm{BE}}=2=\frac{\sin\bullet}{\sin\beta}\times\overline{\mathrm{CE}} \cdots ㉡$$

이다.

이때 ㉠÷㉡에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{2}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{4},\ \overline{\mathrm{CD}}=\frac{3}{2}$$

이므로 삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{CE}}^2=\overline{\mathrm{DE}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2-2\times\overline{\mathrm{DE}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\cos\alpha$$
$$=4^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times4\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{9}$$
$$=16+\frac{9}{4}-\frac{4}{3}=\frac{203}{12}$$

15) [정답] ③

수학Ⅱ - 적분
KEY POINT : 정적분으로 정의된 함수

$h(x)=\int_0^x f(t)\,dt$로 놓으면 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차

함수이므로 $h(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$이고

$h(0)=0$인 삼차함수이다. $\cdots$ ㉠

또한, 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x) \Leftrightarrow h(1)=-1 \cdots ㉡$$

이다.

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 삼차함수 $h(x)$를

$h(x)=\frac{1}{3}x\left(x^2+ax-a-4\right)$ (a는 실수)

로 놓을 수 있다.

ⅰ) $a=-4$일 때 $(h'(0)=0)$

함수 $xh(x)$가 x^3을 인수로 가지므로 조건 (가)를 만족시키기 위해서는 함수 $xh(x)$가 $x\ge k$에서 증가하여야 한다.

이때 $h(0)=0$, $h(1)=-1$이므로 모순이다.

ⅱ) $a\ne-4$일 때 $(h'(0)\ne0)$

함수 $xh(x)$가 x^2을 인수로 가지고, 조건 (가)를 만족시키기 위해서는 다음 조건들을 만족시켜야 한다.

① 함수 $xh(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가짐

② 함수 $xh(x)$가 $x=k'$ $(k'\ge1)$에서 극솟값을 가짐

한편, 함수 $xh(x)$의 도함수가

$$\frac{4}{3}x^3+ax^2-\frac{2}{3}(a+4)x=\frac{4}{3}x\left(x^2+\frac{3}{4}ax-\frac{a+4}{2}\right)$$

이고, 이때 $i(x)=x^2+\frac{3}{4}ax-\frac{a+4}{2}$로 놓으면

①, ②를 만족시키기 위해서는

$i(0)<0 \Rightarrow a>-4$, $i(1)\le0 \Rightarrow a\le4$

이어야 한다. 즉, $-4<a\le4 \cdots$ ㉢ 이어야 하고,

이때 $-\int_0^4 f(t)\,dt=-h(4)=-(4a+16)<0$이므로

함수 $g(x)$는 $x\ge0$에서 감소한다.

따라서 조건 (가)를 만족시킨다.

또한, 조건 (나)에서

$g\left(\frac{9}{8}\right)=-\frac{1}{8}h(4)-1=-\frac{a+6}{2}$이고, 이 값이 정수가 되도록

하는 ㉢ 범위의 a의 최댓값은 4, a의 최솟값은 -2이다.

따라서 $f(0)=-h'(0)=-\frac{a+4}{3}$의 최댓값은 $a=-2$일 때

$-\frac{2}{3}$, 최솟값은 $a=4$일 때 $-\frac{8}{3}$이다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $f(0)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$$\therefore \left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{10}{3}$$

16) [정답] 3

수학Ⅰ - 수열
KEY POINT : 수열의 귀납적 정의

$a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n+1$에서

$n=1$을 양변에 대입하면

$a_2=\frac{1}{3}\times9+1=4$

$n=2$를 양변에 대입하면

$a_3=\frac{1}{2}\times4+1=3$

17) [정답] 10

수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속
KEY POINT : $\frac{0}{0}$꼴 극한값 연산

$$\lim_{x\to2}\left(x^2-3x+2\right)f(x)$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\left(x^2-x-2\right)f(x)\times\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to2}\left(x^2-x-2\right)f(x)\times\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\left(x^2-x-2\right)f(x)\times\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x^2-x-2)f(x)\times\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1}$$
$$=30\times\frac{1}{3}=10$$

18) [정답] 15

수학Ⅰ - 삼각함수
KEY POINT : 절댓값이 포함된 삼각방정식의 실근의 합

$$2\left|\sin\frac{\pi x}{6}\right|=1-\sin\frac{\pi x}{6}\quad(0<x<12)\qquad\cdots\ ㉠$$
에서

ⅰ) $\sin\frac{\pi x}{6}\geq 0$ 일 때

즉, $0<x\leq 6$에서

방정식 $\sin\frac{\pi x}{6}=\frac{1}{3}$은 서로 다른 두 실근을 가지고,

함수 $y=\sin\frac{\pi x}{6}$는 $x=3$에 대하여 대칭이므로

(두 실근의 합)$=6$이다.

ⅱ) $\sin\frac{\pi x}{6}<0$일 때

즉, $6<x<12$에서 $\sin\frac{\pi x}{6}=-1$를 만족하는 실근은 9뿐이다.

ⅰ), ⅱ)에서 구하는 모든 실근의 합은 $6+9=15$

19) [정답] 10

수학Ⅱ - 미분
KEY POINT : 삼차함수의 극대/극소

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$이므로
$f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 3을 갖고,
$x=-1$에서 극댓값 7을 갖는다.
이때, 함수 $y=-f(x-2)+a$는
$x=3$에서 극댓값 $-3+a$를 가지므로
$7=-3+a$에서 $a=10$

20) [정답] 55

수학Ⅰ - 수열
KEY POINT : 여러 가지 수열의 합

$$\sum_{n=1}^{35}a_n-(a_1+a_2)$$
$$=(a_3+a_4+a_5)+(a_6+a_7+a_8)+\cdots+(a_{33}+a_{34}+a_{35})$$
$$=b_1+b_2+\cdots+b_{11}$$
$$=\sum_{n=1}^{11}b_n$$
이므로 $\boxed{(가)}=11$이다.
또한,
$$\sum_{n=1}^{11}b_n=\sum_{n=1}^{11}\frac{1}{n^2+n}$$
$$=\sum_{n=1}^{11}\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{11}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)$$
$$=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$
이므로 $\boxed{(나)}=\frac{11}{12}$이다.

따라서
$$a_{33}=(a_{33}+a_{34}+a_{35})-(a_{34}+a_{35})$$
$$=\frac{1}{132}-\left(1-\boxed{(나)}\right)$$
$$=\frac{1}{132}-\frac{1}{12}=-\frac{5}{66}$$
이므로 $\boxed{(다)}=-\frac{5}{66}$이다.

즉,
$$p=11,\quad q=\frac{11}{12},\quad r=-\frac{5}{66}$$
이므로
$$-72pqr=(-72)\times 11\times\frac{11}{12}\times\left(-\frac{5}{66}\right)=55$$
이다.
∴ (구하는 값)$=55$

21) [정답] 16

수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속
KEY POINT : $\frac{0}{0}$꼴 극한값 분석

만약 $f(2)\neq 0$이면, $\lim_{x\to 2}g(x)=g(2)=2$이므로
$$\lim_{x\to 2}\frac{f(g(x))}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to 2}f(g(x))}{\lim_{x\to 2}f(x)}=\frac{f(2)}{f(2)}=1$$
에서 $h(2)=1$이다. 이는 $h(2)>2$라는 조건에 모순이므로 $f(2)=0$이다.

따라서 3 이하의 자연수 n과 다항함수 $f_1(x)$에 대하여
$$f(x)=(x-2)^n f_1(x)\quad(f_1(2)\neq 0)$$
로 놓을 수 있고, 이때
$$f(g(x))=\{g(x)-2\}^n f_1(g(x))$$
$$=\frac{(x-2)^n(x-5)^n}{2^n}f_1(g(x))$$
이다. 따라서
$$h(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(g(x))}{f(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-5)^n f_1(g(x))}{2^n f_1(x)}=\frac{(-3)^n}{2^n}$$
이고, $n=2$일 때만 $h(2)=\frac{9}{4}$가 되어 문제의 조건을 만족시킨다.

즉, 실수 a에 대하여
$$f(x)=(x-2)^2(x+a)$$
$$h(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(g(x))}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{4}(x-2)^2(x-5)^2(g(x)+a)}{(x-2)^2(x+a)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{4}(x-5)^2(g(x)+a)}{x+a}$$

이때, $g(1)=4$이므로 $a=-1$인 경우 $h(1)$의 값이 존재하지 않으며 $a=-4$인 경우 $h(1)=0$이므로 $h(1)\times h(3)=2$에 모순이다.
따라서

$$h(1)=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{4}(x-5)^2(g(x)+a)}{x+a}$$
$$=\frac{4(a+4)}{a+1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$h(3)=\lim_{x\to3}\frac{f(g(x))}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{\frac{1}{4}(x-2)^2(x-5)^2(g(x)+a)}{(x-2)^2(x+a)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{\frac{1}{4}(x-5)^2(g(x)+a)}{x+a}$$

이때, $g(3)=1$이므로 $a=-3$인 경우 $h(3)$의 값이 존재하지 않으며
$a=-1$인 경우 $h(3)=0$이므로 $h(1)\times h(3)=2$에 모순이다.
따라서

$$h(3)=\lim_{x\to3}\frac{\frac{1}{4}(x-5)^2(g(x)+a)}{x+a}$$
$$=\frac{a+1}{a+3} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

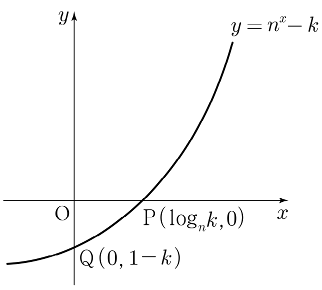
$$h(1)\times h(3)=\frac{4(a+4)}{a+1}\times\frac{a+1}{a+3}$$
$$=\frac{4a+16}{a+3}=2$$

에서 $a=-5$
따라서 $f(x)=(x-2)^2(x-5)$이므로 구하는 값은
$f(6)=(6-2)^2\times(6-5)=16$

22) [정답] 14

수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수
KEY POINT : 지수함수의 그래프와 평행한 두 직선으로 이루어진 도형

점 P의 x좌표를 p라 하면
$n^p-k=0 \Rightarrow p=\log_n k$
이고, 점 Q의 y좌표를 q라 하면
$q=n^0-k=1-k$
이다.
따라서 $n\geq2$, $k>1$이므로 곡선 $y=n^x-k$의 개형은 그림과 같다.

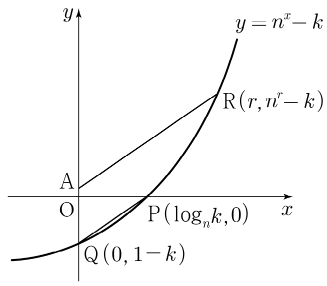


이때 y축 위의 점 A에 대하여 두 직선 PQ, RA가 서로 평행한 동시에 조건 (가)를 만족시키기 위해서는 점 R의 좌표를 $(r,\ n^r-k)$라 둘 때,

① $\dfrac{(n^r-k)-56}{r-0}=\dfrac{0-(1-k)}{\log_n k-0} \Rightarrow \dfrac{n^r-k-56}{r}=\dfrac{k-1}{\log_n k}$

② $r=2\log_n k$

이어야 한다.



따라서
$n^r=n^{2\log_n k}=n^{\log_n(k^2)}=k^2$
이므로

$$\frac{n^r-k-56}{r}=\frac{k-1}{\log_n k} \Rightarrow \frac{k^2-k-56}{2\log_n k}=\frac{k-1}{\log_n k}$$
$$\Rightarrow k^2-3k-54=0$$
$$\Rightarrow (k-9)(k+6)=0$$
$$\Rightarrow k=9\ (\because\ k>1)$$

이다.
한편, 선분 AR의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 MPR의 넓이는 평행사변형 MPQA의 넓이의 $\frac{1}{2}$배이다.
따라서 사각형 PQAR의 넓이는
(삼각형 MPR의 넓이)+(평행사변형 MPQA의 넓이)
$=\frac{3}{2}\times$(평행사변형 MPQA의 넓이)
와 같고,
(평행사변형 MPQA의 넓이)$=\overline{\mathrm{AQ}}\times$(점 P의 x좌표)
$=(55+k)\times\log_n k$
$=64\log_n 9\ (\because\ k=9)$
$=128\log_n 3$
이므로
$\frac{3}{2}\times128\log_n 3=192\log_n 3$
이다.
이 값을 자연수 m이라 하면

$$192\log_n 3=m \Rightarrow \log_n 3=\frac{m}{192}$$
$$\Rightarrow 3=n^{\frac{m}{192}}$$
$$\Rightarrow n=3^{\frac{192}{m}}$$

이므로 n이 2 이상의 자연수가 되기 위해서는 m이 192의 약수이어야 한다.
즉, 조건을 만족시키는 모든 n의 개수는 192의 약수의 개수와 같고,
$192=2^6\times3$
이므로
$(6+1)\times(1+1)=14$
이다.

확률과 통계

23) [정답] ①

확률과 통계 - 중복조합
KEY POINT : 중복순열과 중복조합

${}_2\Pi_3 \times {}_2H_3 = 2^3 \times {}_4C_3 = 8 \times 4 = 32$

24) [정답] ④

확률과 통계 - 여러 가지 있는 순열
KEY POINT : 같은 것이 있는 순열

6개의 문자 a, a, b, b, c, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!2!2!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1\times2\times1} = 90$

25) [정답] ③

확률과 통계 - 여러 가지 순열
KEY POINT : 이웃하여 앉는 원순열

6명의 학생이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$\frac{6!}{6} = 5! = 120$

여학생 3명이 이웃하여 둘러 앉는 경우의 수는

$\frac{4!}{4} \times 3! = 6 \times 6 = 36$

따라서 구하는 모든 경우의 수는 $120 - 36 = 84$

26) [정답] ①

확률과 통계 - 중복조합
KEY POINT : 대소를 만족하는 순서쌍의 개수

(i) $z=1$인 경우

$1 \le x \le y \le 1^2 \le 9$을 만족시키는 x, y는

$x=1$, $y=1$이므로 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 1

(ii) $z=3$인 경우

$z^2=9$이므로 $1 \le x \le y \le 3^2 \le 9$을 만족시키는 홀수

x, y는 1, 3, 5, 7, 9에서 중복을 허락하여 2개를 택하여

크지 않은 순서대로 x, y를 정하면 되므로 순서쌍

$(x,\ y,\ z)$의 개수는

${}_5H_2 = {}_6C_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$

(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는

$1+15=16$

27) [정답] ②

확률과 통계 - 여러 가지 순열
KEY POINT : 최단경로로 이동하기

A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 가는

모든 경로의 수는 $\frac{6!}{3!\times3!} = 20$

이 중 P 지점을 지나는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!} \times 1 = 4$이므로

P지점을 지나지 않고 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$20-4=16$이다.

A 지점에서 출발하여 C 지점까지 최단거리로 가는

모든 경로의 수는 $\frac{6!}{5!} = 6$

이 중 P 지점을 지나는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!} \times 1 = 4$이므로

P지점을 지나지 않고 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$6-4=2$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $16+2=18$

28) [정답] ②

확률과 통계 - 여러 가지 순열
KEY POINT : 함수의 개수

$f(1)\times f(2)\times f(3) \le 5^3 = 125$

이므로 $f(1)\times f(2)\times f(3)$의 값으로 가능한 값은

4^1, 4^2, 4^3

이다.

(i) $f(1)\times f(2)\times f(3) = 4^1$인 경우

① 세 함숫값이 1, 1, 4인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 결정하는 경우의 수가 $\frac{3!}{2!} = 3$이다.

또한, 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 치역의 나머지 원소가 2 또는 3 또는 5이어야 한다.

이때 일반성을 잃지 않고 치역의 나머지 원소를 2라 하면 $f(4)$와 $f(5)$ 중 적어도 하나의 값이 2이어야 한다.

즉, $f(4)$와 $f(5)$를 결정하는 경우의 수에서 $f(4)$와 $f(5)$ 모두 1 또는 4인 경우의 수를 빼면 되므로

${}_3\Pi_2 - {}_2\Pi_2 = 3^2 - 2^2 = 5$

이고, 치역의 나머지 원소가 3 또는 5인 경우도 경우의 수가 같으므로

$5\times3=15$

이다.

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$3\times15=45$

이다.

② 세 함숫값이 1, 2, 2인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 결정하는 경우의 수가 $\frac{3!}{2!} = 3$이다.

또한, 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 치역의 나머지 원소가 3 또는 4 또는 5이어야 한다.

이때 일반성을 잃지 않고 치역의 나머지 원소를 3이라 하면 $f(4)$와 $f(5)$ 중 적어도 하나의 값이 3이어야 한다.

즉, $f(4)$와 $f(5)$를 결정하는 경우의 수에서 $f(4)$와 $f(5)$ 모두 1 또는 2인 경우의 수를 빼면 되므로

${}_3\Pi_2 - {}_2\Pi_2 = 3^2 - 2^2 = 5$

이고, 치역의 나머지 원소가 4 또는 5인 경우도 경우의 수가 같으므로

$5\times3=15$

이다.

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$3\times15=45$

이다.

①, ②에 의하여 조건을 만족시키는 경우의 수는

$45+45=90$

이다.

(ⅱ) $f(1)\times f(2)\times f(3)=4^2$인 경우

세 함숫값이

2, 2, 4 또는 1, 4, 4

이어야 하고, 이때 각각의 경우에 대한 경우의 수는 (ⅰ)-① 및 (ⅰ)-②와 같은 방법으로 구하면 45이다.

따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$45+45=90$

이다.

(ⅲ) $f(1)\times f(2)\times f(3)=4^3$인 경우

세 함숫값이 모두 4이어야 하고, 이때 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 치역의 나머지 원소가 1, 2, 3, 5 중 2개이어야 한다.

$f(4)$와 $f(5)$의 값을 결정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2=12$

이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 경우의 수는

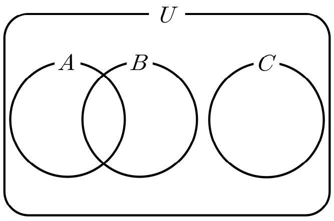
$90+90+12=192$

29) [정답] 880

\# 확률과 통계 - 여러 가지 순열
\# KEY POINT : 집합의 순서쌍의 개수

집합 A, B, C의 위치관계는 다음과 같다.

ⅰ) $n(B\cap C)=0$일 때



$n(A\cup B)=2$를 만족하도록 원소 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$이고,

선택된 두 원소를 집합 $A-B$, $A\cap B$, $B-A$에 각각 넣는 경우의 수는 3^2이다.

이때, 선택된 두 원소가 모두 집합 $B-A$에 포함되면 $A=\varnothing$이므로 이 경우 1^2가지를 제외해야 한다.

따라서 집합 A, B의 순서쌍 $(A,\ B)$를 결정하는 경우의 수는

$10\times(3^2-1^2)=80$

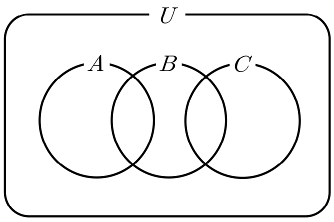
또한, 선택되지 않은 세 원소를 집합 C, $U-(A\cup B\cup C)$에 각각 넣는 경우의 수는 2^3

이때, 세 원소가 모두 $U-(A\cup B\cup C)$에 포함되면 $C=\varnothing$이므로 이 경우 1^3가지를 제외해야 한다.

따라서 집합 A, B, C의 순서쌍 $(A,\ B,\ C)$를 결정하는 경우의 수는

$80\times(2^3-1^3)=560$이다.

ⅱ) $n(B\cap C)=1$일 때



$n(A\cup B)=2$를 만족하도록 원소 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$이고,

선택된 원소 중 하나가 집합 $B\cap C$의 원소가 되는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$이다.

이때, 남은 하나의 원소가 집합 $B-(A\cup C)$에 포함되면 $A=\varnothing$이므로

남은 하나의 원소는 집합 $A-B$ 또는 집합 $A\cap B$에 포함되어야 한다.

따라서 집합 A, B의 순서쌍 $(A,\ B)$를 결정하는 경우의 수는

$10\times2\times2=40$

또한, $n(B\cap C)=1$에서 $C\neq\varnothing$이므로

선택되지 않은 세 원소를 집합 $C-B$, $U-(A\cup B\cup C)$에 각각 넣는 경우의 수는 2^3이다.

따라서 집합 A, B, C의 순서쌍 $(A,\ B,\ C)$를 결정하는 경우의 수는

$40\times2^3=320$이다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $560+320=880$

30) [정답] 366

\# 확률과 통계 - 중복조합
\# KEY POINT : 중복조합의 정의

숫자 1, 5, 9, 13으로 시작하는 행을 각각 l_1, l_2, l_3, l_4라 할 때, 조건 (가)를 만족시키기 위해서는 l_1, l_2, l_3, l_4에서 각각 1개씩 타일을 골라 빨간색으로 색칠해야 한다.

만약 l_1에서 2가 적힌 타일을 빨간색으로 색칠하고 l_2에서 5가 적힌 타일을 빨간색으로 색칠하면 두 수의 차가 3인 경우가 존재하므로 조건 (가)를 만족시킬 수 없다.

따라서 l_i $(i=1,\ 2,\ 3)$에 색칠한 빨간색 타일보다 l_{i+1}에 색칠한 빨간색 타일이 왼쪽에 위치하지 않아야 하므로 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_4=35$

이다.

또한, 두 조건 (가), (나)를 동시에 만족시키는 모든 경우의 수는 조건 (가)를 만족시키도록 5개의 타일을 색칠하는 모든 경우의 수에서 빨간색 타일 중 가장 큰 수와 파란색 타일의 수의 합이 30 이상인 모든 경우의 수를 뺀 값과 같다.

이때 조건 (가)를 만족시키도록 5개의 타일을 색칠하는 모든 경우의 수는

$35\times(16-4)=420$ ⋯ ㉠

이다.

(ⅰ) 빨간색 타일 중 가장 큰 수와 파란색 타일의 수의 합이 30일 때 타일에 적힌 두 수가 14, 16이어야 하고, 만약 빨간색 타일에 적힌 수가 14이면 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수가

${}_2\mathrm{H}_{(4-1)}={}_2\mathrm{H}_3=4$

이다.
또한, 빨간색 타일에 적힌 수가 16이면 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수가

$_4\mathrm{H}_{(4-1)}={}_4\mathrm{H}_3=20$

이다.
따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$4+20=24$

이다.

(ⅱ) 빨간색 타일 중 가장 큰 수와 파란색 타일의 수의 합이 31일 때 타일에 적힌 두 수가 15, 16이어야 하고, 만약 빨간색 타일에 적힌 수가 15이면 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수가

$_3\mathrm{H}_{(4-1)}={}_3\mathrm{H}_3=10$

이다.
또한, 빨간색 타일에 적힌 수가 16이면 조건 (가)를 만족시키는 경우의 수가

$_4\mathrm{H}_{(4-1)}={}_4\mathrm{H}_3=20$

이다.
따라서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$10+20=30$

이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 빨간색 타일 중 가장 큰 수와 파란색 타일의 수의 합이 30 이상인 모든 경우의 수가

$24+30=54$ ⋯ ㉡

이므로 두 조건 (가), (나)를 동시에 만족시키는 모든 경우의 수는 ㉠, ㉡에 의하여

$420-54=366$

이다.

미적분

23) [정답] ②

\# 미적분 - 수열의 극한
\# KEY POINT : 간단한 극한값 계산

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n^2+n)(2n-1)}{(2n+1)(n^2+2)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\times\frac{3n^2+n}{n^2+2}\right)$$
$$=1\times3=3$$

24) [정답] ⑤

\# 미적분 - 수열의 극한
\# KEY POINT : 등비수열의 극한

등비수열 $\left\{\left(\frac{|x|-1}{3}\right)^n\right\}$가 수렴하려면

$-1<\frac{|x|-1}{3}\le1$이어야 한다.

$-3<|x|-1\le3$

$-2<|x|\le4$이므로

이를 만족하는 정수 x의 개수는 0, ±1, ±2, ±3, ±4로 9이다.

25) [정답] ④

\# 미적분 - 수열의 극한
\# KEY POINT : 극한값 계산과 등차수열

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+na_n}-\sqrt{n^4+nb_n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^4+na_n)-(n^4+nb_n)}{\sqrt{n^4+na_n}+\sqrt{n^4+nb_n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(a_n-b_n)}{\sqrt{n^4+na_n}+\sqrt{n^4+nb_n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{\sqrt{n^4+na_n}+\sqrt{n^4+nb_n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{a_n}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{b_n}{n^3}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n+1}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1+0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n+1}\times\frac{1}{2}=4$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n+1}=8$

이때, 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2라 하면

$a_n-b_n=(d_1-d_2)n+p$ (단, p는 상수) 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(d_1-d_2)n+p}{n+1}=d_1-d_2=8$이다.

따라서 $a_5-b_6=(a_3+2d_1)-(b_4+2d_2)$

$=2(d_1-d_2)$

$=16$

[다른 풀이]

$c_n=\sqrt{n^4+na_n}-\sqrt{n^4+nb_n}$이라 하면

$$(c_n+\sqrt{n^4+nb_n})^2=(\sqrt{n^4+na_n})^2$$

$$c_n{}^2+2c_n\sqrt{n^4+nb_n}+n^4+nb_n=n^4+na_n$$

$$a_n-b_n=\frac{c_n{}^2+2c_n\sqrt{n^4+nb_n}}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=4$이므로

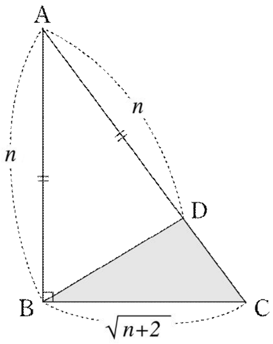
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n+1}&=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n{}^2+2c_n\sqrt{n^4+nb_n}}{n^2+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{c_n{}^2}{n^2}+2c_n\sqrt{1+\frac{b_n}{n^3}}}{1+\frac{1}{n}}\\&=\frac{0+2\times4\times\sqrt{1+0}}{1+0}=8\end{aligned}$$

종's Tip 하나하나 꼼꼼히 알아가자!

공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$은 일차항의 계수가 d인 n에 대한 일차식이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=d$이다.

26) [정답] ②

미적분 - 수열의 극한
KEY POINT : 수열의 극한 식 세우기



삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=\sqrt{n^2+n+2}$

따라서 $\overline{CD}=\sqrt{n^2+n+2}-n$이다.

따라서

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(\angle ACB)\\&=\frac{1}{2}\times\sqrt{n+2}\times\left(\sqrt{n^2+n+2}-n\right)\times\frac{n}{\sqrt{n^2+n+2}}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}\times\frac{n+2}{\sqrt{n^2+n+2}+n}\times\frac{n}{\sqrt{n^2+n+2}}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}\times1$$

$$=\frac{1}{4}$$

27) [정답] ②

미적분 - 수열의 극한
KEY POINT : 샌드위치 정리

a_n은 두 곡선 $y=\frac{\pi}{2x}$와 $y=\sin x$의 교점의 x좌표이므로

$$\frac{\pi}{2a_n}=\sin a_n$$

$$\frac{1}{\sin a_{n+1}}=\frac{2a_{n+1}}{\pi}$$

$a_1=\frac{\pi}{2}$, $n>1$에서 $\frac{2n-3}{2}\pi<a_n<\frac{2n-1}{2}\pi$이므로

$$\frac{2n-1}{2}\pi<a_{n+1}<\frac{2n+1}{2}\pi$$

$$2n-1<\frac{2a_{n+1}}{\pi}<2n+1$$

$$2n-1<\frac{1}{\sin a_{n+1}}<2n+1$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin a_{k+1}}<\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$$

$$n^2<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin a_{k+1}}<n^2+2n$$

위의 식의 양변을 n^2으로 나누면

$$1<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin a_{k+1}}<1+\frac{2}{n}$$

위의 식의 양변에 $a_1=\frac{\pi}{2}$를 곱하면

$$\frac{\pi}{2}<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_1}{\sin a_{k+1}}<\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{2}{n}\right)\text{이고}$$

수열의 극한의 대소관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_1}{\sin a_{k+1}}\le\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_1}{\sin a_{k+1}}=\frac{\pi}{2}$

28) [정답] ⑤

미적분 - 수열의 극한
KEY POINT : 등비수열로 정의된 함수

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+ax^n+1}{x^{n+1}+1}=\begin{cases}1 & (0\le x<1)\\ \frac{a+2}{2} & (x=1)\\ 1+\frac{a}{x} & (x>1)\end{cases}$$

이고 $a>0$이므로 함수

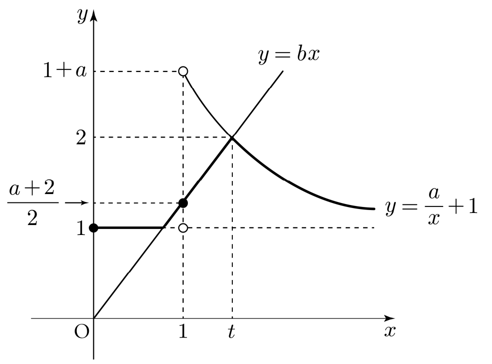
$y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+ax^n+1}{x^{n+1}+1}$은 $x=1$에서 불연속이다.

이때 $f(1)=\frac{a+2}{2}$이고 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 점 $\left(1,\ \frac{a+2}{2}\right)$가 직선 $y=bx$ 위의 점이어야 하고,

$x=1$ 근방에서 함수 $f(x)$의 값이 bx이어야 한다. … ㉠

또한 조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$의 최솟값이 1이므로 $x=0$ 근방에서 함수 $f(x)$의 값이 bx일 수 없다.

즉 $x=0$ 근방에서 함수 $f(x)$의 값이 1이어야 한다. ⋯ ㉡
마찬가지의 방법으로 함수 $f(x)$의 최댓값이 2이므로,
직선 $y=bx$와 곡선 $y=1+\frac{a}{x}$가 만나서 생기는 점의 y좌표가 2이어야 한다. ⋯ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 정리하여 그래프로 나타내면 그림과 같다.



따라서 그림과 같이 직선 $y=bx$와 곡선 $y=1+\frac{a}{x}$가 만나서 생기는 점의 x좌표를 t로 놓으면

$1+\frac{a}{t}=bt=2$ ⋯ ㉣

이고, ㉠에 의하여

$\frac{a+2}{2}=b$ ⋯ ㉤

이므로 ㉤을 ㉣에 대입하여 정리하면

$\frac{a}{t}=1,\ \ \frac{(a+2)t}{2}=2$

이다.
즉

$$t=a=\frac{4}{a+2}\ \Rightarrow a=-1+\sqrt{5}\ \ (\because\ a>0),\ b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

이므로 $f(x)$는 $x\le\frac{\sqrt{5}-1}{2}$일 때 $f(x)=1$이고, 따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

이다.
또한,

$$f(1)=b=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad f(2)=1+\frac{a}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f(2)=1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=2+\sqrt{5}$$

29) [정답] 24

 # 미적분 - 수열의 극한
 # KEY POINT : 수열의 극한 식 세우기

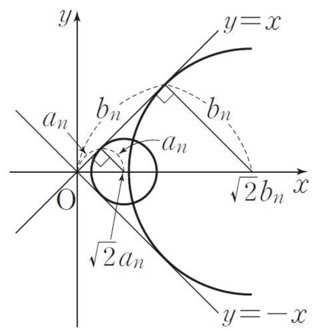
원의 중심의 좌표를 $(k,\ 0)$ $(k>0)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은 $(x-k)^2+y^2=r^2$이다.
이 원이 직선 $y=x$에 접하므로 원의 중심 $(k,\ 0)$과 직선 $x-y=0$사이의 거리는

$$r=\frac{|k-0|}{\sqrt{1+1}}=\frac{k}{\sqrt{2}}$$

원 $(x-k)^2+y^2=\frac{k^2}{2}$이 점 $\mathrm{A}(2n+1,\ n)$을 지나므로

$$(2n+1-k)^2+n^2=\frac{k^2}{2}$$

$$k^2-(8n+4)k+10n^2+8n+2=0$$



위의 k에 대한 이차방정식의 두 근이 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 동시에 접하는 두 원의 중심의 x좌표이고, 이를 $\sqrt{2}a_n$, $\sqrt{2}b_n$이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\sqrt{2}a_n+\sqrt{2}b_n=8n+4$, $\sqrt{2}a_n\times\sqrt{2}b_n=10n^2+8n+2$이다.

따라서 $a_n+b_n=\frac{8n+4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}(2n+1)$이고,

$a_nb_n=5n^2+4n+1$이다.

또한, $(a_n-b_n)^2=(a_n+b_n)^2-4a_nb_n$
$=8(4n^2+4n+1)-4(5n^2+4n+1)$
$=12n^2+16n+4$ 이므로

$|a_n-b_n|=\sqrt{12n^2+16n+4}$
$=2\sqrt{3n^2+4n+1}$

따라서 두 원의 넓이의 차이는

$|S_n-T_n|=|a_n{}^2\pi-b_n{}^2\pi|$
$=|a_n{}^2-b_n{}^2|\pi$
$=|(a_n-b_n)(a_n+b_n)|\pi$
$=|2\sqrt{3n^2+4n+1}\times2\sqrt{2}(2n+1)|\pi$이다.

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{|S_n-T_n|}{\sqrt{n^a+1}}=b\pi$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{3n^2+4n+1}\times2\sqrt{2}(2n+1)}{\sqrt{n^a+1}}=b\pi$$

$a=4,\ b=2\sqrt{3}\times4\sqrt{2}=8\sqrt{6}$

$\therefore\ \left(\frac{b}{a}\right)^2=(2\sqrt{6})^2=24$

30) [정답] 11

 # 미적분 - 수열의 극한
 # KEY POINT : 수열의 극한 식 세우기

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=x_n$, $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}=y_n$

으로 놓으면 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 세 변의 길이의 합이 n이므로

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=n-(x_n+y_n)$

이다.
따라서 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$에서 코사인법칙을 사용하면

$$(x_n)^2+(y_n)^2-2x_ny_n\cos\frac{\pi}{3}=\{n-(x_n+y_n)\}^2$$

$$\Rightarrow n^2-2(x_n+y_n)n+3x_ny_n=0\ \cdots\ ㉠$$

이다.
또한, $0<x_n<n$이므로
$$0<n^a x_n<n^{a+1}$$
이고,
① $a<-1$일 때 : $\lim_{n\to\infty} n^{a+1}=0$
② $a=-1$일 때 : $\lim_{n\to\infty} n^{a+1}=1$
이므로 $\lim_{n\to\infty} n^a x_n=\sqrt{3}$을 만족시키기 위해서는 $a>-1$이어야 한다. ⋯ ㉡
따라서
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\left(n^a x_n\times n^{-1-a}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}n^a x_n\times\lim_{n\to\infty}n^{-1-a}\\&=\sqrt{3}\times 0=0\end{aligned}$$
이고, 이때 ㉠의 양변을 n^2으로 나눈 뒤 $\lim_{n\to\infty}$를 양변에 씌우면
$$1-\frac{2(x_n+y_n)}{n}+\frac{3x_n y_n}{n^2}=0$$
$$\Rightarrow\left(3\times\frac{x_n}{n}-2\right)\times\frac{y_n}{n}-2\times\frac{x_n}{n}+1=0$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left\{(-2)\times\frac{y_n}{n}+1\right\}=0$$
$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{n}=\frac{1}{2}\ \cdots\ ㉢$$
이다. 한편,
$$S_n=\frac{1}{2}x_n y_n\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}x_n y_n$$
이므로
$$\lim_{n\to\infty}\left\{S_n\times n^{-|2a+1|}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}x_n y_n}{n^{|2a+1|}}$$
이다.
이때 조건 (가)와 ㉢에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n y_n}{n^k}$이 0이 아닌 값으로 수렴하기 위한 실수 k의 값은 $-a+1$이고, 따라서
$$-a+1=|2a+1|\Rightarrow a=0\ (\because ㉡)$$
이어야 한다.
또한,
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n y_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}x_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{n}\\&=\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$
이므로
$$\lim_{n\to\infty}\left\{S_n\times n^{-|2a+1|}\right\}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{8}=b$$
이다.
따라서
$$a+b=0+\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$$
이므로 구하는 값은
$$p+q=8+3=11$$
이다.