2027학년도 Prologue 모의고사 1회 해설지

빠른 정답

공통 과목				선택 과목			
				확률과 통계		미적분	
1	②	12	③	23	①	23	①
2	④	13	①	24	③	24	④
3	③	14	③	25	⑤	25	③
4	①	15	⑤	26	②	26	⑤
5	④	16	6	27	②	27	②
6	⑤	17	27	28	③	28	⑤
7	④	18	2	29	80	29	75
8	①	19	3	30	324	30	117
9	②	20	15				
10	④	21	43				
11	⑤	22	84				

Comment

2026학년도 대학수학능력시험의 기조를 따라
공통 주관식, 확통의 난이도를 올리고
공통 객관식, 미적의 난이도를 내리는 방향으로 출제하였습니다.

문항의 주제의 경우 전반적으로
2025학년도 및 2026학년도 대학수학능력시험을 참고하였습니다.

공통 20, 21, 22번 문항의 경우
생소한 발상이 풀이의 핵심 요소로 작용하는 문항으로,
익숙하지 않은 학생들에게 다소 어렵게 느껴질 수 있는 문항입니다.

확통 28, 30번 문항의 경우
중복조합을 이용한 케이스 분류와 계산을,
확통 29번 문항의 경우 261130과 결이 유사한 발상을 의도하였습니다.

미적 28, 29번 문항의 경우
밑의 범위에 따른 케이스 분류, 홀짝에 따른 케이스 분류 및 계산을,
미적 30번 문항의 경우 260929를 참고하여
등비수열에서 정수항의 개수가 정해질 조건에 대한 분석을 의도하였습니다.

정답 및 해설

〈공통과목〉

객관식									
1.	②	2.	④	3.	③	4.	①	5.	④
6.	⑤	7.	④	8.	①	9.	②	10.	④
11.	⑤	12.	③	13.	①	14.	③	15.	⑤
주관식									
16.	6	17.	27	18.	2	19.	3	20.	15
21.	43	22.	84						

1. ②

$2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^2 = 4$

2. ④

$f'(x) = 4x^3 + 6x$ 이므로 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 10$

3. ③

$\sum_{n=1}^{3} (a_{2n-1} - 2) = \sum_{n=1}^{3} (n - a_{2n})$ 에서

$\sum_{n=1}^{3} (a_{2n-1} + a_{2n}) = \sum_{n=1}^{6} a_n = \sum_{n=1}^{3} (n+2) = 3+4+5 = 12$

4. ①

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

즉, $f(0) = 3f(0) - 4$, $f(0) = 2$

5. ④

$g(x) = (x^3 + x) f(x)$ 에서

$g'(x) = (3x^2 + 1) f(x) + (x^3 + x) f'(x)$ 이므로

$g'(1) = 4f(1) + 2f'(1) = 8 + 2f'(1) = 20$

$f'(1) = 6$

6. ⑤

$\cos(\theta - \pi) > 0$ 에서 $\cos\theta < 0$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4} > 0$ 이므로

θ 는 제2 사분면의 각이다.

따라서 $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta = -\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{\sqrt{7}}{3}$

7. ④

$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 2$ 에서 $y' = x^3 - \frac{3}{4}x^2$ 이므로

점 $(2, 0)$ 을 지나고 곡선 $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 2$ 에

접하는 직선의 방정식은 $y = 5(x-2)$

따라서 y 절편은 -10

8. ①

로그의 성질에 의하여

$\log_8 56 = 1 + \log_8 7$, $\frac{k}{\log_7 2} = k\log_2 7$

$\log_8 56 - \frac{k}{\log_7 2} = 1 + \log_8 7 - k\log_2 7 = 1$

따라서 $\log_8 7 = k\log_2 7 = \frac{1}{3}\log_2 7$, $k = \frac{1}{3}$

9. ②

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x \ (0 \le x \le 3)$ 에서

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 = (x-1)(3x-7)$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대, $x = \frac{7}{3}$ 에서 극소이다.

이때, $f(1) = 3$, $f(3) = 3$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 3 이다.

즉, $\frac{f(a) + f(b)}{3} = 2$ 에서 $f(a) + f(b) = 6$ 이고

$f(a) \le 3$, $f(b) \le 3$ 이므로 $f(a) = f(b) = 3$ 이다.

따라서 두 점 A , B 의 좌표는 각각 $(1, 3)$, $(3, 3)$ 이므로

$\overline{\mathrm{OA}}^2 = 1^2 + 3^2 = 10$, $\overline{\mathrm{AB}}^2 = 4$

$\overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2 = 14$

10. ④

함수 $f(x)=4\cos ax+b$가

$x=\frac{\pi}{3}$ 에서 최솟값 0을 가지므로 $\cos\frac{a\pi}{3}=-1$

즉, $b=4$이고 $\frac{a}{3}$의 값은 홀수이다.

또한 $f\left(\frac{\pi}{5}\right)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)$이므로 $\cos\frac{a\pi}{5}>\cos\frac{a\pi}{2}$

한편, a의 값이 $3\times$(홀수)이므로 $\cos\frac{a\pi}{2}=0$

즉, $\cos\frac{a\pi}{5}>0$, $\frac{4n-5}{2}\pi<\frac{a\pi}{5}<\frac{4n-3}{2}\pi$ (n은 자연수)

a의 값이 $3\times$(홀수)이므로

$a=3$이면 $\frac{4n-5}{2}\pi<\frac{3\pi}{5}<\frac{4n-3}{2}\pi$를

만족시키는 자연수 n이 존재하지 않고,

$a=9$이면 $\frac{4n-5}{2}\pi<\frac{9\pi}{5}<\frac{4n-3}{2}\pi$에서

$n=2$일 때 $\frac{3\pi}{2}<\frac{9\pi}{5}<\frac{5\pi}{2}$ 이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $b=4$이고 a의 최솟값이 9이므로 $a+b$의 최솟값은 13

11. ⑤

시각이 $t\ (t\geq 0)$일 때 점 P의 위치 x가 $x=t^3-3t^2+kt$이므로

시각이 $t\ (t>0)$일 때 점 P의 속도 v와 가속도 a는 각각

$v=3t^2-6t+k$, $a=6t-6$이다.

ㄱ. (참)

$k=6$이면 시각 $t=1$일 때 점 P의 속도는 $3-6+6=3$

ㄴ. (참)

$k=0$이면 $v=3t^2-6t$이므로 점 P는 시각 $t=2$일 때 운동 방향을 바꾸고,

$a=6t-6$이므로 시각 $t=2$일 때 점 P의 가속도는 6

ㄷ. (참)

점 P의 속도 v의 최솟값은 시각 $t=1$일 때 $k-3$

점 P가 운동 방향을 바꾸지 않으려면

점 P의 속도가 항상 0 이상이 되어야 하므로

$k-3\geq 0$에서 k의 최솟값은 3

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. ③

수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_m=2a_6=4a_{4m-3}$에서

$a_1\times r^{m-1}=2a_1\times r^5=4a_1\times r^{4m-4}$

$a_1=0$ 또는 $r=0$이면 a_4의 값이 자연수가 아니므로 모순이다.

즉, $r^{m-1}=2r^5=4r^{4m-4}$에서 $r^{m-6}=2$, $r^{3-3m}=4$

$2(m-6)=3-3m$, $m=3$, $r^3=\frac{1}{2}$

$a_4=3$이므로 $a_1=\frac{a_4}{r^3}=6$, $a_{10}=a_4\times r^6=\frac{3}{4}$

따라서 $a_1+a_{10}=\frac{27}{4}$

13. ①

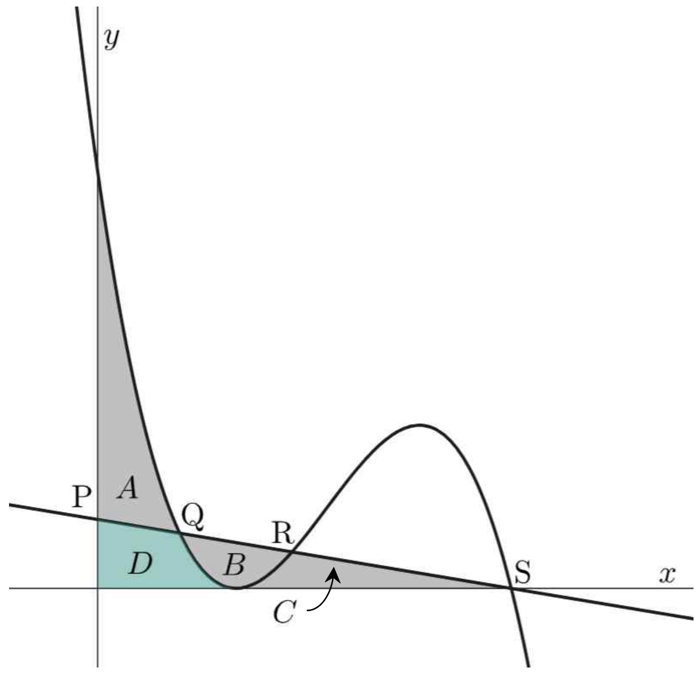
$f(x)$는 최고차항의 계수가 -1이고

$f(1)=f'(1)=f(3)=0$인 삼차함수이므로 $f(x)=-(x-1)^2(x-3)$

점 S를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=m(x-3)$

그림에서 곡선 $y=f(x)$, 선분 PQ, x축, y축으로

둘러싸인 영역을 D라 하자.



(A의 넓이)=(B의 넓이)+(C의 넓이)$+\frac{1}{6}$에서

(A의 넓이)+(D의 넓이)=(B의 넓이)+(C의 넓이)+(D의 넓이)$+\frac{1}{6}$

(A의 넓이)+(D의 넓이)는

곡선 $y=f(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 영역의 넓이이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx&=\int_0^1 -(x-1)^2(x-3)\,dx\\&=\int_0^1 -(x-1)^3+2(x-1)^2\,dx\\&=\left[-\frac{1}{4}(x-1)^4+\frac{2}{3}(x-1)^3\right]_0^1\\&=\frac{11}{12}\end{aligned}$$

(B의 넓이)+(C의 넓이)+(D의 넓이)는 직선 $y=m(x-3)$과

x축, y축으로 둘러싸인 영역의 넓이이므로 $\frac{1}{2}\times 3\times(-3m)=-\frac{9}{2}m$

따라서 $\frac{11}{12}=-\frac{9}{2}m+\frac{1}{6}$ 이므로 $m=-\frac{1}{6}$

14. ③

두 삼각형 ABC, ACD의 외접원의 넓이의 비가 $7:2$이므로

외접원의 반지름의 길이의 비는 $\sqrt{7}:\sqrt{2}$

$\angle\mathrm{BCA}=\theta$라 하면 두 직선 BC, AD는 서로 평행하므로 $\angle\mathrm{CAD}=\theta$

두 삼각형 ABC, ACD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\theta}:\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta}=\sqrt{7}:\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CD}}=2$

$\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로 $\overline{\mathrm{CA}}=2$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{2^2+5^2-(\sqrt{14})^2}{2\times2\times5}=\dfrac{3}{4}$, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

삼각형 ACD는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=2\cos\theta\times\overline{\mathrm{AC}}=3$

삼각형 AED의 넓이가 $\dfrac{15\sqrt{7}}{8}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times3\times\overline{\mathrm{AE}}\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{15\sqrt{7}}{8}$, $\overline{\mathrm{AE}}=5$

삼각형 AED에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{DE}}^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{23}{2}$, $\overline{\mathrm{DE}}=\dfrac{\sqrt{23}}{\sqrt{2}}$

삼각형 AED의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면
사인법칙에 의하여

$2R=\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\sin\theta}=\dfrac{4\sqrt{23}}{\sqrt{14}}$, $R=\dfrac{2\sqrt{23}}{\sqrt{14}}$

따라서 삼각형 AED의 외접원의 넓이는 $R^2\pi=\dfrac{46}{7}\pi$

15. ⑤

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고

(가)에 의하여 $f(3)f(4)<0$이므로

$f(c)=0$, $3<c<4$인 c가 존재한다. ……… ㉠

또한 $f(5)=0$이므로 함수 $f(x)$는 어떤 열린구간에서 감소한다.

즉, $f(x)$는 극값을 갖는 삼차함수이다. ……… ㉡

(나)의 식에서 $n\neq0$일 때와 $n=0$일 때로 경우를 나누자.

(i) $n\neq0$인 경우

수렴하는 극한의 성질에 의하여

$$\lim_{x\to n}\frac{|f(x)|-|f(n)|}{|x^2-n^2|}=\lim_{x\to n}\frac{|f(x)|-|f(n)|}{|x+n|\times|x-n|}$$
$$=\frac{1}{|2n|}\times\lim_{x\to n}\frac{|f(x)|-|f(n)|}{|x-n|}$$

$x\to n-$이면

$$\lim_{x\to n-}\frac{|f(x)|-|f(n)|}{|x-n|}=\lim_{x\to n-}\frac{|f(x)|-|f(n)|}{-(x-n)}$$

$x\to n+$이면

$$\lim_{x\to n+}\frac{|f(x)|-|f(n)|}{|x-n|}=\lim_{x\to n+}\frac{|f(x)|-|f(n)|}{x-n}$$ 이므로

$-$(함수 $|f(x)|$의 좌미분계수) $=$ (함수 $|f(x)|$의 우미분계수) ……… ㉢

함수 $|f(x)|$에서 ㉢이 성립하는 경우는

$f(n)=0$ 또는 $f'(n)=0$인 경우이고,

$f'(n)=0$인 경우는 극한값이 0이므로 (나)를 만족시키는 경우는

$f(n)=0$, $f'(n)\neq0$인 경우이다.

(ii) $n=0$인 경우

$$\lim_{x\to0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{|x^2|}=\lim_{x\to0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x^2}$$ 이므로

함수 $f(x)$의 $x=0$에서의 미분계수가 0이 아니면

$$\lim_{x\to0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x}\times\frac{1}{x}$$

이때, $f(0)\neq0$이면

$$\lim_{x\to0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x}\times\frac{1}{x}=\pm\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\times\frac{1}{x}$$
$$=\pm f'(0)\times\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$$

이므로 극한값이 존재하지 않고, $f(0)=0$이면

$$\lim_{x\to0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x}\times\frac{1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{|f(x)|}{x}\times\frac{1}{x}$$ 이므로

극한값이 존재하지 않는다.

함수 $f(x)$의 $x=0$에서의 미분계수가 0이면 ㉡에 의하여

$x=0$에서 극대 또는 극소이므로 $f(x)-f(0)=x^2(x+m)$ $(m\neq0)$,

$$\lim_{x\to0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x^2}=\pm\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x^2}$$
$$=\pm m$$

이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여

(나)를 만족시키는 모든 정수 n에 대하여

$f(n)=0$이고 $f'(n)\neq0$ 또는 $f'(0)=0$

만약 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이면

㉠에 의하여 $f(n)=0$이고 $f'(n)\neq0$을 만족시키는

정수 n의 개수가 최대 1이다.

따라서 (나)를 만족시키는 정수 n의 개수가 최대 2이므로 모순이고,

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

㉠에 의하여 $f(n)=0$이고 $f'(n)\neq0$을 만족시키는

정수 n의 개수가 최대 2이므로

(나)를 만족시키는 정수 n의 개수가 3이면

$f(n)=0$이고 $f'(n)\neq0$인 정수 n의 개수가 2이고 $f'(0)=0$이다.

$f(x)=(x-k)(x-c)(x-5)$ ($k<c$, k는 정수)라 하면

함수 $f(x)$는 열린구간 (k,c)에서 극댓값을 갖고

열린구간 $(c,5)$에서 극솟값을 가지므로 $k<0<c$

$f'(x)=(x-c)(x-5)+(x-k)(x-5)+(x-k)(x-c)$

$f'(0)=5c+5k+ck=0$

즉, $k=-5$이면 모순이고

$k<-5$이면 $c<0$이 되어 모순이므로 $k>-5$, $c=\dfrac{-5k}{k+5}$

$k=-1$이면 $c=\dfrac{5}{4}$

$k=-2$이면 $c=\dfrac{10}{3}$

$k=-3$이면 $c=\dfrac{15}{2}$

$k=-4$이면 $c=20$

이므로 $k=-2$, $c=\dfrac{10}{3}$

따라서 $f(x)=(x+2)\left(x-\dfrac{10}{3}\right)(x-5)$

$f(7)=66$

16. 6

주어진 식에 $n=2$를 대입하면

$a_3=2a_2+4$이므로 $a_2=8$

주어진 식에 $n=1$을 대입하면

$a_2=a_1+2$이므로 $a_1=6$

17. 27

$f(x)=x^4+3x^3-3x^2+C$(C는 적분상수)

$f(1)=0$이므로 $C=-1$, $f(2)=27$

18. 2

곡선 $y=\log_2(4x-k^2-3)$이 직선 $x=k$와 만나므로

로그의 진수 조건에 의하여

$4k-k^2-3>0$, $-(k-1)(k-3)>0$

k의 값이 자연수이므로 $k=2$

19. 3

$f(x)=ax^3-11x^2+10x+4$에서

$f'(x)=3ax^2-22x+10$

직선 $y=2x$가 제1사분면에서 곡선 $y=f(x)$에 접하므로

$ac^3-11c^2+10c+4=2c$, $ac^3-11c^2+8c+4=0$

$3ac^2-22c+10=2$, $3ac^2-22c+8=0$ ……… ㉠

을 만족시키는 양수 c가 존재한다.

㉠에 의하여 $ac^3-\frac{22}{3}c^2+\frac{8}{3}c=0$ ……… ㉡이고

㉠과 ㉡에 의하여 $\frac{11}{3}c^2-\frac{16}{3}c-4=0$이므로

$11c^2-16c-12=0$

$(c-2)(11c+6)=0$, $c=2$

㉠에 $c=2$를 대입하면 $12a-36=0$이므로 $a=3$

20. 15

k가 소수이고 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로

모든 자연수 n에 대하여

$\{a_{n+1}-a_n,\ a_{n+2}-a_{n+1}\}=\{1,\ k^3\}$이거나

$\{a_{n+1}-a_n,\ a_{n+2}-a_{n+1}\}=\{k,\ k^2\}$이고,

모든 자연수 n에 대하여 a_n+a_{n+1}의 값이 짝수이므로

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 홀수이거나 모든 항이 짝수이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$의 값이

짝수이므로 $\{a_{n+1}-a_n,\ a_{n+2}-a_{n+1}\}=\{k,\ k^2\}$이고 k는 짝수이다.

소수 중에서 짝수인 것은 2가 유일하므로,

$k=\boxed{2}$ 이다. ……… $p=2$

모든 자연수 n에 대하여 다음과 같이 경우를 나누자.

(i) $a_{2n}-a_{2n-1}=k$, $a_{2n+1}-a_{2n}=k^2$인 경우

모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n+1}-a_{2n-1}=k^2+k=6$이므로

수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 $\boxed{6}$ 인 등차수열이고 ……… $q=6$

$a_{20}-a_{19}=k$, $a_{20}=5a_3$이므로

$a_1=m$이라 하면

$a_3=m+6$, $a_{20}=a_{19}+2=m+6\times9+2=m+56$

즉 $5m+30=m+56$, $m=\frac{13}{2}$

따라서 a_1의 값이 자연수가 아니다.

(ii) $a_{2n}-a_{2n-1}=k^2$, $a_{2n+1}-a_{2n}=k$인 경우

수열 $\{a_{2n-1}\}$은 공차가 $\boxed{6}$ 인 등차수열이고

$a_{20}-a_{19}=k^2$, $a_{20}=5a_3$이므로

$a_1=m$이라 하면

$a_3=m+6$, $a_{20}=a_{19}+4=m+6\times9+4=m+58$

즉 $5m+30=m+58$, $m=7$

따라서 a_1의 값은 $\boxed{7}$ 이다. ……… $r=7$

(i), (ii)에 의하여 $a_1=\boxed{7}$ 이다.

이상에서 $p=2$, $q=6$, $r=7$이므로

$p+q+r=15$

21. 43

(나)에서 $g(x)=t$로 치환하면 $g(t)=t^3+at^2+b$
(가)에 의하여 $x \le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \ge g(0)$
$x>0$에서 함수 $g(x)$의 치역에 음의 실수 s가 포함된다고 가정하자.
$a<0$이므로 함수 $y=x^3+ax^2+b$는 열린구간 $(-\infty,\ 0)$에서 증가한다.
즉 $g(s)<g(0)$이 되어 (가)에 모순이고, $x>0$에서 $g(x) \ge 0$이다.
$x>0$에서 $g(x)=\int_1^x f(t)\,dt$이고 $f(x)$가 이차함수이므로
함수 $g(x)$는 $x>0$에서 미분가능하다.
따라서 $\{g(x)|x>0\}=\{y|y \ge 0\}$이고,
$x \ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=x^3+ax^2+b$이다.

$g(1)=0$이고 $x \ge 0$에서 $g(x) \ge 0$이므로 $g'(1)=0$
$g(1)=1-a+b=0,\ g'(1)=3-2a=0$
$a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}$
$\int_{-3}^{3} g(x)\,dx=\int_{-3}^{0} g(x)\,dx+\int_0^3 g(x)\,dx$이므로
이는 $-3 \le x \le 0$에서 $g(x)=g(0)$일 때 최솟값
$$\int_{-3}^{0} g(0)\,dx+\int_0^3 x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\,dx=\left[\frac{1}{2}x\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x\right]_0^3$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{81}{4}-\frac{27}{2}+\frac{3}{2}=\frac{81-42}{4}=\frac{39}{4}$$
를 갖는다.
따라서 $\frac{q}{p}=\frac{39}{4}$
$p+q=43$

22. 84

곡선 $y=\log_a(x+1)+4$가 y축과 만나는 점이 B이므로
점 B의 좌표는 $(0,\ 4)$
두 곡선 $y=\log_a(x+1)+4$와 $y=-k\times\left(\frac{1}{a}\right)^x+k$의 교점이 C이고
점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=a^x-1$과 만나는 점이 D이므로
점 C의 좌표를 $(s,\ \log_a(s+1)+4)$라 하면 점 D의 좌표는 $(s,\ a^s-1)$

두 점 B와 C를 y축의 방향으로 -4만큼
평행이동한 점을 각각 $\mathrm{B}',\ \mathrm{C}'$이라 하면
$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{B'C'}},\ \mathrm{B}'=(0,\ 0)=\mathrm{O},\ \mathrm{C}'=(s,\ \log_a(s+1))$

즉, $\overline{\mathrm{OC'}}=\overline{\mathrm{OD}}$이고 두 점 $\mathrm{C}',\ \mathrm{D}$의 x좌표가 같으므로
두 점 $\mathrm{C}',\ \mathrm{D}$의 y좌표도 같다.
따라서 $a^s-1=\log_a(s+1)$

한편, 두 함수 $y=a^x-1,\ y=\log_a(x+1)$은
모두 증가하는 함수이고 서로 역함수 관계이므로
두 함수의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

따라서 $a^s-1=\log_a(s+1)=s$ ……… ㉠
두 곡선 $y=a^x-1,\ y=-k\times\left(\frac{1}{a}\right)^x+k$의 교점의 x좌표는
$a^x-1=-k\times\left(\frac{1}{a}\right)^x+k$에서
$a^{2x}-(k+1)a^x+k=0$
$(a^x-1)(a^x-k)=0$
$x=0$ 또는 $x=\log_a k$
$a^0-1=0,\ a^{\log_a k}-1=k-1$이므로
두 교점은 각각 $\mathrm{O},\ \mathrm{A}(\log_a k,\ k-1)$
㉠에 의하여 두 점 C와 D의 좌표는 $(s,\ s+4),\ (s,\ s)$

곡선 $y=-k\times\left(\frac{1}{a}\right)^x+k$는 곡선 $y=-a^{-x+\log_a k}+1+k-1$와 일치하고
이는 곡선 $y=a^x-1$을 원점에 대하여 대칭이동한 후
x축의 방향으로 $\log_a k$만큼, y축의 방향으로 $k-1$만큼
평행이동한 것과 일치한다.

따라서 두 곡선 $y=a^x-1,\ y=-k\times\left(\frac{1}{a}\right)^x+k$는
점 $\left(\frac{\log_a k}{2},\ \frac{k-1}{2}\right)$에 대하여 서로 대칭이다.

두 점 O와 A는 점 $\left(\frac{\log_a k}{2},\ \frac{k-1}{2}\right)$에 대하여 서로 대칭이고,
두 점 C와 D는 각각 두 곡선 $y=-k\times\left(\frac{1}{a}\right)^x+k,\ y=a^x-1$ 위의
x좌표가 서로 같은 점이며 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{OD}}$이므로
두 점 C와 D도 점 $\left(\frac{\log_a k}{2},\ \frac{k-1}{2}\right)$에 대하여 서로 대칭이다.

따라서 선분 CD의 중점의 좌표가 $\left(\dfrac{\log_a k}{2}, \dfrac{k-1}{2}\right)$이므로

$s=\dfrac{\log_a k}{2}$, $s+2=\dfrac{k-1}{2}$

㉠에 의하여 $\log_a(s+1)=s$이므로

$s=\dfrac{\log_a k}{2}=\log_a\sqrt{k}$에서 $s+1=\sqrt{k}$

즉, $\sqrt{k}+1=\dfrac{k-1}{2}$

$k-1=(\sqrt{k}-1)(\sqrt{k}+1)$이고 $k>1$이므로

$1=\dfrac{\sqrt{k}-1}{2}$, $k=9$, $s=2$

$a^s-1=s$이므로 $a^2=3$, $k^2=81$

$a^2+k^2=84$

정답 및 해설

〈선택과목 - 확률과 통계〉

객관식											
23.	①	24.	③	25.	⑤	26.	②	27.	②	28.	③
주관식											
21.	80	22.	324								

23. ①

h 1개, e 1개, l 2개, o 1개를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!}=60$

24. ③

${}_m\mathrm{H}_2={}_{m+1}\mathrm{C}_2=10$이므로 $\dfrac{m(m+1)}{2}=10$, $m=4$

25. ⑤

네 자리 자연수가 3200보다 큰 홀수이려면

일의 자리 숫자는 1, 3, 5 중 하나이다.

천의 자리 숫자가 3이면 백의 자리 숫자는 2 이상이므로

$4\times5\times3=60$

천의 자리 숫자가 4 또는 5이면

$2\times5\times5\times3=150$

따라서 $60+150=210$

26. ②

네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사탕 4개를

남김없이 나누어 주는 경우의 수와

같은 종류의 초콜릿 4개를 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 모두

${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4=35$

어느 학생도 사탕을 3개 이상 받지 않으려면

사탕 3개를 한 명에게, 1개를 다른 한 명에게 주는 경우와

사탕 4개를 모두 한 명에게 주는 경우가 모두 없어야 한다.

사탕 3개를 한 명에게, 1개를 다른 한 명에게 주는 경우의 수는

서로 다른 4명 중 2명을 골라 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{P}_2=12$

사탕 4개를 모두 한 명에게 주는 경우의 수는

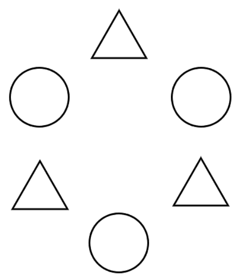
서로 다른 4명 중 1명을 고르는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{C}_1=4$

따라서 $(35-12-4)\times35=665$

27. ②

이웃한 두 카드에 적혀 있는 숫자의 곱이 20보다 작으려면 4, 5, 6 중 어느 것도 서로 이웃하지 않아야 한다.
즉, 1, 2, 3이 적힌 세 장의 카드가 들어갈 자리를 ○, 4, 5, 6이 적힌 세 장의 카드가 들어갈 자리를 △라 하면 다음과 같은 배치만이 가능하다.



회전하여 일치하는 것을 같은 것으로 보므로
1, 2, 3을 먼저 나열하는 경우의 수는 $(3-1)!=2!$
이후 4, 5, 6을 추가로 나열하는 경우의 수는 $3!$
따라서 $2!\times 3!=12$

28. ③

(나)에서 $\log_4 f(1)+\log_4 f(4)=\log_4\left(f(1)\times f(4)\right)$이므로
$f(1)\times f(4)=4^m$ $(m=0,\ 1,\ 2)$가 되어야 한다.
이를 만족시키는 $f(1)$과 $f(4)$의 순서쌍 $\left(f(1),\ f(4)\right)$는
$(1,\ 1)$, $(1,\ 4)$, $(2,\ 2)$, $(4,\ 1)$, $(4,\ 4)$
이다.
$f(1)=f(4)$일 때와 $f(1)\neq f(4)$일 때로 경우를 나누자.

(i) $f(1)=f(4)$인 경우
이를 만족시키는 경우는 $(1,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(4,\ 4)$의 3가지이고
$f(2)$, $f(3)$, $f(5)$는 $f(2)\leq f(3)\leq f(5)$를 만족시켜야 하므로
집합 X에서 중복을 허용하여 순서 없이 3개의 원소를 고르는 경우의 수는
${}_5\mathrm{H}_3$
따라서 모든 경우의 수는 $3\times {}_5\mathrm{H}_3=3\times {}_7\mathrm{C}_3=105$

(ii) $f(1)\neq f(4)$인 경우

(I) $f(1)=1$, $f(4)=4$인 경우
$f(2)$, $f(3)$, $f(5)$는 $f(2)\leq 4f(3)\leq 4f(5)$를 만족시켜야 한다.
$f(2)\leq 4$이면 $f(3)$의 값에 관계없이 성립하므로
$f(3)$, $f(5)$를 고르는 경우의 수는
${}_5\mathrm{H}_2$
$f(2)=5$이면 $f(3)$의 값이 2 이상이어야 하므로
$f(3)$, $f(5)$를 고르는 경우의 수는
${}_4\mathrm{H}_2$
따라서 모든 경우의 수는 $4\times {}_5\mathrm{H}_2+{}_4\mathrm{H}_2=4\times {}_6\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2=70$

(II) $f(1)=4$, $f(4)=1$인 경우
$f(2)$, $f(3)$, $f(5)$는 $4f(2)\leq f(3)\leq f(5)$를 만족시켜야 한다.
$f(2)=1$이면 $f(3)$, $f(5)$는 각각 4, 5 중 하나이므로 그 경우의 수는
${}_2\mathrm{H}_2$
$f(2)\geq 2$이면 이를 만족시키는 함수 f가 존재하지 않는다.
따라서 모든 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

(I), (II)에 의하여 모든 경우의 수는
$70+3=73$

따라서 (i), (ii)에 의하여 모든 경우의 수는
$105+73=178$

29. 80

시행을 한 번 하였을 때
점 P의 x좌표와 y좌표의 합은 1 또는 2만큼 증가한다.
즉, 점 P가 직선 $y=-x+7$ 위에 있기 위해서는
점 P의 x좌표와 y좌표의 합이 7이 되어야 하므로,
점 P를 $(p+1,\ q)$ 또는 $(p,\ q+1)$로 이동시키는 시행을 ㉠,
점 P를 $(p+1,\ q+1)$로 이동시키는 시행을 ㉡이라 하면
㉠이 3번, ㉡이 2번 있어야 한다.

㉠과 ㉡의 순서를 정하여 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{3!\,2!}$

㉠에서 $(p+1,\ q)$와 $(p,\ q+1)$ 중 하나를 선택하는
경우의 수는 ${}_2\Pi_3=8$

따라서 모든 경우의 수는 $\dfrac{5!}{2!\,3!}\times{}_2\Pi_3=10\times8=80$

30. 324

A가 받는 빨간 공의 개수로 경우를 나누자.

(ⅰ) A가 빨간 공을 3개 받는 경우
B, C, D에게 검은 공 1개와 흰 공 1개씩을 나누어 주어야 한다.
A에게 검은 공 1개 또는 흰 공 1개를 주는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1$
남은 공을 모두 A, B, C, D에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{H}_2$
따라서 $2\times{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{H}_2=48$

(ⅱ) A가 빨간 공을 2개 받는 경우
B, C, D 중에서 빨간 공을 받는 학생을 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$
빨간 공을 받은 학생을 E라 하면
E는 검은 공과 흰 공 중
한 종류만을 2개 이하로 받아야 하고
A, E가 아닌 두 명의 학생들에게 검은 공 1개와
흰 공 1개를 나누어 주어야 한다.

(Ⅰ) E가 검은 공을 받는 경우
남은 검은 공 2개, 흰 공 3개 중에서
A가 검은 공을 받는 경우는 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{H}_3=16$
A가 흰 공을 받는 경우는
E가 검은 공 2개를 받지 않아야 하므로 $({}_3\mathrm{H}_2-1)\times{}_3\mathrm{H}_2=30$
(Ⅱ) E가 흰 공을 받는 경우
남은 검은 공 3개, 흰 공 2개 중에서 A가 검은 공을 받는 경우는
E가 흰 공 2개를 모두 받지 않아야 하므로 ${}_3\mathrm{H}_2\times({}_3\mathrm{H}_2-1)=30$
A가 흰 공을 받는 경우는 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{H}_3=16$

(Ⅰ), (Ⅱ)에 의하여 모든 경우의 수는
$3\times(16+30+30+16)=276$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 경우의 수는
$48+276=324$

정답 및 해설

〈선택과목 - 미적분〉

객관식											
23.	①	24.	④	25.	③	26.	⑤	27.	②	28.	⑤
주관식											
21.	75	22.	117								

23. ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{n}}{2+\dfrac{4}{n}}=\frac{1}{2}$$

24. ④

$5n-1<a_n<2n+\sqrt{9n^2+1}$에서 $5-\dfrac{1}{n}<\dfrac{a_n}{n}<2+\sqrt{9+\dfrac{1}{n^2}}$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=5$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n^2}{na_n+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2a_n}{n^2}+1}{\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{3}{n}}=\frac{1}{5}$

25. ③

$$a_n=\left(\frac{\log_3 k}{2}\right)^n+\left(\frac{4-\log_2 k}{2}\right)^n$$

이므로 수열 $\{a_n\}$이 수렴하려면

두 수열 $\left\{\left(\dfrac{\log_3 k}{2}\right)^n\right\}$, $\left\{\left(\dfrac{4-\log_2 k}{2}\right)^n\right\}$이 모두 수렴하여야 한다.

k의 값이 자연수이므로

$-1<\dfrac{\log_3 k}{2}\le1$에서 $1\le k\le9$

$-1<\dfrac{4-\log_2 k}{2}\le1$에서 $4\le k<64$

따라서 $4\le k\le9$이므로 k의 개수는 6

26. ⑤

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(a_n-1)=\lim_{n\to\infty}n^2(b_n-2)=3$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=2$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(b_n-2)=0$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n(2a_n-b_n)}{a_n+2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2a_n-2)+n(2-b_n)}{a_n+2b_n}=\frac{6}{5}$

27. ②

그림에서 $\overline{\mathrm{OA}_n}=1$이고 $\tan(\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n)=\frac{1}{a_n}$ 이므로

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}=\frac{1}{a_n}$,

$\cos(\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n)=\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+1}}$,

$\sin(\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n)=\frac{1}{\sqrt{a_n^2+1}}$

직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n$ 이 원 $x^2+y^2=1$과 접하므로 $\angle \mathrm{OA}_n\mathrm{C}_n=\frac{\pi}{2}$

즉 $\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n=\angle \mathrm{C}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ 이므로

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\frac{1}{\sqrt{a_n^2+1}}$, $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=\frac{1}{a_n\sqrt{a_n^2+1}}$

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 넓이 S_n은

$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=\frac{1}{2a_n^3+2a_n}$

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 $a_n=a_1+(n-1)d$이라 하자.

$d=0$이면 $a_1=0$이므로 모순이고,

$d>0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3}{n^3}=d^3$이므로

$\lim_{n\to\infty}(n^{a_1}\times S_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{a_1-3}}{\frac{2a_n^3}{n^3}+\frac{2a_n}{n^3}}=\frac{1}{16}$ 에서 $a_1=3$,

$\frac{1}{2d^3}=\frac{1}{16}$ 에서 $d=2$

따라서 $a_2=3+2=5$

28. ⑤

함수 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+2x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}$ 의 정의역이 실수 전체의 집합이므로

모든 실수 x에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+2x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}$ 의 값이 존재한다.

x의 값의 범위에 따라 경우를 나누자.

(ⅰ) $|x|>1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+2x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+2x^{-n}+x^{-2n}f(x)}{1+x^{-n}+x^{-2n}}=a$$

(ⅱ) $|x|<1$일 때

$\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+2x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{1}=f(x)$$

(ⅲ) $x=1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+2x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+2+f(1)}{1+1+1}=\frac{a+2+f(1)}{3}$$

(ⅳ) $x=-1$일 때

n이 홀수이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+2x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}=\frac{a-2+f(-1)}{1-1+1}=a-2+f(-1)$$

n이 짝수이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+2x^n+f(x)}{x^{2n}+x^n+1}=\frac{a+2+f(-1)}{1+1+1}=\frac{a+2+f(-1)}{3}$$

극한값이 존재하므로 $a-2+f(-1)=\frac{a+2+f(-1)}{3}$ 에서

$2f(-1)=8-2a$, $f(-1)=4-a$

따라서 $a-2+f(-1)=\frac{a+2+f(-1)}{3}=2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여

$$g(x)=\begin{cases} a & (|x|>1) \\ f(x) & (|x|<1) \\ \frac{a+2+f(1)}{3} & (x=1) \\ 2 & (x=-1) \end{cases}$$

즉, $g(g(-1))=g(2)=a=6-a^2$에서

$a^2+a-6=0$, $a=2$ 또는 $a=-3$

$g(g(0))=g(f(0))=0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 양수이므로 $f(0)>0$

$0<f(0)<1$이면 $g(f(0))=f(f(0))=0$이므로

함수 $f(x)$의 최솟값이 양수임에 모순이고

$f(0)>1$이면 $g(f(0))=a=0$이므로 $a=2$ 또는 $a=-3$임에 모순이다.

따라서 $f(0)=1$, $\frac{a+2+f(1)}{3}=0$

$f(1)>0$이므로 $a<0$에서 $a=-3$이고, $\frac{-1+f(1)}{3}=0$이므로 $f(1)=1$

$f(-1)=4-a$이므로 $f(-1)=7$

$f(x)=mx(x-1)+1$이라 하면 $f(-1)=7$이므로 $m=3$이고,

이때, $f(x)$의 최솟값은

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}+1=\frac{1}{4}>0$이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $f(x)=3x(x-1)+1$, $f(a)=f(-3)=37$

29. 75

n이 홀수일 때와 짝수일 때로 경우를 나누자.

(ⅰ) n이 홀수인 경우

$(-1)^n=-1$이므로

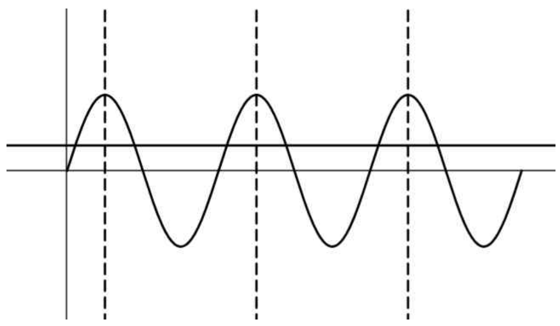
a_n은 $0<x<2n$에서 방정식 $\sin\pi x=\frac{1}{3}$의 서로 다른 모든 실근의 합이다.

각각의 열린구간 $(0,2)$, $(2,4)$, $(4,6)$, $\cdots$ 에서

방정식 $\sin\pi x=\frac{1}{3}$은 서로 다른 두 실근을 갖고,

삼각함수의 대칭성에 의하여 두 실근의 합은

각각 $2\times\frac{1}{2}$, $2\times\frac{5}{2}$, $2\times\frac{9}{2}$, $\cdots$ 이다.



즉

$n=1$일 때 $a_1=1$

$n=3$일 때 $a_3=1+5+9$

$n=5$일 때 $a_5=1+5+9+13+17$

$\vdots$

이므로

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}(4k-3)=2n^2-n$$

(ⅱ) n이 짝수인 경우

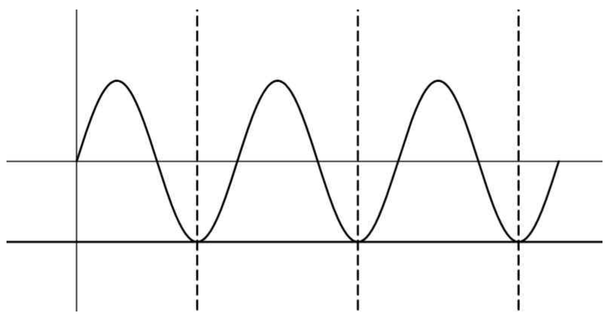
$(-1)^n=1$이므로

a_n은 $0<x<2n$에서 방정식 $\sin\pi x=-1$의 서로 다른 모든 실근의 합이다.

각각의 열린구간 $(0,2)$, $(2,4)$, $(4,6)$, $\cdots$ 에서

방정식 $\sin\pi x=-1$은 오직 하나의 실근을 갖고,

그 실근은 각각 $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $\cdots$ 이다.



즉,

$n=2$일 때 $\frac{3}{2}+\frac{7}{2}$

$n=4$일 때 $\frac{3}{2}+\frac{7}{2}+\frac{11}{2}+\frac{15}{2}$

$n=6$일 때 $\frac{3}{2}+\frac{7}{2}+\frac{11}{2}+\frac{15}{2}+\frac{19}{2}+\frac{23}{2}$

$\vdots$

이므로

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\left(2k-\frac{1}{2}\right)=n^2+\frac{1}{2}n$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$a_n=\begin{cases}2n^2-n & (n\text{이 홀수인 경우})\\ n^2+\frac{1}{2}n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n+1}=(2n+1)(4n+1)=8n^2+6n+1$

$a_{4n}=16n^2+2n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{ka_{2n+1}}-\sqrt{a_{4n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{8kn^2+6kn+1}-\sqrt{16n^2+2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(8k-16)n^2+(6k-2)n+1}{\sqrt{8kn^2+6kn+1}+\sqrt{16n^2+2n}}$$

이고 극한값이 존재하므로 $k=2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n+1}{\sqrt{16n^2+12n+1}+\sqrt{16n^2+2n}}=\frac{10}{4+4}=\frac{5}{4}$$

$L=\frac{5}{4}$

따라서 $30\times k\times L=75$

30. 117

수열 $\{a_n\}$에서

a_2, a_3, a_4의 값은 자연수이고

그 외의 모든 항은 자연수가 아니다. 즉 공비를 r이라 하면 $r>0$이다.

또한

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n+a_1\times 2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^n}{\frac{a_1}{r}\times r^n+a_1\times 2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{\frac{1}{r}\times r^n+2^n}\ \cdots\cdots\ ㉠$$

에서

㉠은 $0<r<2$이면 0으로 수렴

$r=2$이면 $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}=\dfrac{2}{3}$로 수렴

$r>2$이면 $\dfrac{1}{\frac{1}{r}}=r$로 수렴한다.

즉, $\dfrac{2}{3}<\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n+a_1\times 2^n}<3$이므로 $2<r<3$이고,

r의 값은 정수가 아니다.

$r=\dfrac{q}{p}$ (p와 q는 서로소인 자연수이고 $p\neq 1$)이라 하면

a_2, a_3, a_4의 값이 자연수이고 a_5의 값이 자연수가 아니므로

a_2는 p^2의 배수이고 p^3의 배수가 아니다.

$a_2=p^2\times k$ (k는 p와 서로소인 자연수)라 하면

$a_1=\dfrac{p^3\times k}{q}$이므로 q는 k의 약수가 아니다.

$2<\dfrac{q}{p}<3$에서 $2p<q<3p$이고,

$4<\dfrac{p^3\times k}{q}<5$에서 $4q<p^3\times k<5q$이므로

p의 값에 따라 경우를 나누자.

(ⅰ) $p=2$

가능한 q의 값은 5뿐이고, 이때 $20<8k<25$이므로 $k=3$이다.

이때 3은 2와 서로소이고 5와도 서로소이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $p\geq 3$

$2p<q<3p$에서 $8p<4q<12p$, $10p<5q<15p$이므로

$8p<p^3\times k<15p$, $8<p^2\times k<15$

이를 만족시키는 p와 k의 순서쌍 $(p,\ k)$는 $(3,\ 1)$뿐이고,

이때의 q의 값은 7 또는 8이다.

한편, $q=7$이면 $28<27<35$이므로 모순이고

$q=8$이면 $32<27<40$이므로 모순이다.

따라서 조건을 만족시키는 p의 값이 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $r=\dfrac{5}{2}$, $a_1=\dfrac{24}{5}$이므로

$a_2=12$, $a_3=30$, $a_4=75$

따라서 $a_2+a_3+a_4=117$

수고하셨습니다!

제작:
Midori(공통 22번 제외 전 문항 출제)
Amoeba(검토, 해설지 작성)
RIVI(검토)
갑종배당이자소득세(공통 22번 출제, 검토, 삽화 제공)

인스타 https://www.instagram.com/midori_mn04/ (@midori_mn04)
이메일 anthony0130@naver.com
오르비 https://orbi.kr/profile/1102448