2027학년도 3모 대비 부엉이 모의고사 해설

제 2 교시

수학 영역

공통

1	⑤	2	①	3	①	4	⑤	5	①
6	③	7	①	8	②	9	③	10	③
11	⑤	12	②	13	④	14	④	15	②
16	12	17	24	18	7	19	18	20	168
21	176	22	19						

확률과 통계

23	②	24	⑤	25	⑤	26	④	27	③
28	①	29	15	30	721				

미적분

23	③	24	①	25	①	26	②	27	④
28	③	29	4	30	44				

예상 1등급 커트라인

미적		확률과 통계
80-81		85

모의고사 총평

전반적으로 요즘 평가원 기조에 맞추어 킬러메타로 가고자 하였고 그에 따라 12,20같은 쉬운 4점은 최대한 수월하게 풀 수있도록 배치하였습니다.

공통 난이도는 26수능보다 약간 더 어려운 정도라고 생각하시면 될 거 같습니다. 26수능보다 21번은 더 쉽게 만든대신, 15,22의 난이도를 상승시켰습니다.
특히 22번은 꽤나 어려워서 수험생입장에서 시간을 많이 뺏길 문항이었을 것입니다.

미적난이도는 24수능, 26학년도 6평보다는 쉽고
25수능,26수능보다는 어려운 정도였습니다.

28번,30번이 모두 추론을 요구하는 문항으로 두 문항의 체감 난이도가 높았을 것이라 생각합니다.

아무쪼록 모의고사 푸느라 수고 많으셨고
3월 학력평가가 얼마 남지 않았는데 최선을 다해 준비하되
너무 학력평가 점수에 연연하지는 않았으면 합니다.

보통 3월 학평 성적이 수능 성적이라고 하시는 분들이 있던데
사실 그런거 없고 결국 수미잡이더라고요.
삼수해보니 알게됐습니다... ㅠㅠ

공통

9번: ③

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면,

$$\lim_{x \to a-} g(x) = g(a) = \lim_{x \to a+} g(x)$$

이다. 따라서,

$$f(a) = a + 4$$

를 만족시키는 실수 a가 1뿐인 것으로, 방정식

$$f(x) - x - 4 = 0$$

의 실근이 1뿐인 것을 알 수 있다.

$$\Rightarrow \ f(x) = (x-1)^2 + x + 4$$
$$\therefore \ f(6) = 5^2 + 10 = 35$$

이다.

문제 코멘트

할 말이 딱히 없다.

10번: ③

$$\sum_{k=1}^{m+4} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k = a_{m+4} + a_{m+3} + a_{m+2} + a_{m+1}$$
$$= 4a_{m+2.5}$$

이므로,

$$a_{m+2.5} > 0$$

을 만족시키는 자연수 m의 최솟값이 4이다.

$$\Rightarrow \ a_{6.5} > 0, \ a_{5.5} \le 0$$

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 할 때,

$$a_{10} - 3.5d > 0 \ \Rightarrow \ 12 - 3.5d > 0 \ \cdots \text{㉠}$$

과

$$a_{10} - 4.5d \le 0 \ \Rightarrow \ 12 - 4.5d \le 0 \ \cdots \text{㉡}$$

이고, ㉠과 ㉡을 d에 대하여 정리하면

$$\frac{24}{9} \le d < \frac{24}{7}$$
$$\Rightarrow \ d = 3 \ (\because \ d\text{는 정수})$$

이다. 따라서,

$$a_1 = a_{10} - 9d = -15$$

문제 코멘트

공차가 정수라는 조건을 공차가 부등식으로 특정되겠다는 생각을 하며 문항을 풀어보자.

또한 $\sum_{k=1}^{m+4} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k$를 등차중항을 이용해 분석하자는 생각을 해야한다. 그래프로 해석하고 있으면 출제자가 분명 화낸다.

11번: ⑤

ㄱ: 위치인 $x(t)=t^3+at^2+bt$ 를 미분한 속도인

$$v(t)=3t^2+2at+b$$

를 한번 더 미분하면, 가속도는

$$a(t)=6t+2a$$

이므로, $a=3$ 에서 $t=1$ 일 때, 가속도는 $6+6=12$ 이다. (참)

ㄴ: 속도인 $v(t)=3t^2+2at+b$ 에서 충분히 큰 t 에 대하여 $v(t)>0$ 이다. 따라서,

속도가 바뀌는 구간이 존재
$\Updownarrow$
$v(p)<0$ 인 실수 p 가 존재

이고, $a<0$ 에서 $v(0)<0$ 이므로, 실수 p 가 존재한다. (참)

ㄷ: 점 P 가 출발한 후 원점을 지나지 않기 위해선

$$t^3+at^2+bt=t\left(t^2+at+b\right)=0$$

을 만족시키는 양수 t 가 존재해선 안된다. 함수

$$f(t)=t^2+at+b$$

의 도함수인 $f'(t)=2t+a$ 는 $t>0$ 에서 항상

$$f'(t)=2t+a>0 \ (\because \ a>0)$$

으로 함수 $f(t)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 증가한다. 또한

$$f(0)=b>0$$

이므로, $f(t)=0$ 을 만족시키는 양수 t 는 존재하지 않는다. (참)

문제 코멘트

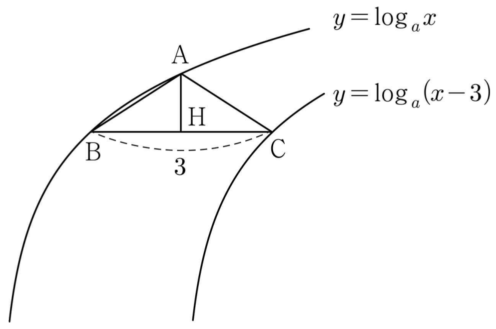
속도 ㄱㄴㄷ문항에서 약간의 추론을 더했다.
그래프적으로 푸는 것도 가능은 하지만, 증가,감소를 통해 푸는게 더 멋있는 것 같기에 해설도 그 방향으로 썼다.

12번: ②

곡선 $y=\log_a(x-3)$ 의 점근선은 $x=3$ 이므로, A $(3\ ,\ \log_a 3)$ 이다.

곡선 $y=\log_a(x-3)$ 가 곡선 $y=\log_a x$ 를 x 축으로 3 만큼 평행이동 시킨 곡선이므로, 선분 $\overline{\mathrm{BC}}=3$ 이다.

또한, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$ 이므로 다음과 같이 점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{HC}}=\dfrac{3}{2}$ 이다.



따라서, 점 B 의 x 좌표는 $3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$ 이고, y 좌표는 $y=\log_a\dfrac{3}{2}$ 이고, 삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\times 3\times\log_a 2=6 \ \Rightarrow\ \log_a 2=4$$

$$\therefore\ a=2^{\frac{1}{4}}$$

문제 코멘트

이등변삼각형의 성질과 로그의 평행이동 관계를 분석해보자.

13번: ④

직선 $y=t$, y축과 직선 $x=t$ 및 x축으로 둘러싸인 정사각형의 넓이에서 $\int_0^t f(x)dx$를 뺀 값이 S_1-S_2이다. 따라서,

$$g(t)=t^2-\int_0^t f(x)dx$$

이고, 함수 $g(t)$의 최댓값을 구하기 위하여 미분해보면,

$$g'(t)=2t-f(t)=-\frac{1}{8}t(t-2)(t+4)$$

임을 알 수 있다. 따라서, 함수 $g(t)$는 열린구간 $(0,2)$에서 증가, 열린구간 $(2,\infty)$에서 감소하므로 $t=2$에서 최댓값을 가진다.

$$g(2)=4-\int_0^2 f(x)dx=4-\left[\frac{1}{32}x^4+\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=\frac{5}{6}$$

이다.

문제 코멘트

주어진 넓이를 효과적으로 계산해내고, 최댓값을 알기 위하여 주어진 함수를 미분해보자.

14번: ④

삼각형 DBF의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 EFC의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 할 때, 두 삼각형에서 각각 $\angle\mathrm{BDF}$, $\angle\mathrm{FEC}$를 기준으로 사인법칙을 사용하면

$$R_1 : R_2=\frac{\overline{\mathrm{BF}}}{\sin(\angle\mathrm{BDF})}:\frac{\overline{\mathrm{FC}}}{\sin(\angle\mathrm{FEC})}=4:5$$

이다. 또한, $\angle\mathrm{DBF}=\angle\mathrm{FCE}$이므로,

$$R_1 : R_2=\frac{\overline{\mathrm{DF}}}{\sin(\angle\mathrm{DBF})}:\frac{\overline{\mathrm{FE}}}{\sin(\angle\mathrm{FCE})}$$
$$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{DF}}:\overline{\mathrm{FE}}=4:5$$

이다. 따라서, $\overline{\mathrm{DF}}=4k$, $\overline{\mathrm{FE}}=5k$ (k는 실수)라 할 때, 삼각형 DFE에서 코사인법칙을 사용하면,

$$\overline{\mathrm{DE}}^2=\overline{\mathrm{DF}}^2+\overline{\mathrm{FE}}^2-2\times\overline{\mathrm{DF}}\times\overline{\mathrm{FE}}\times\cos(\angle\mathrm{DFE})$$
$$\Rightarrow\ 9=16k^2+25k^2-2\times4k\times5k\times\frac{1}{8}$$
$$\therefore\ k=\frac{1}{2}$$

이다. 삼각형 DFE에서 사인법칙을 사용하면,

$$\frac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin(\angle\mathrm{DFE})}=\frac{\overline{\mathrm{DF}}}{\sin(\angle\mathrm{DEF})}\ \Rightarrow\ \frac{3}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{2}{\sin(\angle\mathrm{DEF})}$$
$$\therefore\ \sin(\angle\mathrm{DEF})=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

이므로 삼각형 ADE에서 사인법칙을 사용하면,

$$\frac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin(\angle\mathrm{DAE})}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}=2R$$

이다. 따라서,

$$\frac{\overline{\mathrm{DG}}}{\sin(\angle\mathrm{DEG})}=2\sqrt{3}\Rightarrow\ \overline{\mathrm{DG}}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$
$$\therefore\ \overline{\mathrm{DG}}\times\sin(\angle\mathrm{DEG})=\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{\sqrt{21}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{8}$$

이다.

문제 코멘트

정삼각형의 특성중 각이 같다와 각을 알 수 있다를 활용해보자.
또한 같은 외접원을 공유하는 삼각형의 성질을 알아보자.

15번: ②

먼저 박스 조건을 해석해보자.

$$\lim_{x\to t}\frac{f(x)-x-t}{xf(x)+t}$$

의 값이 존재하지 않기 위해선 분모인

$$xf(x)+t$$

가 0으로 수렴해야 한다. 따라서,

$$tf(t)+t=0 \Rightarrow\ t=0\ \text{ 또는 }\ f(t)=-1$$

이고, 극한식의 값이 존재하지 않도록 하는 실수 t가 양수 k뿐이므로 $t=0$일 때, 값이 존재함을 알 수 있다. 따라서,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{xf(x)}$$

은 수렴한다. 이를 만족시키기 위해선

$$\lim_{x\to 0}(f(x)-x)=0\ \Rightarrow\ f(0)=0$$

이고, 분자인 $xf(x)$가 x^2을 인수로 가지므로,

$$\text{분자인 } f(x)-x \text{ 도 } x^2 \text{ 을 인수로 가진다.}$$
$$\Updownarrow$$
$$f'(0)=1$$

이다. 이제 $f(t)=-1$일 경우를 살펴보면,

$$f(0)=0\,,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

이므로 $f(p)=-1$인 음수 p가 존재하고, 그때

$$\lim_{x\to t}\frac{f(x)-x-t}{xf(x)+t}$$

의 값은 존재한다. 따라서 이때 분자 또한 0으로 수렴해야 하므로,

$$\lim_{x\to p}(f(x)-x-p)=0$$

을 만족시켜야 한다. $f(p)=-1$이므로 $p=-\frac{1}{2}$으로

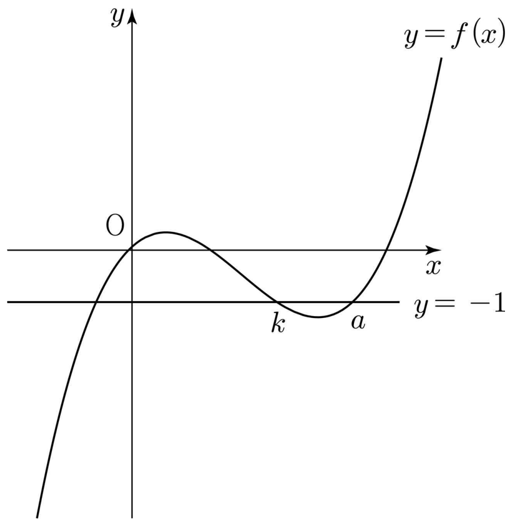
$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

이다. 마지막으로 양수 k에서만 극한식의 값이 존재하지 않으므로,

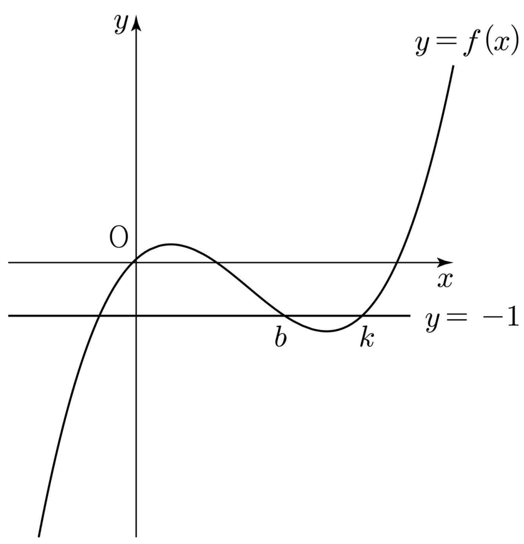
$$f(k)=-1$$

이다.

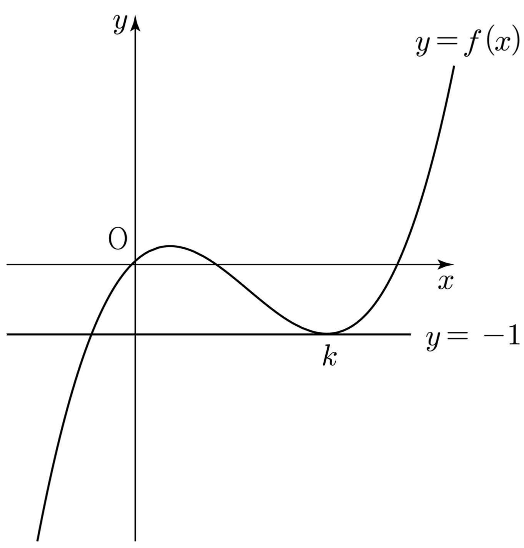
$f'(k)<0$일 때는 다음과 같이 열린구간 (k,∞)에서 $f(a)=-1$인 실수 a가 존재하고,



$f'(k)>0$일 때는 다음과 같이 열린구간 $(0,k)$에서 $f(b)=-1$인 실수 b가 존재하므로,



다음과 같이 $f'(k)=0$임을 알 수 있다.



따라서,

$$f(x)=\mathrm{A}(x-k)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)-1 \ (\mathrm{A}\text{는 } 0\text{이 아닌 상수})$$

라 할 때,

$$f(0)=\mathrm{A}k^2\times\frac{1}{2}-1=0$$
$$\Rightarrow \ \mathrm{A}k^2=2$$

이고,

$$f'(0)=-2\mathrm{A}k\times\frac{1}{2}+\mathrm{A}k^2=1$$
$$\Rightarrow \ -\mathrm{A}k+\mathrm{A}k^2=1$$

으로, 두 식을 연립하면, $\mathrm{A}=\frac{1}{2}$, $k=2$ 으로

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)-1,$$
$$f(2k)=f(4)=8$$

이다.

문제 코멘트

극한식의 값이 존재하기 위한 조건을 확실히 알아보자. 이런 경우 분모가 0이 되는 지점에 주목하는게 1순위가 되어야 한다.

20번: 168

1) 자연수 m에 대하여

$$a_{2m+1}=-4m+1, \quad a_{2m+1}=-\frac{a_{2m+2}}{2}+2m+\frac{1}{2}$$

이므로,

$$4m+1=-\frac{a_{2m+2}}{2}+2m+\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \ a_{2m+2}=12m-1$$

이다. 따라서,

$$a_{2m+2}-a_{2m+1}=16m-2=\boxed{(\text{가})}$$

이다.

2)

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=(-1)^n a_{n+1}+n^2$$

에서 $n=1$을 대입하면, $a_1=-a_2+1$이고, $a_1=-\frac{27}{2}$이므로,

$$a_2=\frac{29}{2} \Rightarrow \ a_1-a_2=-28=\boxed{(\text{나})}$$

이다.

3)

$$a_1-a_2-\sum_{n=1}^{4}\left(a_{2n+2}-a_{2n+1}\right)$$
$$=-28-\sum_{n=1}^{4}(16n-2)=-180=\boxed{(\text{다})}$$

이다. 따라서,

$$f(m)=16m-2, \ f(2)=30$$
$$p=-28, \ q=-180$$
$$\Rightarrow \ \frac{p\times q}{f(2)}=\frac{-28\times-180}{30}=168$$

이다.

문제 코멘트

20번에 나오는 빈칸 문항은 푸는 사람이 흐름을 잘 따라가도록 설계되었다. 그런점을 유의하여 빈칸에서 주어진 바를 아주 잘 따라가며 풀어보자.

21번: 176

함수 $F(x)-\int_1^x g(t)dt$ 가 구간 $[0, \infty)$에서 증가하므로,
구간 $[0, \infty)$에서

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)-\int_1^x g(t)dt\right)\geq 0$$
$$\Rightarrow\ f(x)-g(x)\geq 0$$

이고, 함수 $F(x)-x\int_1^x g(t)dt$ 가 구간 $[0, \infty)$에서 감소하므로,
구간 $[0, \infty)$에서

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)-x\int_1^x g(t)dt\right)\leq 0$$
$$\Rightarrow\ f(x)-xg(x)-\int_1^x g(t)dt\leq 0$$

이다. 따라서, 주어진 식을 정리하면 구간 $[0, \infty)$에서

$$g(x)\leq f(x)\leq xg(x)+\int_1^x g(t)dt$$
$$\Rightarrow\ 0\leq f(x)-g(x)\leq (x-1)g(x)+\int_1^x g(t)dt$$

이다. $x=1$ 일 때,

$$(x-1)g(x)+\int_1^x g(t)dt=0$$

이고, 이 때,

$$0\leq (x-1)g(x)+\int_1^x g(t)dt$$

이므로 함수 $(x-1)g(x)+\int_1^x g(t)dt$ 의 그래프가 $x=1$ 에서 x 축과 접함을 알 수 있고, 따라서, $x=1$ 일 때, 미분계수 또한 0 으로,

$$\frac{d}{dx}\left((x-1)g(x)+\int_1^x g(t)dt\right)=2g(x)+(x-1)g'(x)$$
$$\Rightarrow\ g(1)=0$$

이다. 따라서,

$$g(x)=(x-1)(x-k)\ (k\text{는 실수})\ \cdots\ ㉠$$

라 하자. 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=1$ 에서

$$0\leq f(x)-g(x)\leq 0$$

이므로 이 때, 함수 $f(x)-g(x)$ 의 그래프는 x 축과 접하고,

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 2, 함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수는 1 이므로,

$$f(x)-g(x)=(x-1)^2$$

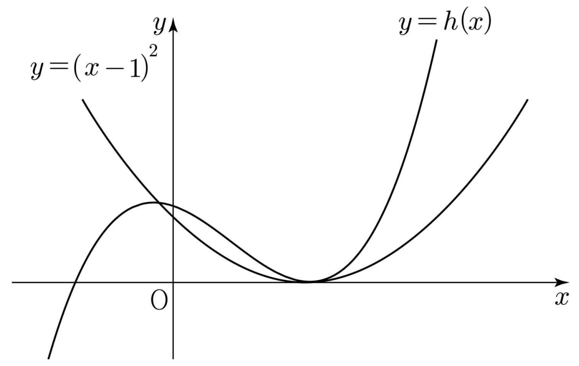
이다. 따라서 $x\geq 0$ 에서

$$(x-1)^2\leq (x-1)g(x)+\int_1^x g(t)dt$$

임을 알 수 있다.

$$h(x)=(x-1)g(x)+\int_1^x g(t)dt$$

라 할 때, 함수 $h(x)$ 는 삼차함수이고, 곡선 $y=h(x)$ 는 $x=1$ 에서 곡선 $y=(x-1)^2$ 와 접하므로 다음과 같은 상황이다.



따라서,

$$h(0)\geq (0-1)^2=1$$

이어야 한다.

$$h(0)=-g(0)-\int_0^1 g(t)dt$$

이고, ㉠에 의하여 정리하면,

$$h(0)=-\frac{3}{2}k+\frac{1}{6}\geq 1,\ k\leq -\frac{5}{9}$$

이다.

$$f(x)=(x-1)(x-k)+(x-1)^2,\ f(10)=171-9k$$

이므로, $f(10)$ 의 최솟값은 176 이다.

문제 코멘트

부등식이 2개가 주어졌을 때, 250921을 풀어봤을때의 기억을
되살려보자. 양 끝 함수식이 같아지는 순간이 존재하는지를
확인하는게 우선이다.

22번: 19

곡선 $y=\frac{1}{3}\times 8^{x}-k$를 원점에 대하여 3배 확대시킨 곡선의 방정식은

$$\frac{y}{3}=\frac{1}{3}\times 8^{\frac{1}{3}x}-k$$
$$\Rightarrow\ y=2^{x}-3k$$

이다. 점 A가 곡선 $y=2^{x}-3k$위에 있고, 점 C가 곡선 $y=\frac{1}{3}\times 8^{x}-k$위에 있으므로,

$$\overline{\mathrm{OC}}:\overline{\mathrm{OA}}=1:3$$

이다.

$$\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{OC}}\times\overline{\mathrm{OD}}$$

에서

$$\overline{\mathrm{OD}}:\overline{\mathrm{OB}}=1:\frac{3}{2}$$

임을 알 수 있다. 점 D의 좌표를 $\left(\frac{2}{3}a,\ \frac{2}{3}b\right)$라 하면, 점 B의 좌표는 $(a,\ b)$이고, 점 D가 곡선 $y=\frac{1}{3}\times 8^{x}-k$위의 점이므로

$$\frac{1}{3}\times 8^{\frac{2}{3}a}-k=\frac{2}{3}b$$
$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\times 4^{a}-\frac{3}{2}k=b$$

으로, 점 B의 좌표는 $\left(a\,,\ \frac{1}{2}\times 4^{a}-\frac{3}{2}k\right)$, 즉 점 B는 곡선

$$y=\frac{1}{2}\times 4^{x}-\frac{3}{2}k$$

위에 있다. 점 B가 두 곡선

$$y=4^{x}-4k\,,\ y=\frac{1}{2}\times 4^{x}-\frac{3}{2}k$$

의 교점이므로,

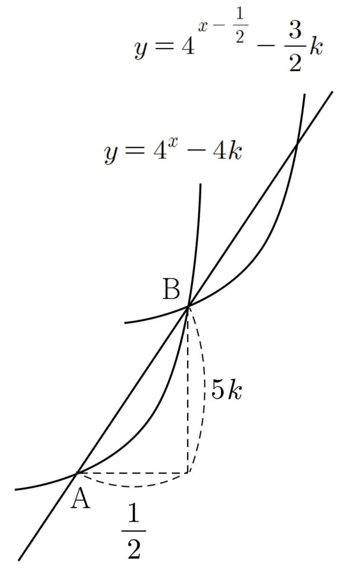
$$4^{a}-4k=\frac{1}{2}\times 4^{a}-\frac{3}{2}k$$
$$\Rightarrow\ a=\log_{4}5k\,,\ b=k$$

임을 알 수 있다.

점 B의 자취인 곡선

$$y=\frac{1}{2}\times 4^{x}-\frac{3}{2}k=4^{x-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}k$$

가 곡선 $y=4^{x}-4k$ 를 x축으로 $\frac{1}{2}$, y축으로 $\frac{5}{2}k$만큼 평행이동 시킨 곡선이고, 직선 AB의 기울기가 $5k$이므로 다음과 같은 상황이다.



따라서, 점 A의 좌표는

$$\left(a-\frac{1}{2}\ ,\ b-\frac{5}{2}k\right)\Rightarrow\left(\log_{4}5k-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{3}{2}k\right)$$

이다. 또한 점 A가 곡선 $y=2^{x}-3k$위의 점이므로 대입하면

$$-\frac{3}{2}k=2^{\log_{4}5k-\frac{1}{2}}-3k$$
$$\Rightarrow\ \frac{3}{2}k=\frac{\sqrt{5k}}{\sqrt{2}}\ ,\ \frac{9}{4}k^{2}=\frac{5k}{2}$$
$$\Rightarrow\ k=\frac{10}{9}$$

이다.

$$\therefore\ p=9\ ,\ q=10\ ,\ p+q=19$$

문제 코멘트

자취의 방정식, 확대축소, 평행이동
수험생들이 어려워 할 만한 요소를 모두 넣었기에 체감 난이도가 상당히 높을 것이다.

확대축소는 작년 수능 22번에, 자취의 방정식은 작년 6평 22번에 모두 킬러주제로 출제되었던 내용이기에 만약 이 문항에서 시간이 오래걸렸다면 그 문항들을 다시 학습함을 추천한다.

확률과 통계

27번: ③

동전을 던져 앞면이 나오는 개수가 1인 경우의 수는

$${}_3C_1=3$$

이때 뽑은 카드에 적힌 수의 합이 홀수가 되는 경우의 수는 홀수인 카드 1장을 뽑는 경우의 수이므로

$${}_4C_1=4$$

동전을 던져 앞면이 나오는 개수가 2인 경우의 수는

$${}_3C_2=3$$

이때 뽑은 카드에 적힌 수의 합이 홀수가 되는 경우의 수는 홀수인 카드 1장과 짝수인 카드 1장을 뽑는 경우의 수이므로

$${}_4C_1\times{}_2C_1=8$$

동전을 던져 앞면이 나오는 개수가 3인 경우의 수는

$${}_3C_3=1$$

이때 뽑은 카드에 적힌 수의 합이 홀수가 되는 경우의 수는 홀수인 카드 1장과 짝수인 카드 2장을 뽑는 경우의 수 또는 홀수인 카드 3장을 뽑는 경우의 수이므로

$${}_4C_1\times{}_2C_2+{}_4C_3=4+4=8$$

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times4+3\times8+8=44$

28번: ①

A지점에서 B지점까지 이동하는 전체 경우의 수는

$$\frac{9!}{5!\times4!}=126$$

이때 P지점에서 우회전을 하며 이동하는 경우의 수는

$$2!\times\frac{5!}{3!\times2!}=20$$

또한 Q지점에서 좌회전을 하며 이동하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{3!}{2!}=18$$

이때 P지점에서 우회전을 하고 Q지점에서 좌회전을 하며 이동하는 경우의 수는

$$2!\times\frac{3!}{2!}=6$$

따라서 구하는 경우의 수는 $126-20-18+6=94$

29번: 15

대문자 A, B, C와 소문자 c는 $ABCc$와 같이 나열되어 있어야 한다.

1. 소문자 a가 $AaBCc$와 같이 나열되는 경우

소문자 b를 나열하는 경우의 수는 3

2. 소문자 a가 $ABaCc$와 같이 나열되는 경우

소문자 b를 나열하는 경우의 수는 4

3. 소문자 a가 $ABCac$와 같이 나열되는 경우

소문자 b를 나열하는 경우의 수는 4

4. 소문자 a가 $ABCcb$와 같이 나열되는 경우

소문자 b를 나열하는 경우의 수는 4

따라서 구하는 경우의 수는 $3+4+4+4=15$

30번: 721

1. 치역의 원소의 개수가 1인 경우

해당 원소는 $\{5\}$가 가능하고, 각 경우의 수는 1

2. 치역의 원소의 개수가 2인 경우

해당 원소는 $\{1,4\}, \{2,3\}$이 가능하고, 각 경우의 수는

$$2^5-2=30$$

3. 치역의 원소의 개수가 3인 경우

해당 원소는 $\{1,4,5\}, \{2,3,5\}$가 가능하고, 각 경우의 수는

$$3^5-3\times2^5+3=150$$

4. 치역의 원소의 개수가 4인 경우

해당 원소는 $\{1,2,3,4\}$가 가능하고, 각 경우의 수는

$${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times\frac{1}{3!}\times4\neq240$$

5. 치역의 원소의 개수가 5인 경우

해당 원소는 $\{1,2,3,4,5\}$가 가능하고, 각 경우의 수는

$$5!=120$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$1+2\times30+2\times150+240+120=721$$

미적분

27번: ④

곡선 $y=\tan\pi x$, 직선 $y=-nx+n$의 교점 중 x좌표가 $1-n$보다 크고, $1+n$보다 작은 모든 점들의 x좌표의 합을 b_n이라 할 때,

$$b_n=\frac{a_n}{n}$$

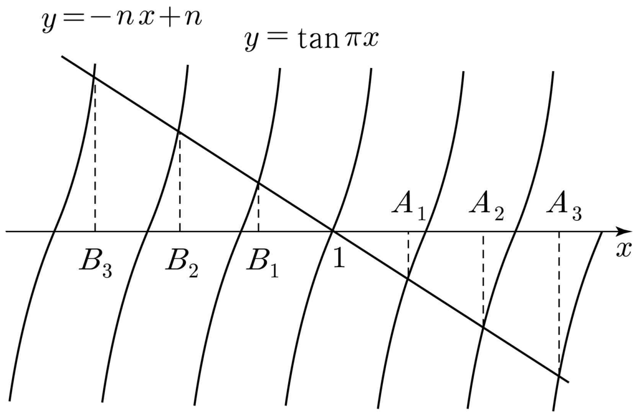
이다. 교점의 x좌표중 1보다 큰 것을 작은 것부터 크기순으로

A_1, A_2, $\cdots$ A_n

이라 하고 교점의 x좌표중 1보다 작은 것들을 큰 것부터 크기순으로

B_1, B_2, $\cdots$ B_n

이라 할 때, 다음과 같다.



곡선 $y=\tan\pi x$와 직선 $y=-nx+n$은 모두 $(1, 0)$에 대하여 대칭이므로

$$A_n+B_n=2$$

이다. 또한 x좌표가 $1-n$보다 크고 $1+n$보다 작아야하므로, A_n의 개수와 B_n의 개수는 모두 각각 n개다. 따라서

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(A_k+B_k)+1=2n+1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{nb_n}{n^2+1}=\frac{2n^2+n}{n^2+1}=2$$

문제 코멘트

탄젠트함수의 대칭성을 활용해보자.

28번: ③

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 정의됨을 생각해보자.

$|f(x)|>1$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n+f(x)}{(f(x))^n+2}$의 값이 존재하기 위해선

$$|f(x)|>|x| \text{ 또는 } f(x)=|x| \cdots ㉠$$

를 만족시켜야 하고,

$|f(x)|<1$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n+f(x)}{(f(x))^n+2}$의 값이 존재하기 위해선

$$|x|\le 1 \ \cdots ㉡$$

이어야 한다.

또한 함수 $f(x)$가 삼차함수이므로, 함수 $f(x)$의 치역은 실수 전체의 집합이고, 따라서 $f(a)=-1$을 만족하는 실수 a가 존재한다.

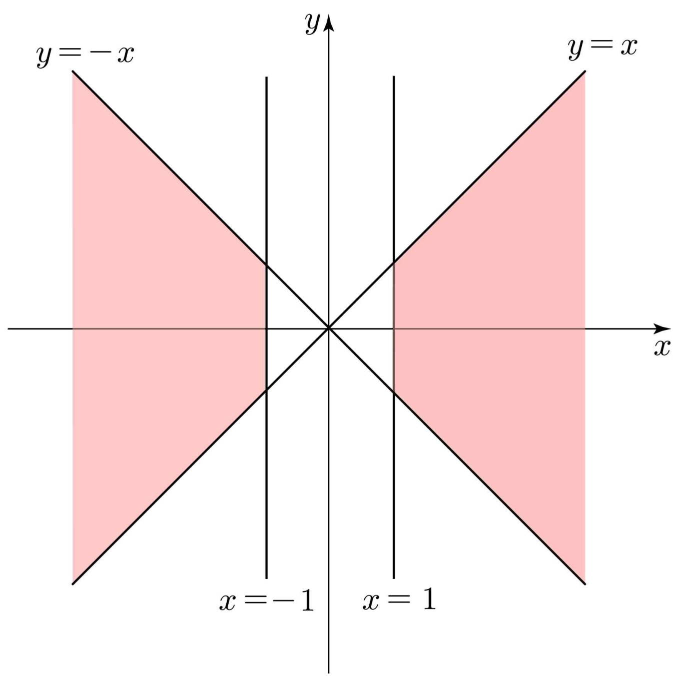
$\Rightarrow$ $x=a$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^n-1}{(-1)^n+2}$의 값이 존재한다.

n이 짝수일 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^n-1}{(-1)^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^n-1}{3}$

n이 홀수일 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^n-1}{(-1)^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a|^n-1}{1}$

이고 두 값이 같으므로, $a=\pm1$임을 알 수 있다.

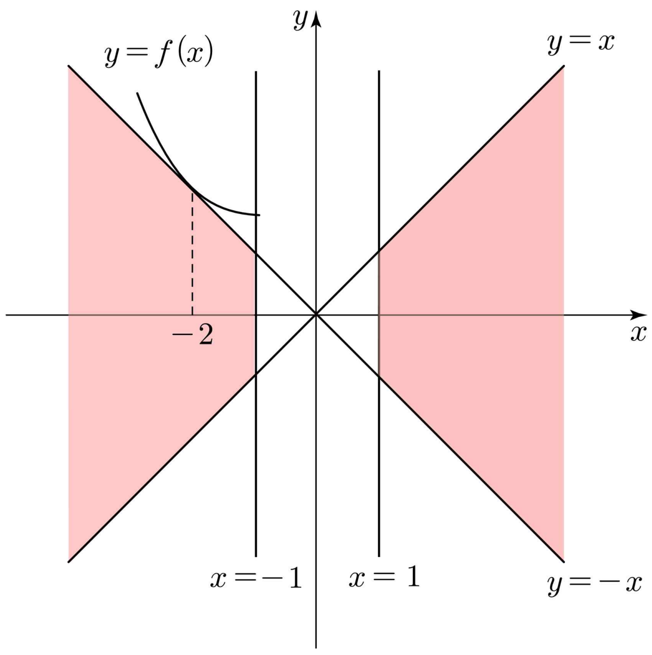
㉠과 ㉡에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같은 색칠된 영역 안에 들어갈 수 없다.



$g(-2)=2$ 이므로,

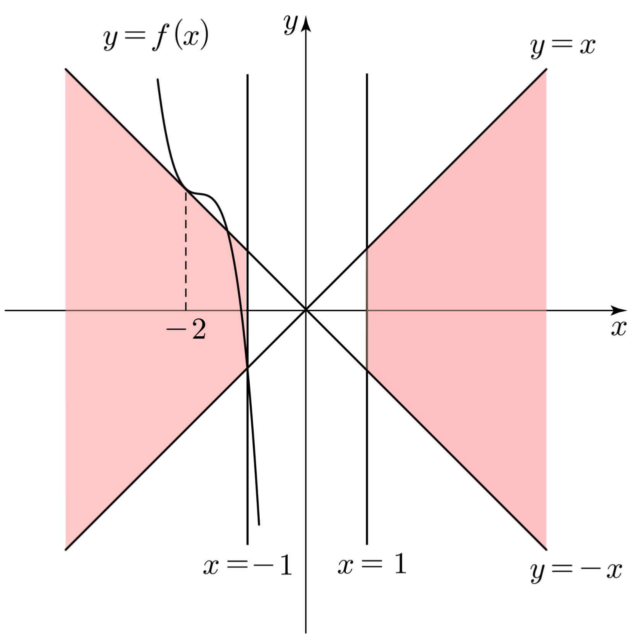
$$g(-2)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+f(-2)}{(f(-2))^n+2}=1 \Rightarrow f(-2)=2$$

이고, $|x|>1$ 에서 $|f(x)|>|x|$ 또는 $f(x)=|x|$ 이어야 하므로, 다음과 같이 함수 $f(x)$ 의 그래프는 $x=-2$ 에서 직선 $y=-x$ 와 접한다.



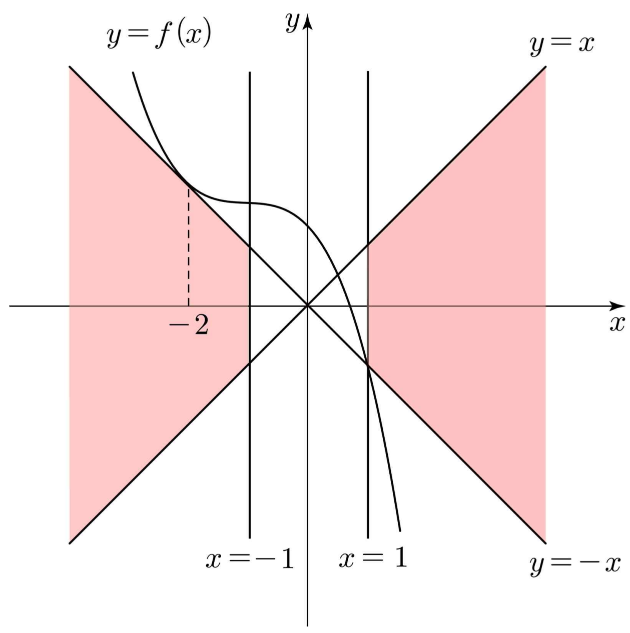
앞에서 구한 $f(a)=-1$ 을 만족하는 실수 a 가 $a=\pm1$ 이므로

만약 $a=-1$ 일 경우,



다음과 같이 빨간색 구간에 함수 $f(x)$ 의 그래프가 존재하게 되므로 조건에 위배된다.

따라서, $f(1)=-1$ 이고, 함수 $f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서,

$$f(x)=-A(x+2)^2(x-1)-x \quad (A \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

라 할 수 있고,

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+f\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n+2}=\frac{1}{4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

이므로,

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-A\times\frac{25}{4}\times-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A=\frac{8}{25}$$

$$\therefore f\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{8}{25}\times\frac{25}{16}\times-\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{13}{8}$$

이다.

문제 코멘트

꽤 난이도가 있는 문항이었다
함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 정의되기 위한 조건을 면밀히 살폈어야 하는 문항으로 함수 $f(x)$ 가 존재해야 하는 범위를 살피고, 이를 이용해 차근차근 풀어나갔어야 했다.
$f(x)$ 의 함숫값이 -1 이 되는 지점이 특수하다는 것을 생각하여 $f(1)=-1$ 을 도출하는 것 또한 쉽지만은 않았을 것이다.

29번: 4

점 $(n, f(n))$을 O_1, 점 $(2n, f(2n))$을 O_2, 점 O_2에서 직선 $x=n$에 내린 수선의 발을 H라 하고,
원 C_2의 반지름의 길이를 수열 $\{r_n\}$이라 정의하자.

원 C_2가 x축에 접하기 때문에

$$f(2n) = r_n = -a_n n^3 + b_n$$
$$\Rightarrow \quad a_n n^2 = \frac{b_n - r_n}{n}$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty} a_n n^2 = \frac{4}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n - r_n}{n} \cdots \text{㉠}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\int_0^{2n} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \times 2nb_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2b_n}{n} = S$$

이므로 ㉠ 에 의해

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{n} = \frac{S}{2} - \frac{4}{3}$$

이다.

$$\overline{O_1O_2} = n + r_n,\ \overline{O_1H} = b_n - r_n,\ \overline{O_2H} = n$$

이고, 이때 삼각형 O_1O_2H가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{O_1O_2}^2 = n^2 + 2r_n n + (r_n)^2 = \overline{O_1H}^2 + \overline{O_2H}^2$$
$$= (b_n - r_n)^2 + n^2$$

이고, 식을 정리하면

$$(r_n)^2 + 2r_n n = (b_n - r_n)^2$$

이다. 이때 ㉠에 의해

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(b_n - r_n)^2}{n^2} = \frac{16}{9} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{r_n}{n} + 1\right)^2 - 1$$

이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{n} = \frac{2}{3}$ 이고 ㉠에서 $\frac{S}{2} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ 이므로

$$S = 4$$

이다.

문제 코멘트

원 C_2의 반지름의 식이 복잡하므로 이를 새로운 수열로 정의한 뒤 계산을 수행하는 것이 편리하다.

30번: 44

(가) 조건에 의하여

1) 만약 수열 $\{a_n\}$이 발산할 경우, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$이므로, 모순이다.

2) 만약 수열 $\{a_n\}$의 공비가 -1일 경우,

$$f(a_1) = f(a_3),\ f(a_2) = f(a_4)$$
$$\Rightarrow\ f(a_1)f(a_2) = f(a_3)f(a_4) < 0$$

이어야 하므로, 모순이다.

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

(가) 조건에 의하여

2 이상의 자연수 n에 대하여 열린구간 $(a_n,\ a_{n+1})$ 또는 열린구간 $(a_{n+1},\ a_n)$에서 $f(c) = 0$을 만족시키는 실수 c가 존재하고,

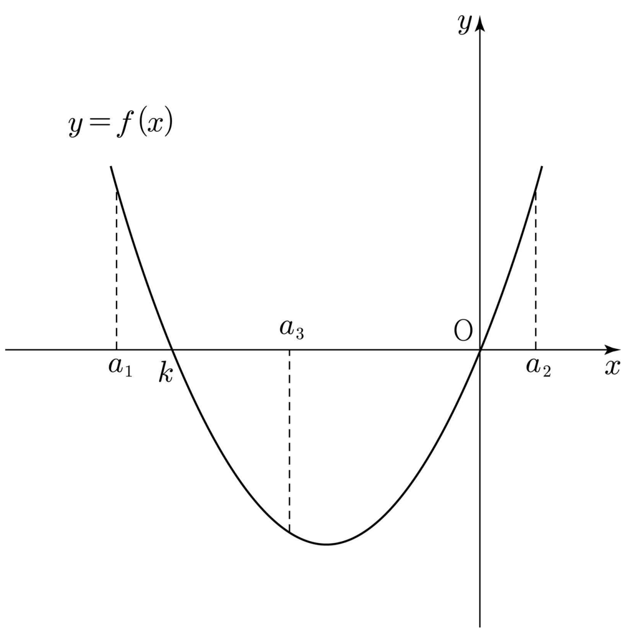
수열 $\{a_n\}$이 0으로 수렴하므로,

수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 할 때, $-1 < r < 0$, $c = 0$임을 알 수 있다.

따라서,

$$f(x) = x(x-k)\ (k\text{는 } 0\text{이 아닌 실수})$$

라 할 수 있고, $a_1 < 0$이므로 다음과 같은 상황일 때, 조건을 만족시킨다.



$$\Rightarrow\ a_1 < k < a_3 < 0\ \cdots\ ㉠$$

$a_1 = a$라 할 때, (나) 조건에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(a_{n+1})}{(a_4)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(a_{n+1})^2 - ka_{n+1}}{(a_4)^n}\right|$$
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^2r^{2n} - kar^n}{(ar^3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^2r^n - ka}{(ar^2)^n}\right| = 4$$

이므로, 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 볼 수 있다.

1) $ar^2 = r$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^2r^n - ka}{(ar^2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^2r^n - ka}{r^n}\right|$$

이지만, $-1 < r < 0$이므로, 극한식이 수렴하지 않아 모순이다.

2) $|ar^2| = 1$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^2r^n - ka}{(ar^2)^n}\right| = ka = 4\ \cdots\ ㉡$$

이고, ㉠에 의하여 $ar^2 = a_3 < 0$이므로, $a_3 = -1$이다.

또한 ㉠과 ㉡에 의하여

$$a_1 < k < a_3 = -1$$
$$\Rightarrow\ a < \frac{4}{a} < -1$$
$$\Rightarrow\ -4 < a < -2$$

이다. a가 정수이므로,

$$a = -3,\ k = -\frac{4}{3},\ r = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이다.

$$a_2 = \sqrt{3} \Rightarrow\ 2\sqrt{3}\,a_2 = 6$$

이므로,

$$f\left(2\sqrt{3}\,a_2\right) = f(6) = 6 \times \left(6 + \frac{4}{3}\right) = 44$$

이다.

문제 코멘트

이차함수와 수열을 섞은 문항으로 (가)조건이 문제를 해결하는 키 포인트였다. (나)조건의 극한식을 제대로 해석하는 것 또한 그리 쉽지만은 않았지만 해냈어야 했다.